Fizikai geodézia és gravimetria / 16.

SPEKTRÁLIS MÓDSZEREK A FIZIKAI GEODÉZIÁBAN.

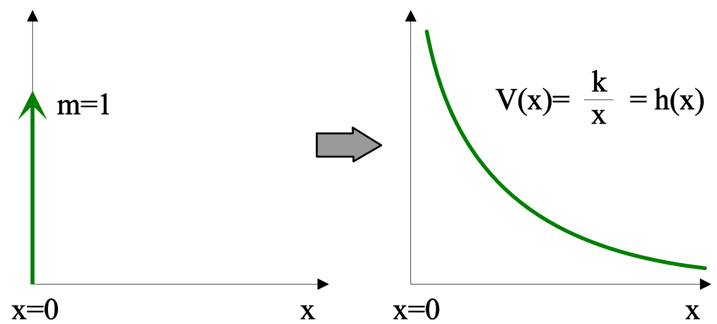
A fizikai geodéziában előforduló számos feladat megoldása megkívánja nagymennyiségű adat elemzését és felhasználását. Az FFT-n (gyors Fourier transzformáció, angolul Fast Fourier Transform) alapuló, úgynevezett **spektrális módszerek** biztosítják ezeknek az adatoknak a hatékony kezelését. A spektrális módszerek elterjedését leginkább a számítási igények megnövekedése indokolta és az, hogy ezek igen hatékonyan oldják meg az úgynevezett *konvolúciós integrálok* kiszámítását.

1. Konvolúciós integrálok a fizikai geodéziában

A konvolúciós integrál egy sajátos szerkezetű integrál, amely nem csak a fizikai geodéziában, de a földtudományok, a fizika, a matematika, a jelfeldolgozás, de más tudományágak területén is igen gyakran előfordul. A konvolúciós integrál fogalma a legegyszerűbben az alábbi egyváltozós problémán keresztül világosítható meg.

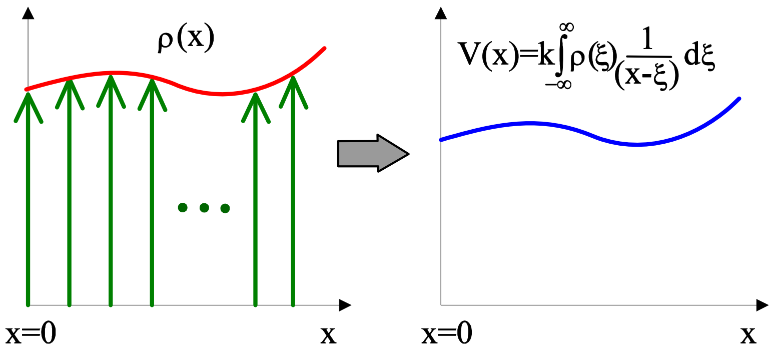
A) vonalmenti tömegeloszlás

Ahhoz, hogy egy, a koordináta-rendszer x tengelye mentén eloszló inhomogén sűrűségű vonalszerű tömeg tömegvonzási potenciálját kiszámíthassuk, bontsuk fel a tömegünket tömegelemekre és vizsgáljuk meg egyetlen ilyen tömegelem potenciálját. Ez az alábbi ábrán látható, ahol a jobb oldali ábrán az origóba helyezett egységnyi tömegű tömegpont által keltett potenciált láthatjuk (k a Newton-féle tömegvonzási állandó).



B) szuperpozíció elve:

A szuperpozíció elve alapján a testet tömegpontok összegére bontjuk, és a teljes tömegvonzási potenciál kiszámításához az egyes (különböző $\rho(x)$ sűrűségértékekhez tartozó, ezért azzal arányosan különböző nagyságú) tömegpontok által keltett részpotenciálokat összegezzük. A folytonos esetre történő határátmenettel az összegzés helyett integrálunk, és megkapjuk a tömegvonzási potenciál konvolúciós integrálját, ami a jobb oldali ábrán látható:



Ha a konstanst elhagyjuk és általánosítunk, eljutunk az alábbi egydimenziós *konvolúciós integrál*hoz:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, h(x-\xi)\, d\xi \ .$$

A fenti integrál integrandusában egy tetszőleges függvény (a $\rho(x)$ függvény) és az ún. *magfüggvény* (a $h(x)$ függvény) eltolt és az origóra tükrözött változatának, a $h(x–\xi)$-nek a szorzata szerepel. Minden ilyen szerkezetű integrált (egyváltozós) konvolúciós integrálnak nevezünk.

Ha vektorváltozókkal dolgozunk, vagyis x helyett több független változónk van, akkor többváltozós konvolúcióról beszélhetünk. Egy ilyenre példa két változó esetében a Stokes-integrál közelítő alakja, ha azt vetületi síkkoordinátákkal írjuk fel:

$$N(x,y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint \Delta g(x',y') \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]^{1/2}}\, dx'dy' ,$$

illetve három változó esetén példa lehet az alábbi térbeli konvolúció (a jól ismert Newton-integrál):

$$V(\mathbf{r}) = k \iiint_{\text{Föld}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv \qquad\qquad \mathbf{r} = (x, y, z), \qquad \mathbf{r}' = (x', y', z')$$

A továbbiakban a konvolúció jelölésére az alábbi, a szakirodalomban általánosan elterjedt jelölést fogjuk használni:

$$V(x) = u(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) h(x-\xi) d\xi \, .$$

2. Fourier-sor a fizikai geodéziában

A spektrális módszerek alapgondolatának megértéséhez fel kell idéznünk a matematikában megismert Fourier-sor fogalmát. Ezt a számunkra ismerősebb gömbfüggvénysor segítségével tesszük meg. A Fourier-sorból tudjuk majd levezetni a folytonos, illetve diszkrét Fourier-transzformációt, és így értjük majd meg a transzformáció működését, hatását.

