A KOLLOKÁCIÓ ALKALMAZÁSA A FIZIKAI GEODÉZIÁBAN.

A *legkisebb négyzetes (LKN) kollokáció* a földi nehézségi erőtér meghatározásának általános módszere, mely statisztikai megfontolásokon alapul. A módszert a fizikai geodéziában eredetileg H. Moritz alkalmazta 1963-ban nehézségi rendellenességek optimális interpolációjára / extrapolációjára. Az eljárást T. Krarup általánosította tetszőleges nehézségi erőteret jellemző mennyiségekre, 1969-ben. Az eljárás az 1970-es évektől általánosan elterjedt a fizikai geodéziában és még ma is sok esetben használják, többek között a geoidszámításban. Jó példa erre a svájci SwissTopo CHGeo2004 jelű legújabb nagypontosságú (±2-3 cm) geoid modellje, amely ezzel az eljárással készült.

Kovariancia függvény

A legkisebb négyzetes kollokáció eljárásának alapvető fogalma a *kovariancia függvény*. Ez a térben eloszló valamely mennyiségünk statisztikai jellemzőit adja meg. Az egyszerűség kedvéért azonban a továbbiakban feltételezzük, hogy az adott mennyiség csak két koordináta-változótól függ, tehát valamilyen felületen eloszló mennyiségről van szó. Például ilyen lehet a föld felszínére (tengerszintre) átszámított nehézségi rendellenességek kétváltozós $\Delta g(\varphi, \lambda)$ függvénye, ahol (φ, λ) az ellipszoidi (gömbi) földrajzi koordinátákat jelöli.

Mi a Δg-k *átlagos nagysága*? A kérdésre adott

$$M\{\Delta g\} = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g \, d\sigma = 0 \tag{1}$$

válasz ($M\{\cdot\}$ a σ egységgömbre (földfelszínre) vett átlagolás művelete) nem kielégítő, mert igen nagy vagy kicsi Δg-k is lehetnek zérus átlagúak, de nem mindegy, hogy egy adott területen a változásuk ±120 mGal vagy éppen ±0.2 mGal közötti. Egyébként is, ha nincs a Δg-k gömbfüggvény sorában $n = 0$ fokszámú tag, akkor az (1) egyenlet szerinti várható értékük mindenképpen zérus lesz. Tehát az átlagos nagyság jellemzésére a statisztikai *szórással* analóg mennyiségre lesz szükség. Ez a *szórásnégyzet* vagy *variancia*. Definíciója az alábbi:

$$\mathrm{var}\{\Delta g\} = M\{\Delta g^2\} = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g^2 \, d\sigma . \tag{2}$$

A variancia négyzetgyöke a szórás (angolul Root Mean Square, rms):

$$\mathrm{rms}\{\Delta g\} = \sqrt{\mathrm{var}\{\Delta g\}} = \sqrt{M\{\Delta g^2\}} .$$

Ennek értéke jól jellemzi a nehézségi rendellenességek átlagos nagyságát a teljes földfelszínre, amely kb. ±35 mGal.

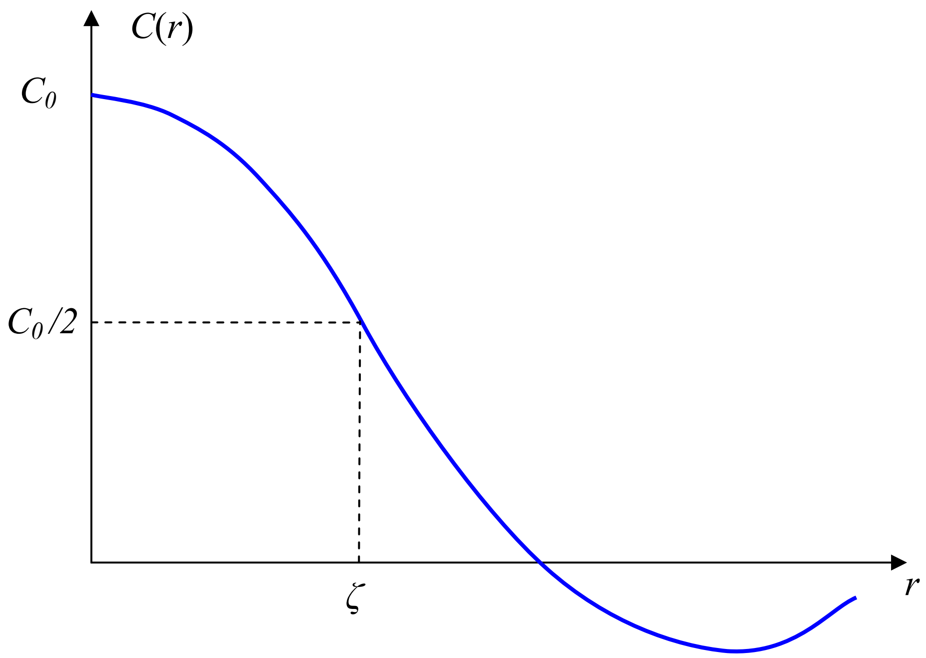
A variancia fogalmának általánosításával jutunk el a *kovariancia függvény* fogalmához. Ez a $\Delta g \cdot \Delta g'$ szorzat átlagos értéke a P és P' pontok r távolsága függvényében:

$$C^{\Delta g}(r) = \mathrm{cov}_r\{\Delta g\} = M\{\Delta g \cdot \Delta g'\}_{r=PP'} \qquad (3)$$

Rögtön látható, hogy az $r = 0$ értékű kovariancia a variancia:

$$C^{\Delta g}(0) = \mathrm{var}\{\Delta g\} = M\{\Delta g^2\}$$

A kovariancia Δg és Δg' statisztikai korrelációját méri, vagyis azt, hogy mennyire azonos előjelűek és nagyságúak egy adott r távolságban levő Δg értékek. Egy tipikus kovariancia függvény (például a Δg nehézségi rendellenességekből számítva) a következőképpen néz ki:



1. ábra Egy tipikus kovariancia függvény

Látható az ábráról az, hogy a kovariancia függvény maximális C_0 értékét az r = 0 helyen veszi fel, azután bizonyos távolságban zérussá válik, majd pedig viszonylag kis negatív értékekkel a zérus érték körül ingadozik. Azt a távolságot, ahol a kovariancia függvény a kezdeti variancia felére csökken, ζ *korrelációs hossz*nak nevezik. Ez egy fontos mennyiség, mert megmutatja, hogy mekkora adatterületre van szükség ahhoz, hogy bizonyos hatások statisztikailag kiegyenlítődjenek. Például a nehézségi rendellenességek kovariancia függvénye első zérushelye kb. 30°-os gömbi szögtávolságnál található, azután pedig pozitív és negatív értékekkel ingadozik a zérus érték körül.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából sokszor előnyös az, ha az adott mennyiség korrelációs hossza viszonylag kicsi, mert így csökkenteni lehet azt a területet, ahonnan az adott mennyiségre vonatkozó mérésekre szükség van. Ezt legtöbbször úgy tudjuk elérni, hogy a méréseinkből levonunk egy regionális *trend*et, és azután már csak a maradékkal foglalkozunk. Például a nehézségi rendellenességekből levonjuk azt a hatást, amely valamely geopotenciális modellből (pl. EGM96) számítható egy adott fok- és rendszámig. Ekkor ún. *lokális* kovariancia függvényt kapunk, amelyhez szokásos valamilyen elméleti vagy tapasztalati kovariancia *modellt* illeszteni. Például Hirvonen (1962) a következő tapasztalati kovariancia modellt határozta meg az Ohio környéki szabadlevegő (free-air) nehézségi rendellenességekből:

$$C(r) = \frac{C_0}{1+(r/d)^2}, \qquad C_0 = 337 \text{ mGal}^2, \qquad d = 40 \text{ km}.$$

Nehézségi rendellenességek interpolációja – LKN predikció

A Δg nehézségi rendellenességek predikciójának (általában a predikciónak) a célja: egy olyan F függvény megkeresése, amelynek segítségével tetszőleges P pontban meghatározható a Δg értéke a P_1, P_2, … P_n pontokban felvett (ismert) Δg értékek segítségével:

$$\Delta g_P = F(\Delta g_1, \Delta g_2, \ldots, \Delta g_n).$$

A gyakorlatban általában F lineáris függvény, és ekkor a lineáris predikció képlete

$$\Delta\tilde{g}_P = \alpha_1 \Delta g_1 + \ldots + \alpha_n \Delta g_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta g_i .$$

Az α_i együtthatók meghatározása lesz a feladatunk. Ezt a predikció ε_P hibájának minimalizálásával érhetjük el.

Predikció hibája

Az

$$\varepsilon_P = \Delta g_P - \Delta\tilde{g}_P = \Delta g_P - \sum_i \alpha_i \Delta g_i$$

predikciós hiba négyzete

$$\varepsilon_P^2 = (\Delta g_P - \Delta\tilde{g}_P)^2 = \left(\Delta g_P - \sum_i \alpha_i \Delta g_i \right)^2 = \Delta g_P^2 - 2\sum_i \alpha_i \Delta g_P \Delta g_i + \sum_i \sum_k \alpha_i \alpha_k \Delta g_i \Delta g_k ,$$

átlaga a vizsgált területre

$$\left.\begin{aligned} M\{\Delta g_i \Delta g_k\} &= C^{\Delta g}(r_{ik}) = C_{ik}^{gg}, \\ M\{\Delta g_P \Delta g_i\} &= C^{\Delta g}(r_{Pi}) = C_{Pi}^{gg}, \\ M\{\Delta g_P^2\} &= C^{\Delta g}(0) = C_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{a kovariancia függvényből}$$

a predikciós hiba $M\{\varepsilon_P^2\} = m_P^2$ varianciája pedig

$$m_P^2 = C_0 - 2\sum_i \alpha_i C_{Pi} + \sum_i \sum_k \alpha_i \alpha_k C_{ik} .$$

LKN predikció

A legkisebb négyzetek szerinti (LKN) optimális predikciót azok az α_i együtthatók adják, amelyek a predikciós hiba m_P^2 varianciáját minimalizálják. Így tehát a minimumfeltételt az összes α_i szerinti derivált eltűnése adja:

$$\frac{\partial m_P^2}{\partial \alpha_i} = -2C_{Pi} + 2\sum_k \alpha_k\, C_{ik} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

vagyis

$$\sum_k \alpha_k\, C_{ik} = C_{Pi}\,. \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ez n db. egyenlet n db. ismeretlen α_k együtthatóra, melynek a megoldása

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ik}^{(-1)} C_{Pi}\,,$$ ahol $C_{ik}^{(-1)}$ a C_{ik} inverzének elemeit jelöli.

A P pontbeli nehézségi rendellenességek LKN szerinti optimális predikciója (becslése) tehát végül a következő alakban írható fel:

$$\Delta\widetilde{g}_P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta g_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ik}^{(-1)}\, C_{Pi}\, \Delta g_k\,.$$

Általánosítsuk a fenti eredményt tetszőleges x mérési eredményre, és használjunk mátrixos jelölést. Jelölje x a mérési eredmények q elemű vektorát, és legyen $\hat{s}$ az interpolációs pontban a predikcióval meghatározott érték. Ekkor a predikció általános összefüggése szerint

$$\hat{s} = C_{sx}\, C_{xx}^{-1}\, x \tag{4}$$

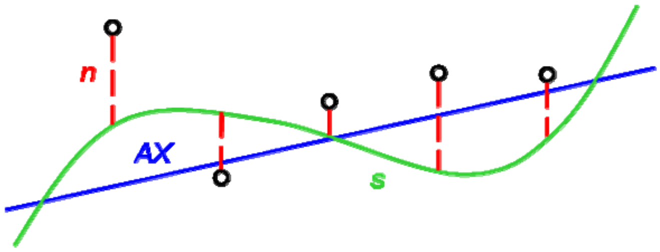
az optimális LKN szerinti becslés.

