



Vetületi átszámítások Ausztria és Magyarország között

Dr. Völgyesi Lajos egyetemi docens
BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék,
MTA-BME Fizikai Geodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport

Ausztria és Magyarország közötti vetületi transzformációk elvégzéséhez a GPS mérésekkel meghatározható WGS84 koordináták adnak kiváló lehetőséget. A transzformációk két lépésben hajthatók végre: először az egyik ország tetszőleges vetületi rendszerében ismert koordinátákat számítjuk át WGS84 koordinátákká, majd ezeket a WGS84 koordinátákat transzformáljuk a másik ország tetszőleges vetületi rendszerébe. A két ország vetületi rendszerei közötti transzformációk elvégzéséhez számítógépes programrendszert fejlesztettünk ki. A kifejlesztett módszerrel és szoftverrel Ausztria és Magyarország vetületi rendszerei között a közös országhatár legalább 50 kilométeres környezetében néhány cm pontosságú transzformáció lehetséges.

1. Bevezetés

A nagyméretarányú térképek vetületi rendszerei, a vetületi rendszerek alapfelületei, valamint ezen alapfelületeken ábrázolt háromszögelési hálózatok országonként különböznek, sőt egy országon belül is többféleképpen lehetnek. Vetülettani értelemben valamely összefüggő háromszögelési hálózat csak akkor tekinthető egységesnek, ha együttesen egyenlítették ki. Kis mértékben akkor is megváltoznak a háromszögelési pontok alapfelületi koordinátái, amikor a hálózatot valamilyen okból újból kiegyenlítjük.

Zárt matematikai összefüggésekkel csak akkor lehet egyik vetületi rendszerből valamely másikba a pontok síkkoordinátáit átszámítani, ha mindkét vetületi rendszernek ugyanaz az alapfelülete, és a háromszögelési hálózat is együttesen került kiegyenlítésre. Ha ez nem teljesül, az átszámítás csak olyan *azonos pontok* felhasználásával végezhető el, amelyeknek mindkét vetületi rendszerben ismertek a koordinátái (Hazay 1964; Varga 1981, 1982, 1986). Ebben az esetben az átszámítás eredménye az ábrázolt háromszögelési hálózatok megbízhatóságától és a kiválasztott azonos pontoktól is függ. Ha más azonos pontokat választunk, az átszámított koordináták is kis mértékben különbözni fognak. Az átszámítást

ilyenkor *Helmert-féle* síkbeli transzformációval vagy hatványpolinomok alkalmazásával végezhetjük. Ezekkel a módszerekkel egyetlen síkbeli transzformációval küszöböljük ki a vetületi torzulásokat és a háromszögelési hálózatok ellentmondásait.

Az átszámítást pontosabbá tehetjük, az ún. *vegyes módszer* alkalmazásával. Ekkor a transzformációt két lépésre bontjuk, első lépésben a vetületi torzulásokat, a másodikban pedig a háromszögelési hálózatok torzításait küszöböljük ki. Az első lépésben azzal a közelítéssel élünk, hogy a két vetületi rendszernek azonos az alapfelülete és a háromszögelési hálózata is, ezért a számítást *koordináta-módszerrel* végezzük el (Varga 1986). Ekkor jól közelítő síkkoordinátákat kapunk a második vetületi síkon. Ezt követően a második lépésben maximálisan ötödfokú hatványpolinom alkalmazásával folytatjuk a transzformációt, amelyben a transzformációs állandók meghatározásához az azonos pontoknak a második vetületi közelítő és az ugyancsak második vetületi adott koordinátáit használjuk fel (Joó, 1975). Így az átszámítás második lépésében már alacsonyabb fokú sorokkal küszöbölhetjük ki a háromszögelési hálózatok különbözőségi miatti ellentmondásokat, mintha az egész számítást egy lépésben általános sorokkal végeznénk (Völgyesi- Varga 2001).

2. Ausztria és Magyarország közötti transzformáció lehetősége

Ausztria és Magyarország egyes vetületi rendszereinek alapfelülete (a *Bessel-féle* ellipszoid) megegyezik, a háromszögelési hálózatok is rendelkeznek azonos pontokkal, a vetületi rendszerek közötti átszámítások mégsem végezhetők el koordináta-módszerrel, mivel az alapfelületek elhelyezése kis mértékben különböző, és a háromszögelési hálózatokat is külön-külön egyenlítették ki. Így az egyetlen lehetőség az azonos pontok felhasználásával végzett átszámítás, amely során a vegyes módszert alkalmaztuk.

Szomszédos országok vetületi rendszerei általában csak néhány száz kilométeres távolságig terjeszthetők ki a másik országban, mivel azonos pontok a közös országhatárnak csak ilyen környezetében találhatók (Bácsatyi 1993, 1995). A GPS az azonos pontok előállításának legmegfelelőbb eszköze, mert ha a szomszédos ország háromszögelési pontjainak X, Y, Z térbeli derékszögű, WGS84, vagy UTM-koordinátáit vele meghatározzuk, olyan azonos pontok hálózát kapjuk, amely segítségével az egyes országok vetületi rendszerei közötti átszámítások is elvégezhetők.