Gömbfüggvénysor

A fizikai geodéziában már sokszor találkoztunk gömbfüggvénysorokkal. Ezek tulajdonképpen speciális esetei az egyváltozós Fourier-soroknak. Ezt az alábbiak szerint könnyen be is tudjuk látni.

Írjuk fel a gömbfüggvénysort egy gömbfelületen adott tetszőleges $f(\vartheta,\lambda)$ függvényre (itt és a továbbiakban persze feltételezzük azt, hogy a függvény gömbfüggvénysorba fejthető). Az összegzéseket felcserélhetjük a sor tagjainak átrendezésével, és ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} f(\vartheta,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\cos\vartheta) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\cos\vartheta) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(A_m(\vartheta)\cos m\lambda + B_m(\vartheta)\sin m\lambda\right) \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{Bmatrix} A_m(\vartheta) \\ B_m(\vartheta) \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} P_{nm}(\cos\vartheta) \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}$$

a ϑ gömbi pólustávolságtól, a Legendre függvényektől és a C_{nm}, S_{nm}, konstansoktól függő együtthatók. Most már világos, hogy a gömbfüggvénysorunk egy Fourier-sor lett a λ változó szerint:

$$f_{\vartheta}(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(A_m(\vartheta)\cos m\lambda + B_m(\vartheta)\sin m\lambda\right).$$

Ez az átalakítás nem csak azért volt hasznos, mert beláttuk, hogy a gömbfüggvénysor igazából egyváltozós Fourier-sor, de azért is, mert ez a felírása lehetőséget nyújt majd a sor FFT-vel (gyors Fourier-transzformációval) történő igen hatékony összegzésére. Az $f(\vartheta,\lambda)$ függvényt ugyanis igen gyakran egy egyenlő osztásközű rács pontjaiban szeretnénk előállítani. Az 5’ × 5’-es osztásközű rács pontjainak száma a teljes földfelszínre: 9 331 200, a legújabb EGM2008-as modell pedig 4 802 666 együtthatót tartalmaz, így könnyen belátható, hogy FFT nélkül a gömbfüggvénysor segítségével a függvény kiszámításához $4{,}5\cdot10^{13}$ szorzás és összeadás (45 TFLOPS) kellene, ami még jelenleg (2011) is csak szuperszámítógépek számára elérhető teljesítményt jelent.

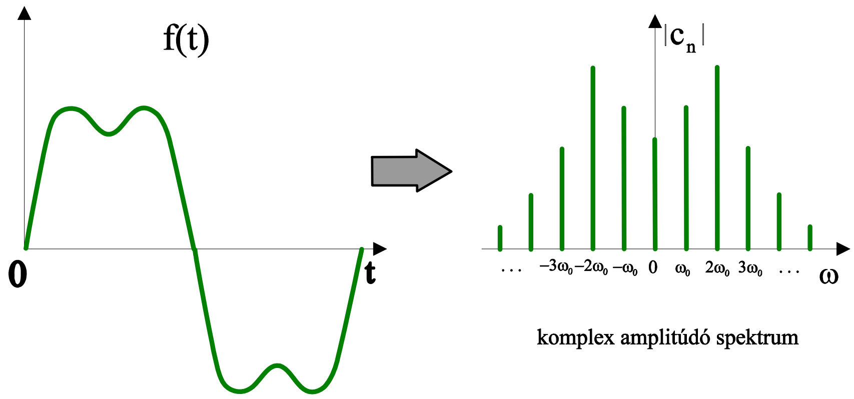
Általában véve egy tetszőleges (bizonyos feltételeknek megfelelő) $f(t)$ periódikus függvény egyváltozós Fourier-sorba fejthető az a_n és b_n együtthatókkal:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t\right),$$

ahol

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

a körfrekvencia (egysége lehet rad/sec, ha a t időváltozó, vagy rad/km, ha t térváltozó), és T a függvény periódusa.



Az egyszerűbb jelölés érdekében a sor komplex alakban írjuk fel. Mivel a jól ismert Euler összefüggés szerint $e^{in\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + i \sin n\omega_0 t$, azaz a komplex expon

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

$$c_{\pm n} = \frac{1}{2}\left(a_n \mp i b_n\right)$$

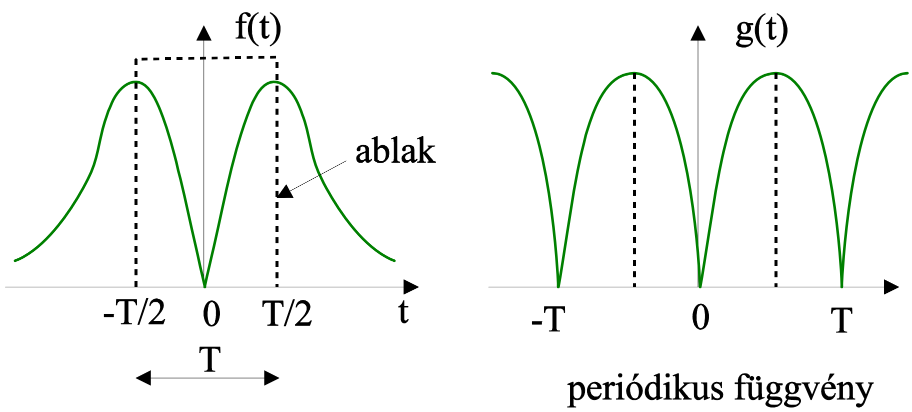
írható, azért

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt \, .$$

A fenti ábra mutatja egy periódikus függvény és Fourier-sor segítségével hozzá rendelhető komplex együttható-sorozat (komplex amplitúdó spektrum) kapcsolatát.