A legkisebb négyzetes predikcióra levezetett (4) összefüggés hasonló a hagyományos LKN szerinti II. csoportos kiegyenlítéshez. Ha a mérési hibákat (mérési „zaj”) n-nel jelöljük, az ismeretlenek (paraméterek) vektorát X-szel, valamint a P súlymátrix a mérési hibák D kovariancia mátrixának az inverzével egyenlő, akkor az optimális paraméter becslés $\hat{X}$ a következőképpen írható fel:

$$\hat{X} = (A^T D^{-1} A)^{-1}\, A^T D^{-1} x\,, \tag{5}$$

ahol x az ún. tisztatag vektor. Az (5) becslés úgy is felfogható, mint a mérési „zaj” optimális szűrése az $n^T D^{-1} n = \min$ feltétel mellett. A kiegyenlítés itt említett esetében a mérési hibák modellje (javítási egyenlet) a $-n = AX - x$ egyenlettel írható le. Ezt a modellt a predikcióval bővítve jutunk el a LKN kollokációhoz.

LKN kollokáció



A legkisebb négyzetes kollokáció modellje

A legkisebb négyzetes (LKN) kollokáció modellje szerint az x mérési eredmény három különböző részből tevődik össze (lásd az ábrát):

$$x = AX + s + n\,. \tag{6}$$

A fenti egyenletben AX a modell „trend” része, vagyis az X ismeretlen paraméterektől és az ismert A együttható mátrixtól függő lineáris tag. A nehézségi erőtér modellezése esetében ez gyakran a normál nehézségi erőtér, és/vagy valamilyen transzformációs paraméterek együttese. A második tag az s „jel”, amely nem csak a mérési pontokban létezik, hanem bármely vizsgált pontban, tehát folytonos függvény. A nehézségi erőtér esetében például s gyakran a T potenciálzavar vagy a Δg nehézségi rendellenességek függvénye. A mérési pontokban szokásos t-vel jelölni a jelet s helyett (diszkretizáció), tehát a fenti kifejezés helyett

$$x = AX + t + n \tag{7}$$

írható. Az összefüggések harmadik tagja (n) a mérési hibákat (mérési „zaj”) jelöli. Kombináljuk az összes véletlen jellegű mennyiséget egy m+q méretű

$$v = \begin{bmatrix} s \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_m & n_1 & n_2 \dots & n_q \end{bmatrix}$$

vektorba! Ez tartalmazza t-t, ha $m>q$ és s-nek első q komponense azonos t-vel:

$$s = \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix},$$

ahol u az m-q db. *predikálandó* jel (pre-dikció=előre megmondani). Ezek azok a pontok, ahol nincsen mérés, de szeretnénk megismerni a jel értékét. Ha a jel és a zaj korrelálatlanok, akkor v *kovariancia mátrix*a blokk-diagonális mátrix lesz:

$$C_{vv} = \begin{bmatrix} C_{ss} & 0 \\ 0 & C_{nn} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

ennek inverze pedig blokkonként vehető:

$$C_{vv}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{ss}^{-1} & 0 \\ 0 & C_{nn}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

A legkisebb négyzetes kollokáció alapgondolata szerint az X paraméterek optimális becslése és a nem mért pontokban az s jelre végzett predikció a jel és zaj egyszerre történő minimalizációjával érhető el:

$$v^T C_{vv}^{-1} v = s^T C_{ss}^{-1} s + n^T C_{nn}^{-1} n = \min . \tag{10}$$

Ez a minimalizációs feladat a Lagrange-féle multiplikátor módszerrel oldható meg (ennek részletei a Detrekői(1991): Kiegyenlítő számítások c. tankönyvében találhatók meg). Ennek felírásához vezessük be a következő jelöléseket (I az egységmátrix):

$$C_{ss} = \begin{bmatrix} C_{tt} & C_{tu} \\ C_{ut} & C_{uu} \end{bmatrix}, \qquad t = Us = [\underbrace{I}_{q} \;\; \underbrace{0}_{m-q}]\, s , \qquad C_{st} = \begin{bmatrix} C_{tt} \\ C_{ut} \end{bmatrix} = C_{ss} U^T .$$

A megoldás a paraméterekre a $C = C_{tt} + C_{nn}$ jelöléssel

$$X = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} x , \tag{11}$$

illetve a jelre végzett predikció a nem mért pontokban

$$s = C_{st} C^{-1} (x - AX) . \tag{12}$$

Figyeljük meg, hogy a (11)-es összefüggés analóg a II. csoportos kiegyenlítéssel, ha $C = D$, illetve a kapott (12)-es egyenlet analóg a predikcióval, ha $AX = 0$.

Kovariancia terjedés

A nehézségi erőtér meghatározásakor egymással függvénykapcsolatban álló mennyiségeket vizsgálunk. Például, ha ismerjük a T potenciálzavar függvényét, akkor ezzel függvénykapcsolatban állnak más nehézségi erőtér jellemzők, úgymint az N geoidmagasság, a Δg nehézségi rendellenességek, a (ξ, η) függővonal-elhajlások:

$$N = \frac{T}{\gamma}, \qquad \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T , \qquad \xi = \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta}, \quad \eta = -\frac{1}{\gamma r \sin \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} . \tag{13}$$

Ha ismerjük a T potenciálzavar (térbeli) kovariancia-függvényét, $K(r, r', \psi)$-t, akkor ebből kovariancia-terjedéssel levezethető bármely nehézségi erőtér paraméter kovariancia függvénye is. Például az N geoidmagasságok és Δg nehézségi rendellenességek kovariancia-függvénye

$$C_{PQ}^{Ng}(r_P, r'_Q, \psi_{PQ}) = \operatorname{cov}(N, \Delta g) = \frac{1}{\gamma}\left(-\frac{\partial K}{\partial r'} - \frac{2}{r'} K \right).$$

Ezek a kovariancia-függvények alapvető szerepet játszanak a nehézségi erőtér meghatározásában, amikor a legkisebb négyzetes kollokáció módszerét használjuk.