Egy bizonyos ország valamelyik vetületi rendszerét csak az ésszerűség határai között terjeszthetjük ki olyan irányban, ahol korábban nem voltak abban a vetületi rendszerben adott pontok. Ausztria és Magyarország vetületi rendszerei közötti átszámítások elkészítését az ez lehet, hogy megfelelő számban rendelkezünk GPS-szel meghatározott azonos pontokkal. Így nem okozhat problémát, hogy olyan vetületi rendszerek között kell átszámítani, amelyeknek Ausztriában a Bessel, Magyarországon a Bessel, Kraszovszkij vagy az IUGG67 ellipszoid az alapfelülete, és Ausztriában a ferroi, Magyarországon pedig a greenwichi meridiánt alkalmazzuk kezdőmeridiánként.

Magyarország valamennyi vetületi rendszere közötti transzformációt korábban már megoldottuk (Völgyesi- Tóth- Varga 1996). Az általunk kidolgozott szoftverrel igen pontos transzformáció hajtható végre a WGS84, illetve az X, Y, Z térbeli derékszögű rendszer, illetve az egyéb magyarországi vetületi rendszerek között (Völgyesi 1997). Amennyiben Ausztria és Magyarország vetületi rendszerei közötti transzformációt szeretnénk végrehajtani, a következő fontos feladat a WGS84 és az Ausztriában használatos vetületi rendszerek közötti transzformáció elkészítése.

3. A transzformáció gyakorlati megoldása

Az átszámításokat végző szoftver az 1. táblázatban látható vetületi rendszerek közötti transzformációkat végzi Ausztria és Magyarország területén a 2. táblázatban látható 213 különböző kombinációban.

A budapest önálló városi (BOV) és a magyarországi henger déli rendszer (HER) nem szerepel a táblázatban, mivel ennek a két magyarországi vetületi rendszernek az alkalmazási területe távol esik Ausztria területétől, ezért a

gyakorlatban fel sem merülhet az átszámítás szükségége.

1. táblázat.

Ausztriában és Magyarországon alkalmazott vetületi rendszerek

VTN	magyarországi vetületnélküli rendszer
BES	magyarországi Bessel ellipszoidi
SZT	budapesti sztereografikus vetületi rendszer
KST	magyarországi katonai sztereografikus vetületi rendszer
HER	magyarországi henger északi rendszer
HKR	magyarországi henger középső rendszer
ABE	Osztrák Bessel ellipszoidi
AGK	Osztrák Gauss-Krüger vetületi rendszer
IUG	magyarországi IUGG67 ellipszoidi
EOV	magyarországi egységes országos vetületi rendszer
KRA	magyarországi Kraszovszkij ellipszoidi
GAK	magyarországi Gauss-Krüger vetületi rendszer
WGS	magyarországi WGS84 ellipszoidi /GPS/
XYZ	geocentrikus térbeli derékszögű /GPS/
UTM	magyarországi Universal Transverse Mercator

A 2. táblázatból az átszámítások elvégezhetőségével és pontosságával kapcsolatos tudnivalók olvashatók ki. A különböző alapfelületekhez tartozó vetületi rendszereket a táblázatban kettős vonal választja el. Alapfelületen az ellipszoidot értjük, nem feledkezve meg arról, hogy azoknál a vetületi rendszereinknél, ahol kettős vetítéssel – simulógömb közvetítésével – térünk át az ellipszoidról a síkra, vagy a síkba fejthető felületre, a vetítés második lépésében a simulógömböt (Gauss-gömböt) nevezzük alapfelületnek. Ezeknek a simulógömbi koordinátáknak a fenti vetületi rendszerek közötti átszámítások esetén az egyszerű felhasználó szempontjából nincs jelentősége.

A sorok és az oszlopok metszésében található " + " jelek arra utalnak, hogy az adott két vetületi rendszer között szabatos, azaz zárt matematikai összefüggésekkel elvégezhető transzformáció lehetséges (Hazay 1964), (Varga 1981, 1986). Ebben az esetben az átszámított koordináták pontossága megegyezik az átszámítani kívánt koordináták pontosságával.

2. táblázat.

Transzformációs kapcsolatok Ausztria és Magyarország között

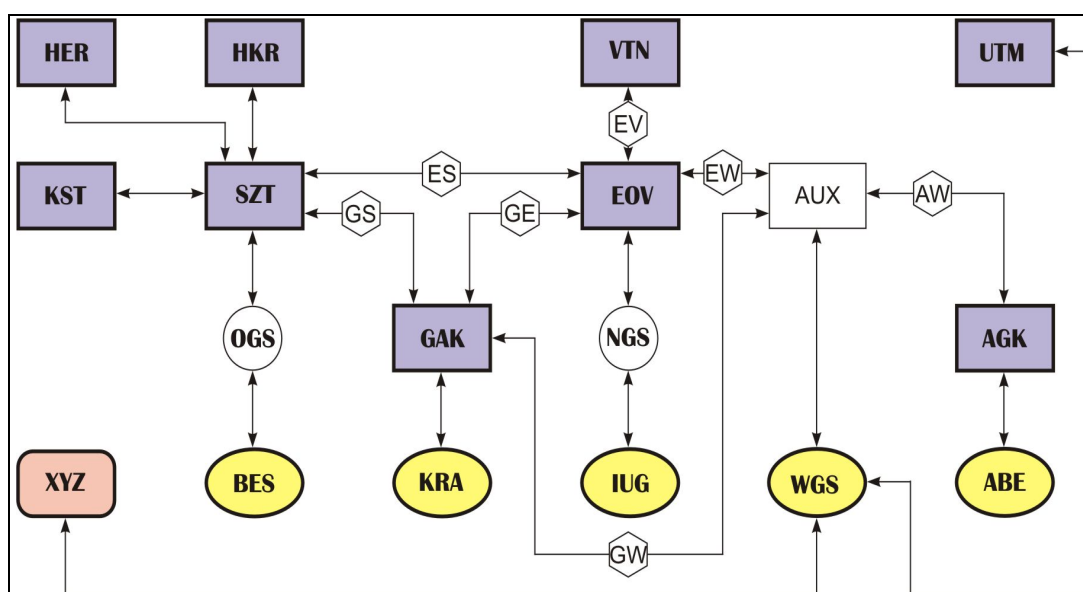
	VTN	BES	SZT	KST	HER	HKR	ABE	AGK	IUG	EOV	KRA	GAK	WGS	XYZ	UTM
VTN	-	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
BES	x	-	+	+	+	+	x	x	x	x	x	x	x	x	x
SZT	x	+	-	+	+	+	x	x	x	x	x	x	x	x	x
KST	x	+	+	-	+	+	x	x	x	x	x	x	x	x	x
HER	x	+	+	+	-	+	x	x	x	x	x	x	x	x	x
HKR	x	+	+	+	+	-	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ABE	x	x	x	x	x	x	-	+	x	x	x	x	x	x	x
AGK	x	x	x	x	x	x	+	!+!	x	x	x	x	x	x	x
IUG	x	x	x	x	x	x	x	x	-	+	x	x	x	x	x
EOV	x	x	x	x	x	x	x	x	+	-	x	x	x	x	x
KRA	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	-	+	x	x	x
GAK	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	+	!+!	x	x	x
WGS	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	-	+	+
XYZ	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	+	-	+
UTM	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	+	+	!+!