3. Folytonos Fourier-transzformáció (CFT)

A folytonos Fourier-transzformációt a következő határátmenettel kapjuk meg a periódikus függvény Fourier-sorából. Egy *f*(*t*) nemperiódikus függvényből egy T szélességű, az origóra szimmetrikus „ablakkal" vágjunk ki egy részt és ezt a részt tegyük mellé mindkét irányban végtelen sokszor. Így egy $g(t)$ periódikus függvényt kapunk, amelynek Fourier-sorából a $T \to \infty$ határátmenettel megkapjuk az ábrán látható módon az eredeti *f*(*t*) nemperiódikus függvény **Fourier-transzformáltját**.

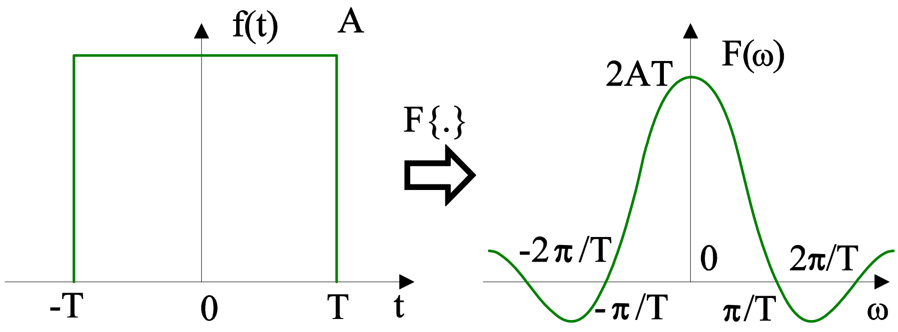


A megfelelő határátmenetet elvégezve a következő integrálokat kapjuk (a diszkrét frekvencia változóból folyamatos (komplex) ω körfrekvencia változó lesz a határátmenet során):

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \mathbf{F}\{f(t)\}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \mathbf{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

Könnyen belátható az, hogy egy **páros** *f(t)* függvény *F(ω)* Fourier-transzformáltja **valós** lesz. Ezt illusztrálja a következő ábra, ahol az origóra szimmetrikus négyszögimpulzus Fourier-transzformáltját láthatjuk, ami egy csökkenő amplitúdójú szinuszhullám, a sinc(ω) (szinusz kardinálisz) függvény.



sinc(ω) függvény

A Fourier-transzformáció fontos tulajdonságai

Az alkalmazások szempontjából fontosak a Fourier-transzformáció alábbi nevezetes tulajdonságai:

Linearitás

$$\mathbf{F}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha\mathbf{F}\{f(t)\}+\beta\mathbf{F}\{g(t)\}=\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)$$

Szavakban kifejezve ez azt jelenti, hogy a transzformáció a lineáris tér műveleteivel (skalárral való szorzás és összeadás) felcserélhető.

Eltolás (fázis változás)

$$\mathbf{F}\{f(t-t_0)\}=\mathbf{F}\{f(t)\}e^{-i\omega t_0}=F(\omega)\, e^{-i\omega t_0}$$

A tétel szerint a függvénynek az idő-tartományban való eltolása a frekvencia tartományban fázis változást indukál (a komplex síkon minden vektor ugyanazzal a fázisszöggel fordul el).

Konvolúciótétel

$$g(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)d\tau \quad \text{miatt}$$

$$F\{g(t)\} = G(\omega) = F\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau) d\tau \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau(h(t-\tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau$$

$$= H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau = H(\omega)\, F(\omega)$$

tehát

$$\mathbf{F}\{f(t) * h(t)\} = F(\omega)\, H(\omega)\,.$$

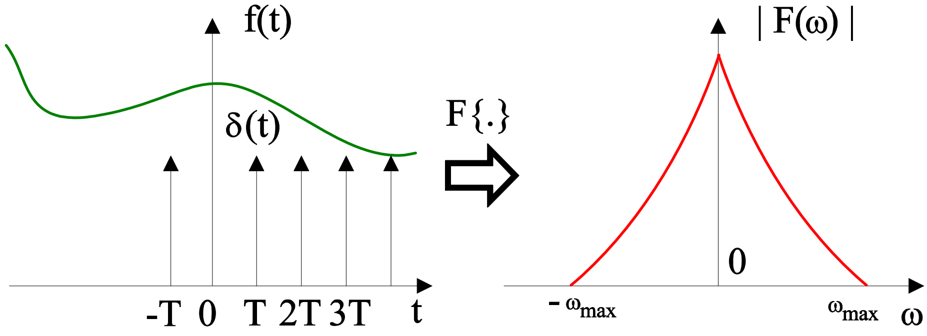
Szavakban megfogalmazva, a **konvolúció Fourier-transzformáltja a tényező függvények Fourier-transzformáltjainak szorzata**. A mi szempontunkból a transzformációnak ez a legfontosabb tulajdonsága. Előnyére a következő analógia világít rá.

Analógia: A szorzat logaritmusa a tényezők logaritmusainak összege. Egy “költséges” műveletet, a szorzást így helyettesítünk egy “olcsóbb” művelettel, az összeadással, feltéve, hogy a logaritmus és inverz logaritmus meghatározása “olcsó” műveletnek számít (például kikeresés a logaritmus táblázatból).

A konvolúció meghatározása, ami “drága” műveletnek számít (miért?) visszavezethető egy “olcsó” műveletre, két függvény szorzatára, feltéve, hogy a Fourier-transzformáció és inverze is “olcsó” műveletnek számít.