Alkalmazás geoidszámításra

A következő példában az N geoidmagasságokat kívánjuk meghatározni valamely területen a Δg nehézségi rendellenességek és a (ξ, η) függővonal-elhajlások segítségével. Az egyszerűség érdekében az alábbi feltételezésekkel élünk:

1. minden mérés a tengerszintre vonatkozik
2. nincsenek tömegek a geoid fölött
3. gömbi közelítéssel számoljuk a szükséges deriváltakat
4. geocentrikus (tömegközépponti) elhelyezésű ellipszoid referencia erőterét vesszük fel a meghatározáshoz (azaz nincsenek T gömbfüggvénysorában $n = 1$ fokú gömbfüggvény-együtthatók)

Legyenek adottak egyenként f db. mérési pontban a Δg, ξ, η értékek (összesen tehát $q = 3f$). Mivel a referencia (normál) nehézségi erőteret már levontuk a méréseinkből, ezért $AX = 0$. Így a kollokáció predikcióra vonatkozó képlete egyszerűbb lesz:

$$s = C_{st} C^{-1} x . \qquad (13)$$

Most $s = N(P)$, mivel a geoidmagasságokat szeretnénk meghatározni nem mért pontokban. A méréseink vektora (transzponáltja) tehát

$$x^T = [\Delta g_1 \ldots \Delta g_f \ \xi_1 \ldots \xi_f \ \eta_1 \ldots \eta_f],$$

és legyenek a méréseink m_g, m_ξ, m_η középhibákkal jellemzettek és korrelálatlanok. Ez esetben a P predikálandó pontban a C_{st} kereszt-kovariancia mátrix az alábbi lesz:

$$C_{st} = [C_{P1}^{Ng} \ldots C_{Pf}^{Ng} \ C_{P1}^{N\xi} \ldots C_{Pf}^{N\xi} \ C_{P1}^{N\eta} \ldots C_{Pf}^{N\eta}],$$

továbbá a C_{nn} „zaj” kovariancia mátrix átlós mátrixként írható fel

$$C_{nn} = \begin{bmatrix} m_g^2 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & m_g^2 & & & & 0 & & \\ & & & m_\xi^2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & m_\xi^2 & & & \\ & & 0 & & & & m_\eta^2 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & m_\eta^2 \end{bmatrix}.$$

A mérési pontok C_{tt} auto- és keresztkovariancia mátrixa így alakul:

$$C_{tt} = \begin{bmatrix} C_{11}^{gg} & \cdots & C_{1f}^{gg} & C_{11}^{g\xi} & \cdots & C_{1f}^{g\xi} & C_{11}^{g\eta} & \cdots & C_{1f}^{g\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{f1}^{gg} & \cdots & C_{ff}^{gg} & C_{f1}^{g\xi} & \cdots & C_{ff}^{g\xi} & C_{f1}^{g\eta} & \cdots & C_{ff}^{g\eta} \\ C_{11}^{\xi g} & \cdots & C_{1f}^{\xi g} & C_{11}^{\xi\xi} & \cdots & C_{1f}^{\xi\xi} & C_{11}^{\xi\eta} & \cdots & C_{1f}^{\xi\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{f1}^{\xi g} & \cdots & C_{ff}^{\xi g} & C_{f1}^{\xi\xi} & \cdots & C_{ff}^{\xi\xi} & C_{f1}^{\xi\eta} & \cdots & C_{ff}^{\xi\eta} \\ C_{11}^{\eta g} & \cdots & C_{1f}^{\eta g} & C_{11}^{\eta\xi} & \cdots & C_{1f}^{\eta\xi} & C_{11}^{\eta\eta} & \cdots & C_{1f}^{\eta\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{f1}^{\eta g} & \cdots & C_{ff}^{\eta g} & C_{f1}^{\eta\xi} & \cdots & C_{ff}^{\eta\xi} & C_{f1}^{\eta\eta} & \cdots & C_{ff}^{\eta\eta} \end{bmatrix}.$$

Ez a mátrix szimmetrikus, mivel a kereszt-kovarianciák is szimmetrikusak, pl. $C_{ij}^{g\xi} = C_{ij}^{\xi g} = C_{ji}^{g\xi} = C_{ji}^{\xi g}$. A gyakorlatban a fő numerikus probléma a (13)-as összefüggés szerint a $C = C_{tt} + C_{nn}$ mátrix invertálása. Például 5000 mérési pont esetében a C mátrix mérete 15000×15000, amelynek elemeit 4 bájtos egyszerű pontosságú számokként tárolva és a szimmetriát figyelembe véve is kb. 430 MB tárhelyre van szükség. Ezért a gyakorlatban úgy járunk el, hogy vagy a mátrix elemeit blokkonként diszkre írjuk és egyszerre csak egy blokkot tárolunk a memóriában, vagy pedig egy adott távolságon túl elhanyagoljuk a kovarianciákat, és így ritkán kitöltött (sparse) mátrixot kapunk.

A nehézségi erőtér LKN kollokációval történő meghatározásának gyakorlati eljárásai

A legkisebb négyzetes (LKN) kollokációval történő nehézségi erőtér modellezés gyakorlati megoldására számos eljárás született. Ezek közül most csak kettőt tekintünk át röviden.