A 2. táblázatban a " x " jelek arra utalnak, hogy az adott két vetületi rendszer között zárt matematikai összefüggésekkel elvégezhető transzformáció nem lehetséges, az átszámítás véges fokszámú (legfeljebb ötödfokú) hatványpolinomok felhasználásával történik. Ebben az esetben tehát elvi okok miatt csupán közelítő pontosságú átszámításra van lehetőség (pl. síkkoordináták esetében általában csak $\approx \pm 10 - 20$ cm az átszámított koordináták pontossága).

A táblázatbeli " - " jelek arra figyelmeztetnek, hogy az azonos vetületi rendszerek közötti (önmagába irányuló) transzformációnak nincs értelme, kivéve a Gauss-Krüger és az UTM vetületi rendszert, ahol gyakran felmerül a szüksége a különböző sávok közötti átszámításnak. Ennek megfelelően a " !+! " jelölés azt mutatja, hogy a Gauss-Krüger és az UTM vetületi rendszeren belül a különböző vetületi sávok között szabatos átszámítás lehetséges.

1. ábra

Az átszámítások logikai vázlata



A 15 különböző vetületi rendszer közötti átszámítások logikai vázlata az 1. ábrán látható. A különböző rendszerek közötti transzformációs útvonalakat – és ezek irányát – nyilak jelölik. Látható, hogy az esetek jelentős részében két tetszőleges rendszer között csak más rendszerek közbeiktatásán keresztül lehetséges az átszámítás. Például ha az UTM és az EOV rendszerek között kívánunk átszámítani koordinátákat, akkor az UTM koordinátákat először a WGS84 ellipszoidra (WGS), majd egy ún. segéd vetületi rendszerre (AUX) kell átszámítani, és végül erről az AUX rendszerről kell az EOV rendszerre transzformálni. Ha az 1. ábrán valamely két rendszert közvetlen vonal köti össze, akkor közöttük koordináta módszerrel, azaz zárt matematikai összefüggések felhasználásával szabatos átszámítás végezhető; ha viszont az útvonal hatszöggel jelölt blokkon halad át, akkor a nyilak két oldalán lévő rendszer között, transzformációs polinomok alkalmazásával, csak közelítő pontosságú átszámítás lehetséges. Amennyiben két tetszőleges vetületi rendszer között több különböző útvonalon haladva is közlekedhetünk pl. WGS84 (WGS) ↔ Gauss-Krüger rendszer (GAK), akkor a program azt az útvonalat választja, mely menny pontossabb az átszámítás.

4. Transzformáció a WGS84 és az Osztrák Gauss-Krüger rendszer között

Az 1. ábrán látható bármely két vetületi rendszer esetében, amelyek hatszöggel jelölt blokkon keresztül kapcsolódnak össze, a transzformáció csatlakozó pontok felhasználásával hatvány-polinomok alkalmazásával lehetséges. Ez a helyzet az Osztrák Gauss-Krüger és a térbeli derékszögű geocentrikus XYZ illetve a WGS84 rendszerek között is. A térbeli derékszögű geocentrikus XYZ illetve a WGS84 rendszerek között zárt matematikai összefüggésekkel igen egyszerű transzformáció lehetséges, a GPS mindkét rendszerben képes szolgáltatni a koordinátákat.

Az Osztrák Gauss-Krüger (AGK) és a WGS84 rendszer közötti transzformáció elvégzéséhez 57 csatlakozó pontot használtunk fel Ausztria teljes területén meglehetősen egyenletes területi eloszlásban. A GPS-szel meghatározott WGS84 (illetve X, Y, Z térbeli derékszögű geocentrikus) koordináták az ITRF94 rendszerre, az 1993 epochára vonatkoztak.