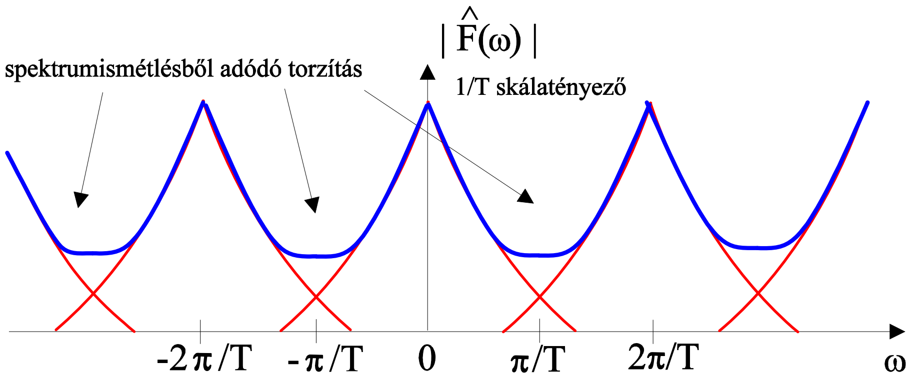
4. Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

A valóságban sosem rendelkezünk végtelen számú adattal, így a transzformálandó adataink száma véges. Leggyakrabban az a helyzet, hogy a mérendő mennyiségből egyenlő közben elhelyezkedő abszcissza értékekben meghatározott, ún. mintavételezett (függvény)értékekkel rendelkezünk.



A) Mintavételezés hatása

A mintavételezés hatása az idő (t) tartományban az ún Dirac-féle impulzussorozattal való szorzásnak felel meg. Tehát a mintavételezett függvény Fourier-transzformáltja (az ‘inverz’ konvolúció tétel, az eredeti tétel megfordítottja szerint) az eredeti folytonos függvénynek az impulzussorozat Fourier-transzformáltjával vett konvolúciója lesz. Az impulzussorozat Fourier-transzformáltja maga is egy impulzussorozat, ezért az ezzel vett konvolúció azt jelenti, hogy a folytonos függvény transzformáltjainak (átskálázott) másolatait a mintavételezési (kör)frekvenciának megfelelő közönként egymás mellé helyezzük és összeadjuk. Az ábrán látható, hogy ennek a műveletnek a hatására a transzformált egyrészt maga is periódikus lesz, másrészt pedig az egyes másolatok a széleken általában egymásba lógnak, átlapolódnak, és ezeken a helyeken a spektrum torzulni fog.



Az ábrát megszemlélve rögtön látjuk, akkor nincsen spektrumismétlésből adódó torzítás (ún. *aliasing* vagy *átlapolódás*), ha

$$\omega_{\max} \le \frac{\pi}{T}$$

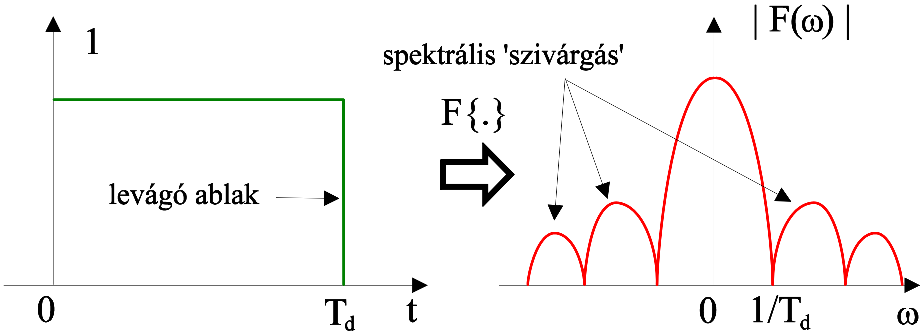
másképpen

$$T_{\min} = \frac{\pi}{\omega_{\max}}.$$

Ez a $T_{\min}$ az ún. **Nyquist intervallum**, a neki megfelelő mintavételezési (kör)frekvencia pedig az $\omega_N = 2\pi / T_{\min}$ **Nyquist frekvencia**.

Shannon-féle mintavételezési tétel. A tétel kimondja, hogy a mintavételezési frekvencia legalább *kétszerese* legyen a jelben előforduló legnagyobb frekvenciának. Ekkor $F(\omega)$ másolatai elkülönülnek, nincs spektrumismétlésből adódó torzítás (aliasing vagy átlapolódás), és elég a másolatokból csak eggyel foglalkozni, ha azt T-vel átskálázzuk (megszorozzuk).

B) Véges jelsorozatok



A mintáink térben korlátozott kiterjedésűek – ez egy levágó ablak alkalmazásának felel meg. Ennek következménye az ábrán látható spektrális ‘szivárgás’, ami zavaró felharmonikusok megjelenését jelenti a transzformált jelben.
Tegyük fel, hogy N db mintát veszünk mind az $f(t)$ -ből, mind az $F(\omega)$ -ból (mintavételezés):

$$\{f_n\}_{n=0}^{N-1} \text{ illetve } \{F_k\}_{k=0}^{N-1},$$

Ekkor jutunk el a **diszkrét Fourier transzformált pár (DFT)** felírásához:

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink\Delta\omega T} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ink\Delta\omega T} \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

Ez N^2 db komplex szorzást és $N(N-1)$ db. komplex összeadást jelent.

Gyors Fourier-transzformáció (FFT)

A DFT műveletigényét csökkenteni lehet. Cooley és Tukey 1965-ben publikálták módszerüket, amelyik bináris (N=2^k alakú) számú adatra (2 hatványra) N^2 db szorzás helyett $\frac{1}{2}Nk$ db. szorzást igényel, ezenkívül Nk db. komplex összeadást. Eszerint a műveletigény N^2-ről $N\log_2 N$-re csökkenthető. Ők szeizmikus adatok idősoranalízisére használták módszerüket. Cikkük majdnem el lett felejtve. Később kiderült, hogy korábban már mások is felfedezték a gyors Fourier-transzformációt, így például Danielson és Lánczos (1942), sőt maga Gauss is használta 1805-ben aszteroida pályák interpolációjára. Azóta az FFT módszert kidolgozták nem csak bináris számú adatra (ez az ún mixed-radix FFT), és szinte minden tudományágban alkalmazzák, így a fizikai geodéziában is.