Lépésenkénti kollokáció

Az eljárás alapgondolata az, hogy a méréseinket nem egyszerre, hanem egymás után, lépésenként visszük be a feldolgozás során. Így csökkenthető az invertálandó mátrixok mérete, illetve egy már kész megoldás becslése további mérési adatokkal „finomítható", javítható. Erre készült a C.C. Tscherning által 1974-ben FORTRAN77 programnyelven írt, és azóta is aktívan fejlesztett és karbantartott GEOCOL szoftver (www.gfy.ku.dk/~cct), amely a GRAVSOFT nehézségi erőtér modellező programcsomag része. A program a méréseket és a paramétereket ún. blokkokban tárolja és szükség esetén folyamatosan a számítógép lemezegységére írja. Alapértelmezésben blokkonként 239 paraméter és 5600 ismeretlen tárolható, és a program így maximum kb. 150 ezer ismeretlent képes feldolgozni, de ez a tömbök méretének növelésével tovább bővíthető.

Gyors kollokáció rács adatokra

Ez az eljárás kihasználja az abból fakadó előnyöket, hogy a mérések egy szabályos $(\Delta\varphi, \Delta\lambda)$ osztásközű rács pontjaiban adottak. Ebben az esetben az invertálandó kovariancia mátrix speciális ún. blokk Toeplitz/Toeplitz szerkezetű lesz, ami azt jelenti, hogy blokkonként Toeplitz szerkezetű mátrix. Egy mátrixot akkor nevezünk Toeplitz szerkezetűnek, ha az alábbi alakú:

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-1} & t_n \\ t_{-1} & t_0 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{-n} & t_{-n+1} & \cdots & t_{-1} & t_0 \end{bmatrix},$$

illetve szimmetrikus Toeplitz, ha $t_{-n} = t_n$. Egy szimmetrikus Toeplitz/Toeplitz struktúrájú mátrix invertálása hatékonyan megoldható a PCGM (prekonjugált gradiens módszer) segítségével, illetve FFT-t (gyors Fourier transzformáció) alkalmazva a számítás felgyorsítására (műveletigény: $N^2 \log N$)

Számítási lépések

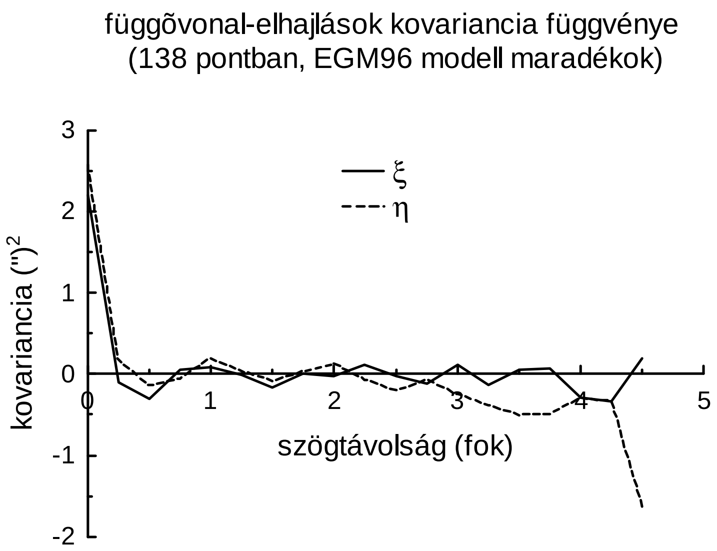
A nehézségi erőtér modellezésének gyakorlati számítási lépései tehát általában a következők (zárójelben a GRAVSOFT megfelelő programját adjuk meg):

1. Valamilyen geopotenciál modell és terepmodell figyelembevételével maradék rendellenességek számítása minden egyes típusú mérési adatra (GEOCOL, TC)
2. Miden egyes mérési sorozatra (adattípusonként) tapasztalati kovariancia függvények meghatározása (EMPCOV)
3. Analitikus kovariancia modell illesztése (COVFIT)
4. Kollokáció (és predikció) a megadott és interpolálandó pontokra, maradék geoidmagasságok számítása (GEOCOL)
5. A geopotenciál modell és indirekt hatás visszaállításával végleges megoldás *N*-re. (GCOMB)

Gyakorlati példák

1. Geoidszámítás 138 pontban mért asztrogeodéziai függővonal-elhajlás értékekből

A számításhoz alapként 138 pont asztrogeodéziai (ξ, η) függővonal-elhajlása szolgált. A mért függővonal-elhajlásokat GRS80-as rendszerbe átszámítás után az EGM96 geopotenciál modellből 360 fokig és rendig számított függővonal-elhajlásokkal redukáltuk. A maradék függővonal-elhajlások autokovariancia függvényei a következő ábrán láthatók:

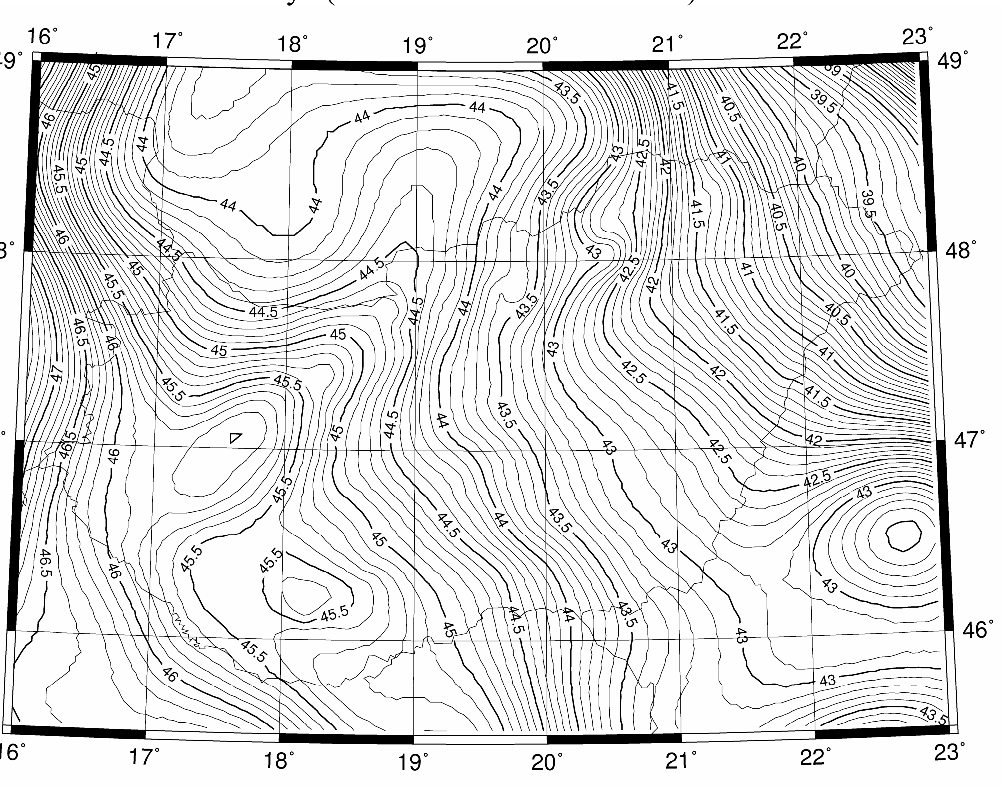


Ezután elkészítettük a GEOCOL program alábbi vezérlőállományát:

```
../gravsoft/geocol11 >deflgeo.out <<!
f
f f f f f f t
t f f f f
dvrestart
dvneq
5
2
4
-0.223395 112.17 360 f f t f
0 4 -0.001285
```

```
../fcol/egm96.edg
1 2 3 1 4 6 8 26 -1 258 f f f t f f t f f t
./egm96.dv
25
0.5
0.2
t f
f f
t f f
45.525 49 16 22.9583333 0.025 0.0416667 11 -1 0.0 f t f
deflgeo.dn
t
!
```

A kollokáció eredménye (a modell visszaállítása után):

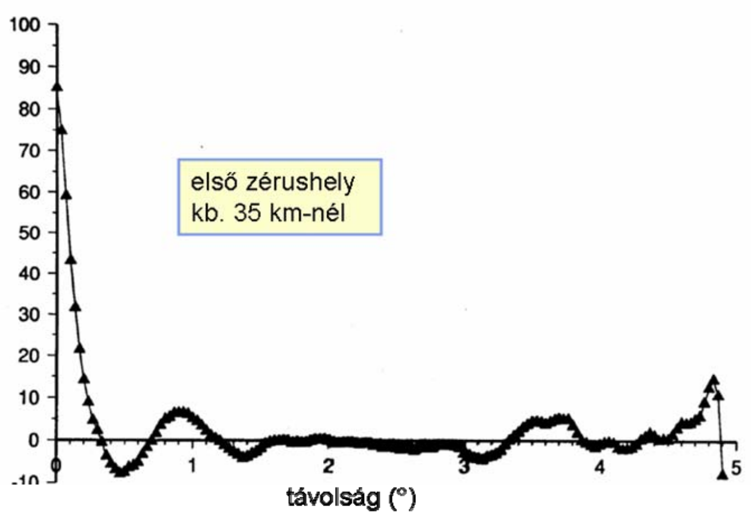


A megoldást ellenőriztük az OGPS 340 szintezett magassággal rendelkező pontján és a geoidmagasságok ±14 cm-es szórással illeszkedtek. Ennél pontosabb megoldást érhetünk el akkor, ha nem csak függővonal-elhajlás adatokat vonunk be a geoidmeghatározásba, hanem nehézségi rendellenességeket és Eötvös-inga méréseket is.

2. Geoidszámítás gyors kollokáció módszerével (13089 nehézségi rendellenesség felhasználásával Magyarország területére)

Ehhez a megoldáshoz 13089 átlag nehézségi rendellenességet használtunk fel, amelyek 1,5’ × 2,5’ felbontású rácson álltak a rendelkezésünkre. Az alkalmazott geopotenciális modell az EGM96-os geopotenciális modell volt, amely 360 fokig és rendig tartalmazta az együtthatókat. Ezután az adatokat redukálva a modellel meghatároztuk a maradék nehézségi rendellenességek kovariancia függvényét. A lokális tapasztalati kovariancia függvény ábráján látható, hogy az első zérushely kb. 35 km-nél található, tehát a geopotenciális modell alkalmazása valóban jelentősen lecsökkentette az adatok korrelációs hosszát.

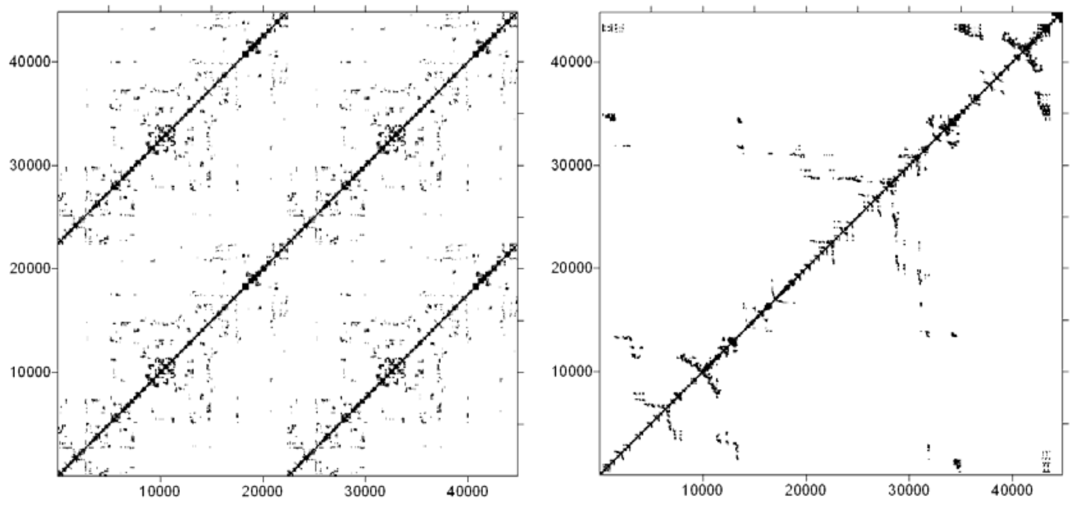
A megoldáshoz felhasználtuk a magassági adatok 1 km × 1 km-es rácsra vonatkozó adatbázisát. Az elkészült geoidmegoldást ellenőrizve 43 GPS/szintezési ponton az eltérések szórása ± 9 cm-es volt.