A WGS84 és az Osztrák Gauss-Krüger rendszerek közötti transzformáció két lépésben hajtható végre. Először a WGS84-es koordinátákat átszámítjuk egy sík segédvetületi rendszerre (AUX), majd a második lépésben ezeket a segéd síkvetületi koordinátákat számítjuk át hatványpolinomok felhasználásával az Osztrák Gauss-Krüger rendszerre az 1. ábra logikájának megfelelően (Völgyesi, 2004). Az első lépés egyszerű, zárt matematikai összefüggésekkel számítható (Varga, 1986), a második lépés viszont hatványpolinomok felhasználásával történhet. Például az I. vetületi rendszer x, y koordinátái és a II. vetületi rendszer x', y' koordinátái közötti kapcsolat az

$$x' = A_0 + A_1x + A_2y + A_3x^2 + A_4xy + A_5y^2 + A_6x^3 + A_7x^2y + A_8xy^2 + A_9y^3 + A_{10}x^4 + A_{11}x^3y + A_{12}x^2y^2 + A_{13}xy^3 + A_{14}y^4 + A_{15}x^5 + A_{16}x^4y + A_{17}x^3y^2 + A_{18}x^2y^3 + A_{19}xy^4 + A_{20}y^5 + \dots \quad (1)$$

$$y' = B_0 + B_1x + B_2y + B_3x^2 + B_4xy + B_5y^2 + B_6x^3 + B_7x^2y + B_8xy^2 + B_9y^3 + B_{10}x^4 + B_{11}x^3y + B_{12}x^2y^2 + B_{13}xy^3 + B_{14}y^4 + B_{15}x^5 + B_{16}x^4y + B_{17}x^3y^2 + B_{18}x^2y^3 + B_{19}xy^4 + B_{20}y^5 + \dots$$

sorokkal adható meg. Az $A_0 - A_{20}$ és a $B_0 - B_{20}$ (összesen 42 db. együttható) az azonos pontok alapján, célszerűen kiegyenlítéssel határozható meg. Ilyenkor a kiválasztott azonos pontok helyétől, mennyiségétől, és a polinomok fokszámától függően mindegyik esetben kis mértékben eltérő koordinátákat kapunk az átszámítás során.

5. Az átszámítások pontossága

Azon vetületi rendszerek között, ahol zárt matematikai összefüggésekkel elvégezhető transzformáció lehetséges, az elvárásoknak megfelelően az átszámított koordináták pontossága megegyezik a kiinduló koordináták pontosságával – így a síkkoordináták legalább mm pontossággal, a földrajzi koordináták pedig 0.0001" pontossággal számíthatók át. Ezekre a kapcsolatokra a 2. táblázatban a " + " és a " !+! " jelek utalnak, illetve ezeket a rendszereket az 1. ábrán közvetlen vonal köti össze. Az összes többi esetben, amikor két tetszőleges vetületi rendszer között az átszámítás 1. ábrán látható útvonala a hatszögekkel jelölt blokkon (vagy blokkokon) keresztül vezet, az átszámított koordináták pontossága egyrészt attól függ, hogy a kérdéses vetületi rendszerek alaphálózatai mennyire pontosan illeszkednek egymáshoz; másrészt, hogy az adott transzformációs polinomok együtthatóit

mennyire sikerült jól meghatározni. Ebből egyébként az következik, hogy bizonyos vetületi rendszerek között akárhogyan is határozzuk meg a transzformációs polinomok együtthatóit, ha a két rendszer háromszögelési hálózatai a meghatározásuk idején elkövetett mérési, kiegyenlítési vagy egyéb hibák következtében nem illeszkednek pontosan egymáshoz, akkor a két vetületi rendszer között biztosan nem végezhető korlátlan pontosságú átszámítás. Másképpen fogalmazva, valamely két vetületi rendszer között legfeljebb olyan pontosságú átszámítás lehetséges, amilyen pontosságot a két rendszer között az alaphálózatok meghatározási hibái, illetve eltérései megengednek. Mindez természetesen nem azt jelenti, hogy nem kell különös gondot fordítani a transzformációs módszer kiválasztására, illetve – ha a hatvány-polinomos eljárást alkalmazzuk – az (1) összefüggésben szereplő együtthatók meghatározására.

A hatványpolinomos módszerrel elvégzett vetületi átszámítások pontosságának jellemzésére a közös pontok I rendszerbeli y_i, x_i ; valamint a II rendszerbeli y_i', x_i' koordinátái alapján meghatározzuk a transzformációs polinomok együtthatóit, majd ezek felhasználásával átszámítjuk az I rendszerbeli y_i, x_i koordinátákat a II rendszerbeli ty_i', tx_i' koordinátákká, és kiszámoljuk ezek alapján a

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= ty_i' - y_i' \\ \Delta x_i &= tx_i' - x_i'\end{aligned}\quad (2)$$

koordináta-különbségeket, majd az átszámítás pontosságát jellemző

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 + \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{n}} \quad (3)$$

középhiba értéket.

Kezdeti vizsgálataink során először arra próbáltunk választ keresni, hogy a gyakorlatban leginkább elterjedt két megoldási módszer: a Helmert-féle sík-transzformáció, illetve a hatványsoros módszer közül melyik használata előnyösebb. Megállapítottuk, hogy a Helmert-féle sík-transzformáció ugyan számítástechnikai szempontból egyszerűbben kezelhető, azonban az általa szolgáltatott pontosság az esetek döntő részében meg sem közelíti a hatványsoros megoldási módszer által szolgáltatott pontosságot.