A különbség a DFT és az FFT műveletigénye között óriási lehet. Például N=10^9 adat esetén egy 1 ns ciklusidejű (1 GHz lebegőpontos sebességű processzorral felszerelt) gép FFT-vel 45 másodpercig számolna, míg FFT nélkül (DFT-vel) a számítás 63 év múlva fejeződne csak be!

5. A gyors Fourier-transzformáció (FFT) módszerének alkalmazási lehetőségei a fizikai geodéziában

Az FFT első alkalmazási területe **konvolúciós integrálok hatékony számításához** kötődik. Az egyik legfontosabb ilyen integrál a Stokes-integrál.

Stokes-integrál számítása FFT-vel

$$N(P) = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_\sigma \Delta g(Q)\, S(\psi_{PQ})\, d\sigma(Q)$$

Kérdés, hogyan lehet a fenti, a σ egységgömb felszínére felírt Stokes-integrált 2 dimenziós konvolúciós integrál alakjára hozni? Ennek egyik lehetősége a

A) sík közelítés (2D sík FFT)

$$N(x,y)=\frac{1}{2\pi\gamma}\Delta g(x,y)*l_N(x,y),\quad \text{ahol}\quad l_N(x,y)=(x^2+y^2)^{-1/2}$$

amely azonnal kiszámítható gyors Fourier-transzformáció segítségével:

$$N(x,y)=\frac{1}{2\pi\gamma}\mathbf{F}^{-1}\{\Delta G(u,v)\;L_N(u,v)\}.$$

Ebben az összefüggésben $L_N(u,v)$ az úgynevezett magfüggvény Fourier transzformáltja, $\Delta G(u,v)$ pedig a nehézségi rendellenességek szabályos rácsra interpolált értékeit tartalmazó mátrix 2D Fourier-transzformáltja. A kezdőpontban ($x = 0$, $y = 0$) a magfüggvény szinguláris, ezért itt a megfelelő geoidunduláció-járulékot másképpen kell számolni, például a

$$\delta N_0(x,y)=\frac{\sqrt{\Delta x\Delta y}}{\gamma\sqrt{\pi}}\Delta g(x,y)$$

összefüggés segítségével. Megjegyezzük, hogy a Stokes-integrál sík közelítése *nem* azt jelenti, hogy a gömböt az érintősíkjával helyettesítjük. Ez az elgondolás azért téves, mert a gyakorlatban mindig *vetületi síkkoordinátákkal* dolgozunk, és így a számítás sokkal pontosabb, mint az érintősíkkal történő közelítés esetében.

B) gömbi Stokes-integrál (gömbi FFT)

A Stokes-integrált felírhatjuk gömbi koordinátákban az alábbiak szerint:

$$N(\varphi_P,\lambda_p)=\frac{R}{4\pi\gamma}\iint_\sigma \Delta g(\varphi,\lambda)\;S(\varphi_P,\lambda_p;\varphi,\lambda)\cos\varphi\;d\varphi d\lambda\,.$$

A probléma az, hogy a Stokes-függvény nem csak a P pont és a futópont koordinátáinak a **különbségétől** függ. Ha ez lenne a helyzet, akkor ez az integrál pontosan egy 2D konvolúció alakját öltené a gömbi koordinátás felírásban, éppúgy mint a sík közelítésben.

Egyenlőközű rácsra interpolált Δg adatok esetén a geoidundulációt a következő összeggel közelíthetjük:

$$N(\varphi_l,\lambda_k)=\frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{M-1}\Delta g(\varphi_j,\lambda_i)\cos\varphi_j\;S(\varphi_l,\lambda_k;\varphi_j,\lambda_i)\;\;\Delta\varphi\Delta\lambda\,.$$

Mivel a Stokes-függvény is felírható a földrajzi koordináták **különbségei** függvényeként az alábbiak szerint:

$$s^2=\sin^2\frac{\psi}{2}=\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}+\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}\cos\varphi_P\cos\varphi=\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}+\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}\cos^2\overline{\varphi}$$

$$S(s)=\frac{1}{s}-4-6s+10s^2-(3-6s^2)\ln(s+s^2)\,.$$

A magfüggvénynek ezzel a *közelítésével* a Stokes függvény végül is csak az alábbiaktól függ az s-en keresztül:

$$S(\psi) \approx S(\varphi_l - \varphi_j, \lambda_k - \lambda_i, \overline{\varphi}) .$$

A számítási terület közepes $\overline{\varphi}$ földrajzi szélességével számolva így a Stokes integrál gömbi koordinátákban is konvolúciós integrállá alakítható:

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1}\left\{\mathbf{F}\left\{\Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos\varphi_j\right\}\mathbf{F}\left\{S(\varphi_l, \lambda_k, \overline{\varphi})\right\}\right\}.$$

Ezt nevezzük **2D gömbi FFT-nek**.

Ha s számításánál nem alkalmazunk közelítést, a Stokes integrál $\Delta\lambda$ szerint akkor is 1D konvolúciós integrállá alakítható, mivel

$$S(\varphi_l, \lambda_k; \varphi_j, \lambda_i) = S(\varphi_l, \varphi_j, \Delta\lambda_{ki}) .$$

Felhasználva a Fourier-transzformáció linearitását, a következőt kapjuk:

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1}\left\{\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{F}\left\{\Delta g \cos\varphi_j\right\}\mathbf{F}\left\{S(\varphi_j, \Delta\lambda)\right\}\right\} .$$

Ezt nevezzük **1D (szabatos) gömbi FFT-nek**. A számítástechnika fejlődése következtében a pontosságra törekedve ma már kizárólag ezt az eljárást alkalmazzák a számítások során.