Az EGM96-os geopotenciális modellel redukált 13089 átlag nehézségi rendellenességből számított lokális tapasztalati kovariancia függvény Magyarország területére. A 4.5°-os gömbi szögtávolságon túli rész esetében a nagyobb ingadozások a becsléshez felhasználható adatpont párok számának csökkenése miatt jelentkeznek

3. Nehézségi rendellenességek számítása Eötvös-inga mérésekből (44 818 gradiens mérésből 45000 km^2 területen)

Ez a megoldás teljesen kitöltött kovariancia mátrix esetében kb. 15 GB tárhelyet igényelne, viszont ritka mátrixként a tárigény kb. 300 MB-ra csökkenthető. Az alábbiakban látható a ritkán kitöltött mátrix átrendezés előtt és után:

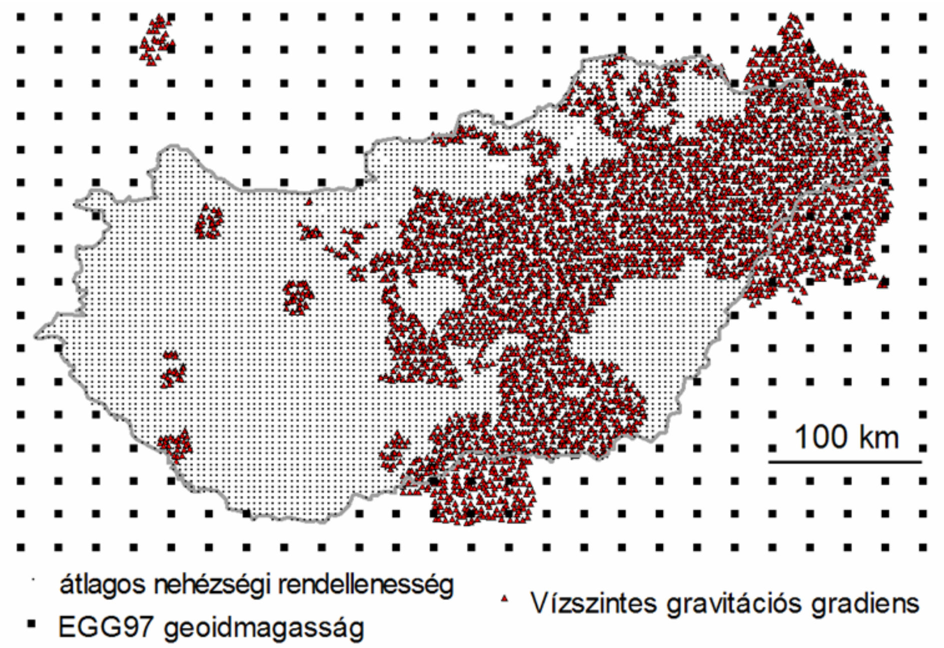


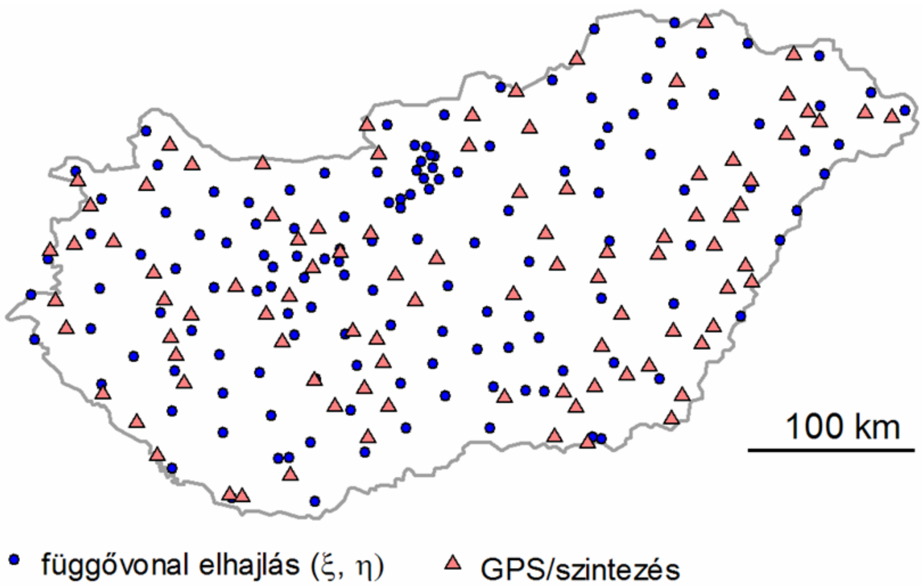
A ritka kovariancia mátrix nemzérus elemei átrendezés előtt (a nemzérus elemek száma 4 049 268) és az AMD (approximate minimum degree) átrendezés után

4. HGTUB2007 magyarországi kvázigeoid megoldás

Ez egy illesztett asztrogravimetriai, gradiometriai, GPS/szintezési kvázigeoid megoldás LKN kollokáció segítségével. A felhasznált geopotenciális modell a GPM98CR / GGM02CB geopotenciális modell volt 720 fokig és rendig. A felhasznált további adatok a következők voltak:

- 6678 átlag szabadlevegő nehézségi rendellenesség 2’×3’ méretű blokkokra
- 276 (2 × 138) asztrogeodéziai függővonal elhajlás
- 7452 Eötvös-inga nehézségi gradiens összetevő
- 95 GPS/szintezési pont
- 267 EGG97 kvázigeoid magasság (az országon kívül)
- DTM adatok: SRTM3

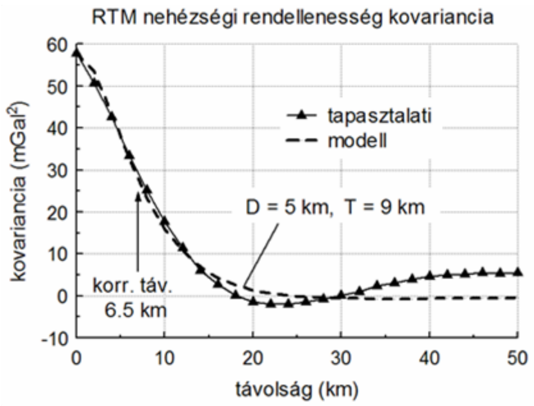


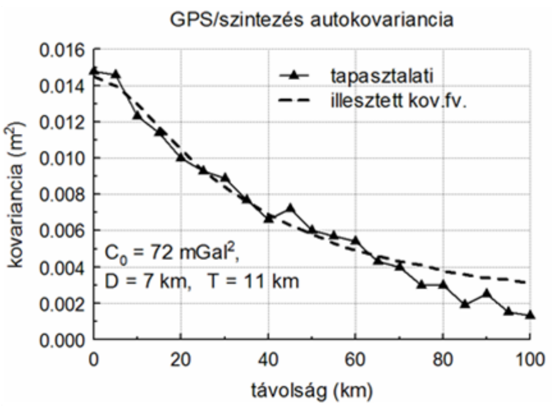


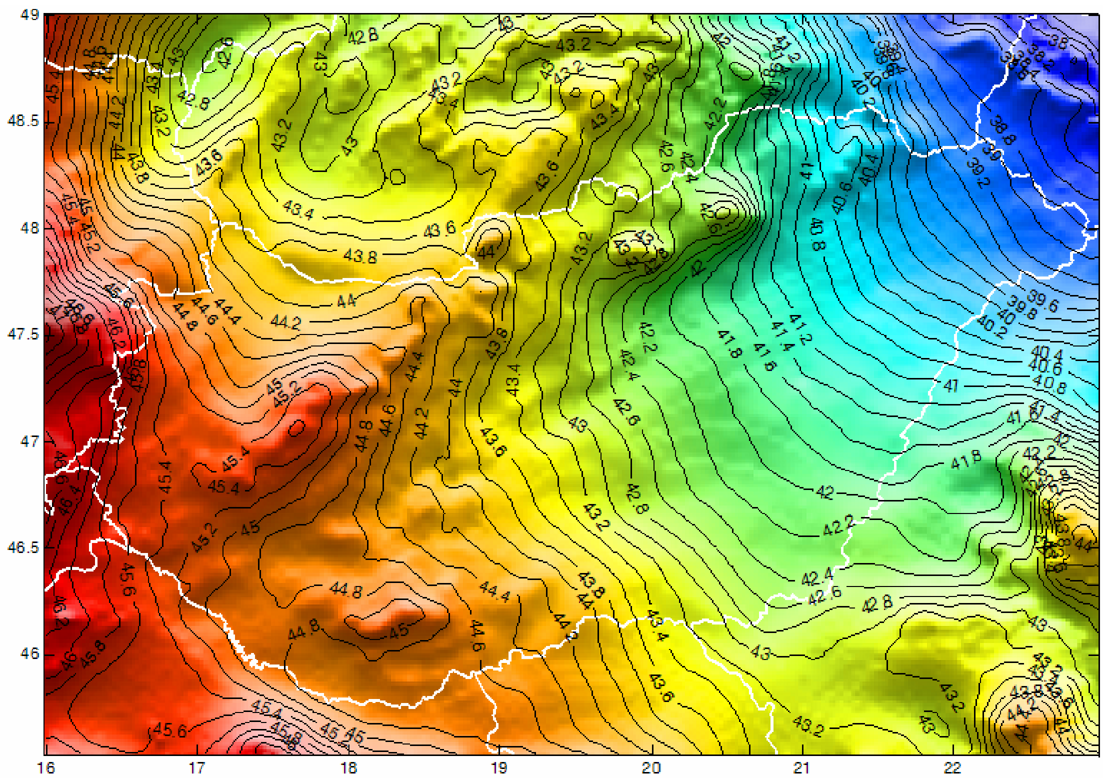
A kovariancia függvény modellezéséhez a Forsberg (1987) által kifejlesztett térbeli logaritmikus kovariancia modellt használtuk

$$C(\Delta g^{h_1}, \Delta g^{h_2}) = -C_0 \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \ln\left(D_i + h_1 + h_2 + \sqrt{s^2 + (D_i + h_1 + h_2)^2} \right),$$

amely a pontok h_1 , h_2 magasságaitól, s vízszintes távolságától függ. C_0 a nehézségi rendellenességek varianciája, az α_i -k pedig egész számok (1, –3, 3, –1), továbbá $D_i = D + (i-1)T$. A modell α_i és D_i állandóin keresztül végső soron csak a következő három szabadon választható paramétertől függ: C_0, D és T. A adatok alapján meghatározott lokális tapasztalati és modell kovariancia függvények, valamint az elkészült geoidmegoldás az alábbi ábrákon láthatók.







Megemlítjük végül azt az asztrogeodéziai és GPS/szintezési megoldást, amely már a legújabb nagy felbontású EGM2008-as geopotenciális modellel készült a BME

Általános és Felsőgeodézia Tanszékén 2009-ben, Szűcs Eszter diplomamunkája keretében.

Jegyzet a „Fizikai geodézia” c. tárgy hallgatói számára Budapest, 2000-2011.	**Dr. Tóth Gyula** egy. docens