Amennyiben a hatványsoros transzformációt választjuk, a következő fontos kérdés a hatványpolinom optimális fokszámának megállapítása. Egyszerű logikával gondolkodva arra a megállapításra juthatnánk, hogy a hatványpolinom fokszámának növelésével egyértelműen növelhető a vetületi átszámítások pontossága. Azonban a vizsgálataink során sikerült bizonyítani, hogy ötödfokú polinom alkalmazásával számíthatunk a legnagyobb pontosságra. Akár csökkentjük, akár tovább növeljük a fokszámot, az átszámított koordináták pontossága egyértelműen romlik: a fokszám csökkentésével jelentősen, a növelésével kismértékben romlik a pontosság (Völgyesi 1997).

Az ötödfokú hatványpolinomok együtthatóinak meghatározásához ugyan legalább 21 db. csatlakozó pont szükséges, azonban a tapasztalataink szerint a vetületi átszámítások pontossága tovább növelhető, ha ennél lényegesen több csatlakozó pontot használunk fel, és az ismeretlen polinom-együtthatók legvalószínűbb értékét kiegyenlítéssel határozzuk meg.

3. táblázat.

A magyarországi vetületi rendszerek közötti transzformációkat jellemző középhibák.

Magyarországi vetületi rendszerek	Csatlakozó pontok száma	Középhiba [m]
EOV - SZT	162	± 0.247
EOV - WGS	43	± 0.050
EOV - GAK	79	± 0.102
EOV - VTN	27	$\pm 0.046^*$
GAK - WGS	34	± 0.084
GAK - SZT	184	± 0.046

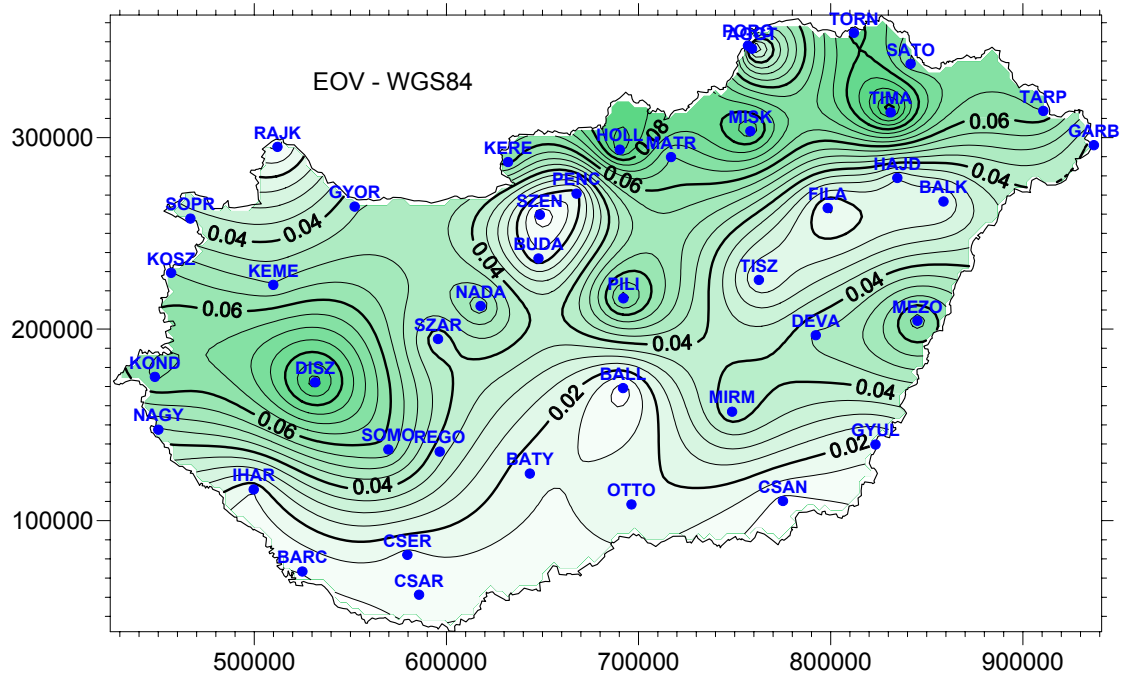
* csak Baranya területére érvényes

A 3. táblázatban a hatványpolinomos megoldás alkalmazásával az egyes magyarországi vetületi rendszerek közötti transzformációk (3) összefüggéssel számított középhiba értékei láthatók összefoglalva. Ezek a középhiba értékek teljes Magyarország területére érvényesek.

Az ausztriai és a magyarországi vetületi rendszerek közötti átszámítások szempontjából a két legfontosabb magyarországi eset az EOV – WGS84 és a Gauss-Krüger – WGS84 transzformáció. Erre a két transzformációra vonatkozóan a (3) összefüggés által meghatározott középhibák izovonalas térképe látható Magyarország területére [m]-ben a 2. és a 3. ábrán.