Vening-Meinesz integrál számítása FFT-vel

A Vening-Meinesz integrált felírhatjuk gömbi koordinátákban az alábbiak szerint:

$$\begin{Bmatrix} \xi(P) \\ \eta(P) \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_\sigma \Delta g(Q)\, V(\psi_{PQ}) \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} d\sigma(Q) ,$$

továbbá sík közelítésben az alábbi 2D FFT-vel:

$$\begin{Bmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1}\left\{\mathbf{F}\left\{\Delta g\right\} \mathbf{F}\begin{Bmatrix} \cos\alpha / r^2 \\ \sin\alpha / r^2 \end{Bmatrix}\right\} .$$

Mologyenszkij integrál számítása FFT-vel

A Mologyenszkij integrál a Stokes integrál inverze, vagyis nehézségi rendellenességeket lehet számítani a segítségével geoidundulációkból. Erre például az altiméteres mérések feldolgozása során lehet szükség, amikor kombinálni szeretnénk az altiméteres méréseket a geoidszámításhoz használt földi nehézségi rendellenességekkel. A Mologyenszkij integrál gömbi koordinátákban így írható fel:

$$\Delta g(\varphi_P, \lambda_p) = -\frac{\gamma}{R} N(\varphi_P, \lambda_p) + \frac{\gamma}{4\pi R} \iint_\sigma \left[N(\varphi, \lambda) - N(\varphi_P, \lambda_P)\right] Z(\psi)\, d\sigma .$$

Ez az integrál a Stokes integrálhoz hasonlóan a teljes földfelszínre számítandó az ún. Mologyenszkij-függvény segítségével:

$$Z(\psi)=\sum_{n=0}^{\infty} n(2n+1)P_n(\cos\psi)=-\frac{1}{4\sin^3(\psi/2)}.$$

A Mologyenszkij integrál szintén kiszámítható FFT eljárás segítségével. Most csak a sík közelítéses megoldását írjuk le ide:

$$\Delta g(x,y)=-\frac{R}{\gamma}N(x,y)-\frac{\gamma}{2\pi}\left[\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{N(x,y)\}\mathbf{F}\{d(x,y)\}\}-N(x,y)\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{1\}\mathbf{F}\{d(x,y)\}\}\right]$$

$$d(x,y)=\left[(x-x_P)^2+(y-y_P)^2\right]^{-3/2}.$$

Megjegyezzük továbbá, hogy a gyors Fourier-transzformáción alapuló módszerek előnyösen alkalmazhatók például a terepi korrekciók számítására is, ahol különösen nagy mennyiségű adattal kell dolgozni.

Az egyéb alkalmazások között kell megemlíteni a gyors gömbfüggvény-sorfejtés számítást, mivel az előző részekben mondottak szerint az alábbi jellegű szummák hatékonyan számíthatók ki az FFT módszerrel:

$$\sum_{m=0}^{n}\left(A_m\cos m\lambda+B_m\sin m\lambda\right)\Rightarrow\sum_{m=-N}^{N}c_m e^{im\lambda}.$$

A fenti, gömbfelületre vett integrálok számításánál hallgatólagosan feltételeztük, hogy adatainkat a teljes földfelszínre ismerjük, mivel a fizikai geodéziában előforduló integrálképletek esetében (Stokes, Vening-Meinesz, Mologyenszkij, stb.) a teljes Föld felszínére integrálnunk kell. A gyakorlatban ez a követelmény nem teljesül, ezért az integrálási tartomány nem a teljes Föld. Az integrálási területen kívüli adatok hatását pedig szokás valamilyen geopotenciál modell segítségével meghatározni. Ilyen korszerű modell például az EGM96 vagy a GPM98C modell, melynek gömbfüggvény együtthatóit 360 ill. 1800 fok- és rendszámig ismerjük. Ez esetben egy egyszerű számítási eljárással figyelembe vehető a geopotenciál modell hatása, amelyet először eltávolítunk az adatokból, azután pedig visszaállítunk a számított mennyiségekben (**remove-restore**). A Stokes integrál esetében az eljárás így néz ki:

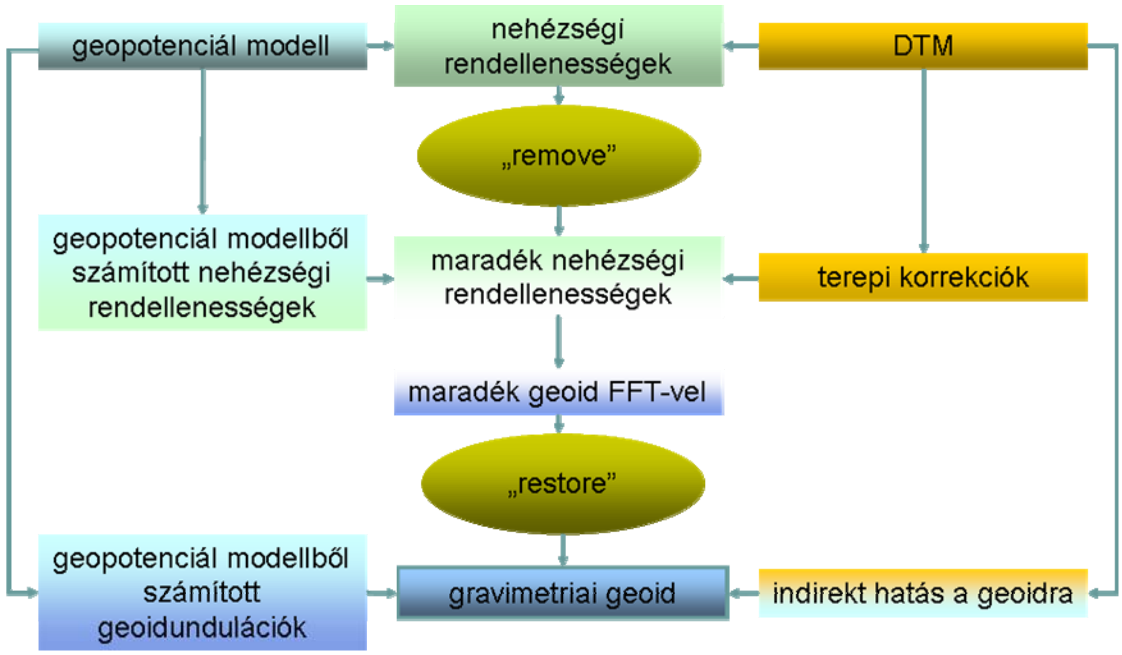
$$\Delta g=\Delta g^{FA}-\Delta g^{GM}+c$$