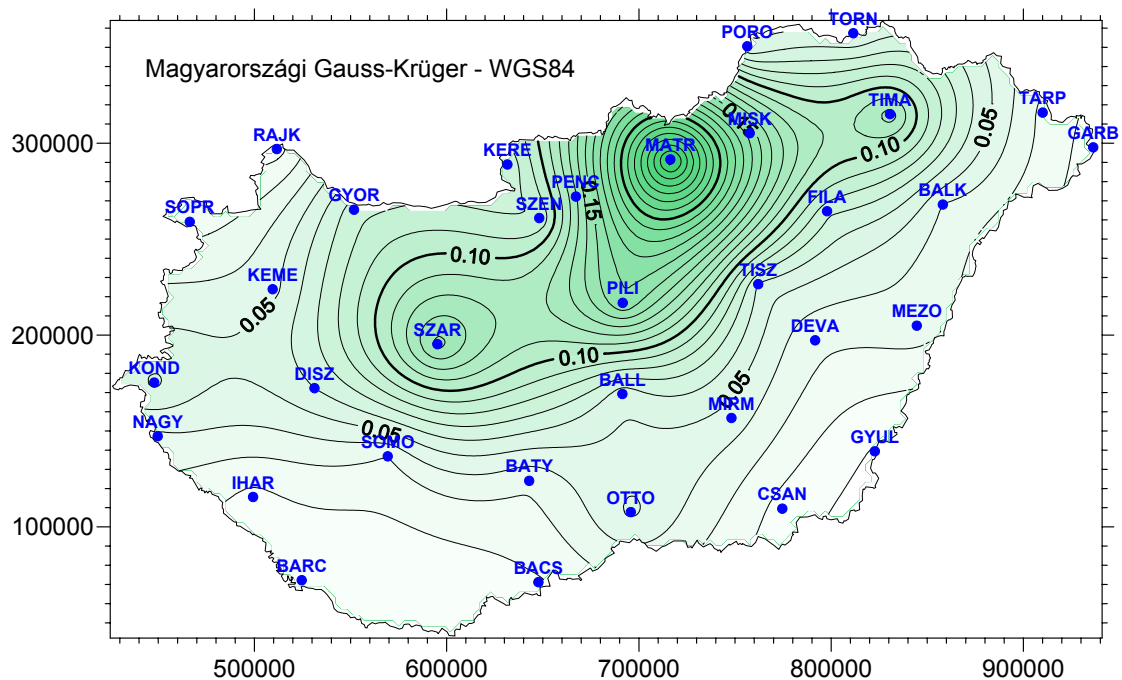
2. ábra.

A magyarországi EOVS és a WGS84 rendszer közötti transzformációt jellemző középhibák területi eloszlása (az EOVS koordináták [m]-ben).



3. ábra.

A magyarországi Gauss-Krüger és a WGS84 rendszer közötti transzformációt jellemző középhibák területi eloszlása (az EOVS koordináták [m]-ben).



4. táblázat.

**Csatlakozó pontok adatai és a transzformáció során adódó eltérések
a WGS84 és az Osztrák Gauss-Krüger rendszer között.**

Pont	WGS ϕ			WGS λ			M	y	x	Δy	Δx
AGGS	48	18	50.4875	15	25	18.6613	34	-67516.27	5353259.96	0.108	0.089
BRBG	48	09	12.1337	16	57	09.0607	34	46158.23	5335176.09	-0.059	-0.029
ERZK	47	37	19.9713	15	51	26.3264	34	-35694.95	5276044.70	-0.046	0.054
FORC	47	42	36.2970	16	19	57.6352	34	37.93	5285703.49	-0.006	0.171
FRAU	47	50	02.7530	16	55	45.5342	34	44705.24	5299662.90	0.028	-0.022
GRAZ	47	04	01.6613	15	29	36.5166	34	-63711.17	5214564.33	0.109	-0.128
GSST	47	21	10.1120	16	26	01.3435	34	7669.62	5245985.80	-0.045	-0.057
GUES	47	03	27.8724	16	19	23.0343	34	-694.88	5213177.22	0.139	0.083
HOLL	48	22	19.1416	15	41	18.2228	34	-47692.08	5359503.56	0.063	0.021
HUTB	48	39	16.3891	15	35	54.2554	34	-54056.22	5390985.21	-0.033	0.033
HUTS	48	39	04.5070	16	47	41.5321	34	34097.22	5390457.63	0.045	0.034
HZBG	47	58	23.4427	16	11	50.7279	34	-10059.38	5314965.46	0.032	-0.081
KULM	47	13	30.6242	15	45	31.2437	34	-43436.53	5231952.22	-0.030	-0.107
LUNZ	48	09	23.3279	15	14	49.0773	34	-80735.98	5335911.42	0.027	-0.051
OGDF	48	08	32.9258	15	32	05.0708	34	-59342.14	5334091.57	-0.011	-0.010
RADB	46	41	19.6409	15	59	03.0018	34	-26626.27	5172220.58	-0.068	-0.072
RETZ	48	46	18.1402	15	57	02.3199	34	-28038.88	5403822.25	-0.089	-0.069
RIEG	47	00	09.8905	15	56	04.1423	34	-30248.67	5207141.06	-0.078	0.072
SLAG	48	57	13.5499	14	59	49.7909	34	-97767.03	5424860.63	0.047	0.007
TIRK	47	52	25.7270	15	25	16.4614	34	-68143.48	5304313.00	-0.122	-0.014
WIEN	48	13	06.6600	16	22	21.7745	34	3015.43	5342236.65	0.011	-0.013
ALTF	46	32	46.7948	13	54	12.9237	31	43788.99	5156491.11	-0.014	-0.188
DAST	47	28	05.8729	13	37	33.3616	31	22114.29	5258872.59	0.023	0.025
EDLW	47	07	25.6186	12	49	53.3679	31	-38026.28	5220652.84	-0.045	-0.145
FRBS	46	31	30.4349	14	27	17.2148	31	86097.68	5154584.86	0.089	-0.043
GABL	47	04	54.5016	14	55	32.8747	31	120985.26	5217088.99	0.020	0.018
GERL	46	41	46.0008	13	55	07.7376	31	44833.70	5173149.81	0.036	-0.044
GOLL	47	37	17.0593	13	10	59.0883	31	-11238.59	5275866.13	-0.002	0.065
GRMS	46	55	03.2313	13	22	23.3694	31	3086.49	5197604.22	-0.038	0.008
HEMB	46	33	02.4909	14	39	49.5712	31	102084.72	5157676.03	-0.093	0.239
HOPY	48	01	11.9627	14	54	01.0039	31	116945.61	5321356.05	0.017	-0.034
HSHN	48	20	06.9015	13	29	48.4700	31	12178.81	5355240.03	0.002	0.089
HUST	47	20	17.4409	12	54	39.8266	31	-31858.49	5244452.82	-0.074	0.066
LOIB	46	26	21.4662	14	15	57.0824	31	71714.42	5144856.47	0.244	-0.171
MAGD	46	43	35.6117	14	25	39.6432	31	83707.96	5176948.40	0.152	0.110
MAYB	48	22	03.2856	13	55	48.8727	31	44286.93	5358992.52	-0.016	-0.157
MOAH	47	18	43.7248	12	23	15.4502	31	-71452.26	5241907.19	0.028	-0.027
OSWA	48	30	59.1276	14	37	31.0717	31	95506.78	5376176.07	-0.051	0.056
PLAN	47	23	35.6896	14	11	58.6859	31	65457.74	5250849.17	0.016	0.003
RADS	47	14	58.8890	13	33	26.0341	31	17003.73	5234551.21	-0.052	0.119
ROSF	47	37	10.5455	13	04	54.0729	31	-18860.94	5275684.92	0.038	0.002
SEBS	46	25	10.8161	14	31	37.2040	31	91815.55	5142944.32	-0.023	0.107
SNBG	48	42	46.6693	13	51	52.7576	31	39162.26	5397364.18	-0.008	-0.004
SOBO	46	39	57.9374	15	00	18.2400	31	127987.44	5171000.96	-0.088	-0.032
STAL	46	53	19.7973	12	12	01.5217	31	-86290.09	5195035.86	0.399	0.044
TILL	46	42	33.0799	12	38	09.0244	31	-53283.53	5174677.25	0.311	0.115
TPLZ	47	35	58.4826	13	59	24.2283	31	49442.89	5273635.03	0.023	-0.060
TREH	46	34	01.1494	13	15	19.1731	31	-5929.49	5158634.23	-0.336	0.138
VILA	46	36	13.3591	13	40	13.1426	31	25870.18	5162767.49	-0.255	-0.062
WANS	46	55	51.2220	12	47	57.9413	31	-40606.25	5199225.33	-0.025	-0.074
DMBL	47	23	40.9919	10	53	57.3530	28	42749.00	5250814.50	0.105	-0.085
FLEX	47	09	24.9360	10	09	52.0692	28	-12782.08	5224238.45	0.055	-0.102
KRAH	47	08	45.0588	10	37	37.9341	28	22313.19	5223033.66	0.014	0.142
KRAI	47	08	42.5221	10	37	30.2151	28	22150.84	5222954.73	0.008	0.151
NOSL	47	02	49.3280	11	28	34.4617	28	86870.77	5212637.46	-0.413	-0.112
OBGL	46	52	17.2075	11	01	35.6815	28	52873.67	5192718.16	-0.038	-0.072
PFAN	47	30	55.1768	09	47	03.7099	28	-41323.97	5264217.69	-0.032	0.006

± 0.152 m

Tapasztalataink szerint a hatványpolinomos módszerrel az elérhető pontosság a rendelkezésre álló azonos pontok számának növelésével némiképpen fokozható, de bizonyos határon túl az átszámítás pontossága az alapfelületek és a háromszögelési hálózatok különbözősége miatt már ezzel sem javítható. Bizonyos esetekben viszont javulás érhető el azzal, ha a transzformációs polinomok együtthatóit nem az egész ország teljes területére egyben határozzuk meg, hanem csupán kisebb részterületekre adunk meg azonos pontokat, és számítjuk ki a transzformációs polinomok együtthatóit. Természetesen ebben az esetben átszámításokat csak azon részterületen végezhetünk, amelyre a transzformációs polinomok együtthatóit meghatároztuk, és ekkor gondot okozhat a szomszédos területek összekapcsolása.

Következő kérdés az Osztrák Gauss-Krüger és a WGS84 (illetve az XYZ) rendszer közötti transzformáció pontossága. A Gauss-Krüger és a WGS84 közötti transzformáció végrehajtásához az (1) hatványpolinomokban szereplő együtthatók értékeit a 4. táblázatban látható 57 db. csatlakozó pont felhasználásával határoztuk meg Ausztria teljes területére. Ezeket az együtthatókat felhasználva transzformáltuk a WGS84-es koordinátákat a Gauss-Krüger rendszerre, majd a transzformált koordinátákat összehasonlítottuk az eredeti Gauss-Krüger koordinátákkal. A táblázat