$$N=N^{GM}+N^{\Delta g}+N^{h},$$

ahol GM jelöli a geopotenciális modell hatását, c a terepi korrekció, Δg a szabadlevegő nehézségi rendellenességeket (Free-air), N^h pedig az úgynevezett indirekt hatást jelöli. Látható, hogy az első lépésben eltávolítjuk a Δg^{FA} szabadlevegő nehézségi rendellenességekből a geopotenciális modell Δg^{GM} hatását és a c terepi korrekciót. A számításokhoz pedig az így redukált Δg nehézségi rendellenességeket használjuk fel a következő ábrán látható séma szerint.

Végül hozzáadjuk a Stokes-integrállal számított $N^{\Delta g}$ maradék geoidundulációhoz az eltávolított hatásokat N-ben (N^h az ún. indirekt hatás), és ezzel előállítjuk a gravimetriai geoidmegoldást.

Megemlítjük még azt, hogy a remove-restore eljárás alternatívájaként alkalmazhatóak azok a módszerek is, amelyek keretében nem a nehézségi rendellenességeket módosítják azzal, hogy az integrálás előtt eltávolítják a nehézségi erőtér hosszú hullámú összetevőit, hanem az integrálás magfüggvényét módosítják úgy, hogy eltávolítják belőle a hosszú hullámú tagokat. Egy ilyen gyakran alkalmazott módosítási eljárás Mologyenszkij nevéhez fűződik.



Gyakorlati példák

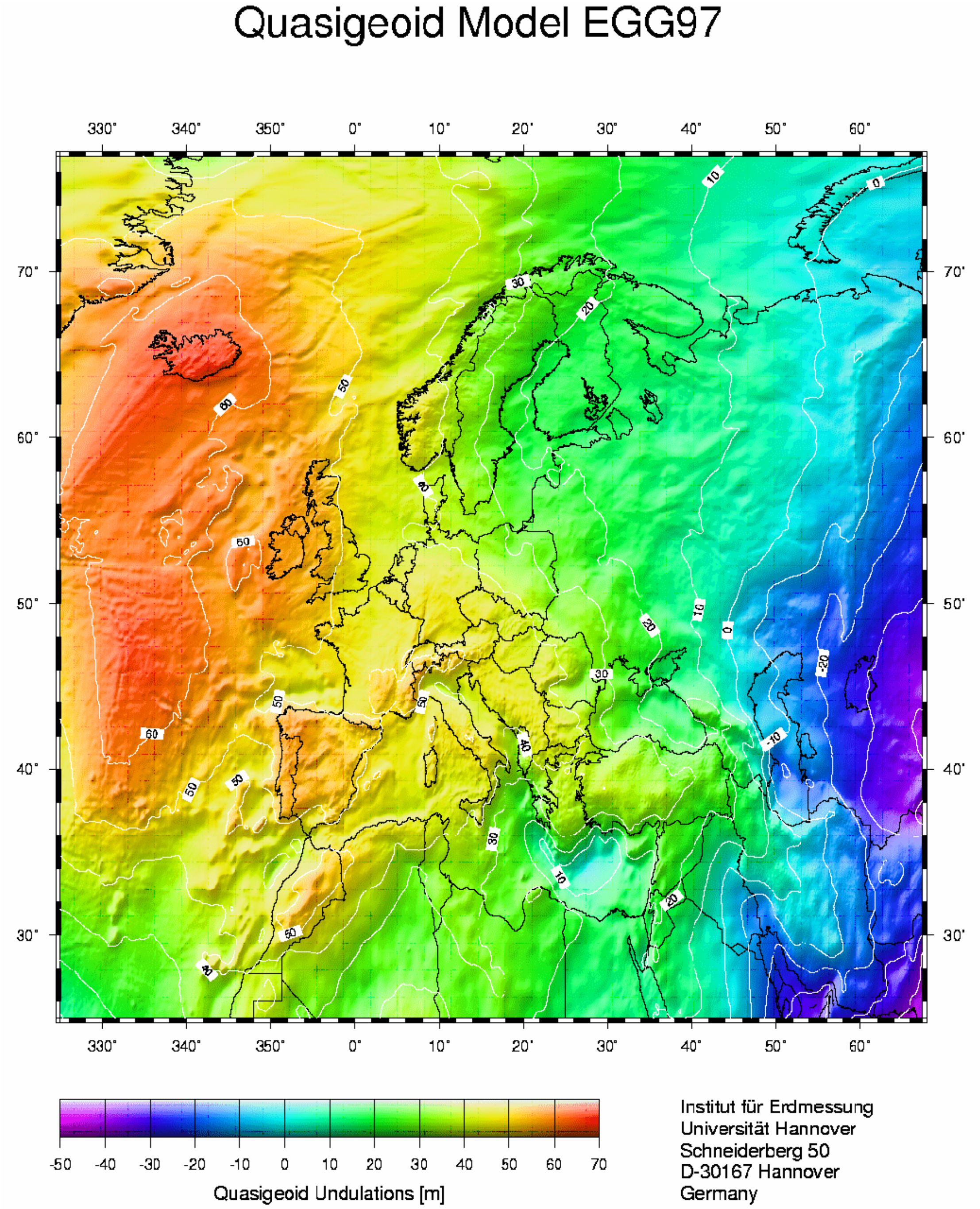
A következőkben bemutatunk néhány példát a spektrális módszerek alkalmazására a fizikai geodéziában, elsősorban a geoidszámítás területén. További példákat a fizikai geodéziában alkalmazott szoftverek áttekintése keretében fogunk megismerni.