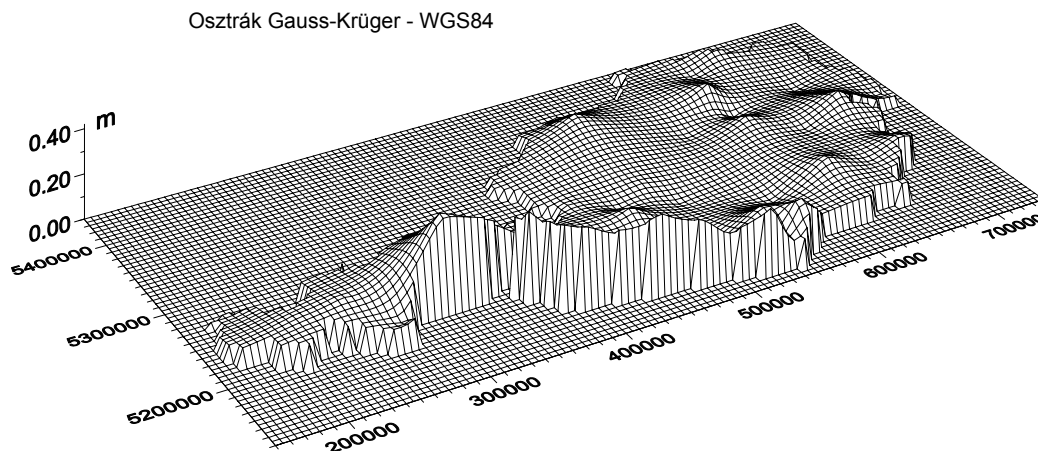
utolsó két oszlopában az eredeti és a transzformált Gauss-Krüger koordináták között a (2) összefüggéssel számított Δy és Δx különbségek láthatók az egyes csatlakozó pontokban. Az eltérések általában néhány cm körül jelentkeznek, de a legnagyobb eltérés is mindössze 4 dm. A 4. táblázat utolsó sorában a teljes transzformációt jellemző (3) összefüggéssel számított középhiba értéke szerepel, amely ± 15.2 cm. A 4. és az 5.

ábrán az eltérésekből számított $\sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$ értékek felszíni eloszlása és izovonalas képe látható Ausztria teljes területére.

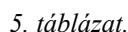
Ausztria és Magyarország közötti vetületi transzformációk pontossága a csatlakozó pontokban ismert koordináták felhasználásával ellenőrizhető. A közös országhatár néhányszor 10 km-es környezetében található csatlakozó pontokban a transzformált és az eredeti koordináták közötti eltérések az 5. táblázatban láthatók. A táblázatban szereplő pontok adatai alapján az Osztrák Gauss-Krüger és a WGS84 rendszer között a (3) összefüggéssel meghatározott középhiba ± 12.4 cm, a Magyarországi Gauss-Krüger és a WGS84 rendszer közötti középhiba ± 3.9 cm, a magyarországi EOVS és a WGS84 rendszer közötti középhiba pedig ± 4.5 cm.

4. ábra.

Az Osztrák Gauss-Krüger és a WGS84 rendszer közötti transzformációt jellemző középhibák felületi eloszlása (a Gauss-Krüger koordináták [m]-ben).



Az Osztrák Gauss-Krüger és a WGS84 rendszer közötti transzformációt jellemző középhibák területi eloszlása (a Gauss-Krüger koordináták [m]-ben).



**A vetületi transzformációk során adódó eltérések Ausztria és Magyarország közötti határ kör-
vezetében.**

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy az általunk kifejlesztett módszerrel és szoftverrel Ausztria és Magyarország között a közös országhatár néhányszor 10 km-es környezetében néhány cm pontossággal lehetséges a különböző vetületi koordináták átszámítása.

Bácsatyai L (1993): Átszámítások a budapesti sztereografikus és az osztrák Gauss-Krüger (M34) vetületi rendszer között. Geodézia és Kartográfia Vol. 45. No. 5, pp. 284-288.

Österreichische Zeitschrift für Vermessung &
Geoinformation. Vol. 83. No. 4, pp. 227-233.

Hazay I (1964): Vetülettan. Tankönyvkiadó, Budapest

Varga J (1981): Vetületi rendszereink közötti átszámítások új módjai. Budapest, Műszaki Doktori értekezés.

Varga J (1982): Átszámítás az egységes országos vetületi rendszer (EOV) és a korábbi vetületi rendszereink között. Geodézia és Kartográfia No. 1, pp. 30-34.

Varga J (1986): Alaphálózatok I. (Vetülettan).
Tankönyvkiadó, Budapest

Joó I (1975): Vetületi Szabályzat az egységes országos vetületi rendszer alkalmazására. MÉM OFTH, Budapest, p.49.

Völgyesi L, Tóth Gy, Varga J (1996): Conversion between Hungarian map projection systems. Periodica Polytechnica Civil Eng. Vol. 40, No. 1, pp. 73-83.

Völgyesi L (1997): Transformation of Hungarian Unified National and Gauss-Krüger Projection System into WGS84. Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, No. 4 (27), pp. 281-294.

Völgyesi L, Varga J (2001): Vetületi átszámítások Ausztria és Magyarország között GPS alkalmazásával. Geodézia és Kartográfia Vol. 53. No. 2, pp. 31-35.

Völgyesi L (2004): Conversion between Austrian and Hungarian map projection systems. Periodica Polytechnica Civ. Eng, Vol. 48, Nr. 1-2. pp. 73-88.

Conversions between Austrian and Hungarian map projection systems

Völgyesi L.

Summary

Conversion between Austrian and Hungarian map projection systems may be performed in two steps: first any kind of map projection systems should be transformed into WGS84 ellipsoidal coordinates in one country, and then from WGS84 ellipsoidal coordinates should be transformed into the desired system for the other country. A computer program has been developed to carry out all the possible transformation between the two countries. Using our method and software the transformation between Austrian and Hungarian map projection systems can be performed with a few centimeters accuracy for a few ten kilometers range of common border.

* * *

Völgyesi L (2006): [Vetületi átszámítások Ausztria és Magyarország között.](#) *Geodézia és Kartográfia*, Vol. 58, Nr. 12, pp. 10-19.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.
Web: <http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi> E-mail: volgyesi@eik.bme.hu