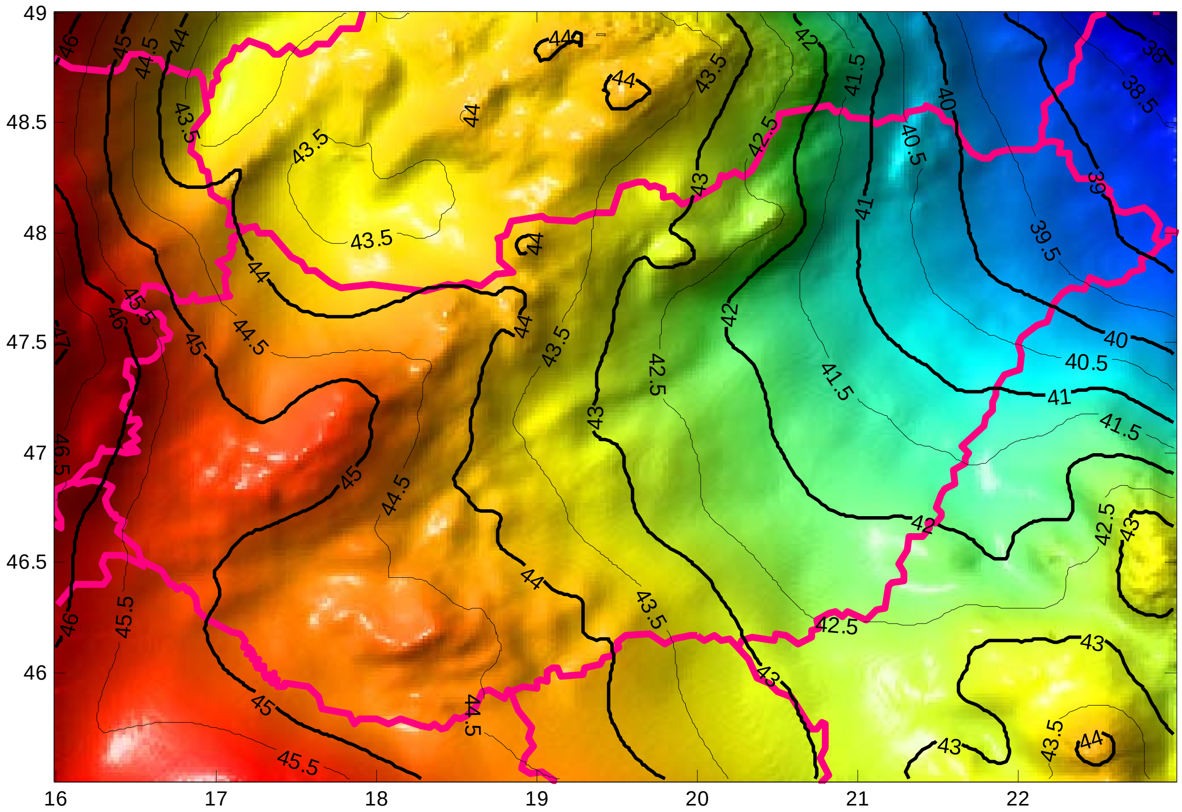
EGG97 (European Gravimetric Geoid 1997, Denker, Behrend és Torge)

- EGM 96 geopotenciál modell 360 fok- és rendszámig (130 682 együttható)
- 3120 sorból és 4120 oszlopból álló, 1' x 1,5' szögperc osztásközű földrajzi rácshálóra adott nehézségi rendellenességek (12 779 520 Δg adat)
- számítási módszer: 1D gömbi (szabatos) FFT, spektrális kombináció

HGTUB98, HGTUB2000 magyarországi gravimetriai geoidmegoldások (Tóth és társai)

- EGM 96 geopotenciál modell 360 fok- és rendszámig (130 682 együttható)
- 421 sorból és 505 oszlopból álló, 30" x 50" szögmásodperc osztásközű földrajzi rácshálóra adott nehézségi rendellenességek (212 605 Δg adat)
- számítási módszer: 1D gömbi (szabatos) FFT, remove-restore, ill. spektrális kombináció
- nemcsak geoid, hanem függővonal elhajlás összetevők számítása is történt
- Az OGPS 308 szintezett pontján ellenőrizve a geoidmegoldás 8,7 illetve 4,4 cm-es szórással egyezik.


Quasigeoid Model EGG97
330° 340° 350° 0° 10° 20° 30° 40° 50° 60°
70° 60° 50° 40° 30°
-50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70
Quasigeoid Undulations [m]
Institut für Erdmessung
Universität Hannover
Schneiderberg 50
D-30167 Hannover
Germany



A HGTUB98B megoldás (izovonalköz: 0,5 m)

Összeállította: Dr. Tóth Gyula
BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék
Budapest, 2011.