Fizikai geodézia és gravimetria / 10.

A FIZIKAI GEODÉZIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI ALAPJAI, A GEOIDMEGHATÁROZÁS FIZIKAI GEODÉZIAI MÓDSZEREI.

A fizikai geodézia egyik legfontosabb feladata a Föld elméleti alakjának, a geoidnak a meghatározása. Ahhoz, hogy az egész Földön közös, geocentrikus (vagy más kifejezéssel *abszolút*) elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidhoz (alapfelülethez) viszonyított geoid-ellipszoid távolságokat és ezzel egységes geoidképet tudjuk előállítani, *fizikai-geodéziai módszereket* kell igénybe venni. Ezek közös jellemzője, hogy a geoidmeghatározást *fizikai feladatként* oldják meg. Ez azt jelenti, hogy a geoidot a valódi földi nehézségi erőtér valamilyen kiválasztott W_0 potenciálértékű *szintfelületeként* határozzuk meg. A feladat megoldási módszereinek egyik csoportja a nehézségi mérésekre támaszkodó gravimetriai, ill. gradiometriai módszerek. (Ez utóbbiakat egyrészt a geoid finomszerkezetének, másrészt a Földön kívüli külső térben haladó szintfelületek meghatározására használjuk.) Az eljárások másik csoportja a Föld mesterséges holdjait használja fel az egész Föld geoidja, ill. más kül-ső szintfelületei alakjának meghatározására.

Ennek megfelelően a fizikai geodézia legfontosabb fizikai alapjai a potenciálelmélet és a gravitácó területére esnek. Tetszőleges alakú és tömegeloszlású testek tömegvonzási (gravitációs) erőterének leírására különféle matematikai eljárások használhatók, ezek közül a legelőnyösebb a gömbfüggvény-sorok alkalmazása.

A gravitációs erőt a tömegek keltik, a tömegeken kívül gravitációs erő nem keletkezik. Ezt a matematika nyelvén, az ismert differenciál-operátorokat alkalmazva elegánsan úgy fogalmazzuk meg, hogy tömegeken kívül az erőtér divergenciája (forrása) zérus:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0. \tag{1}$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy az erőtér a potenciál gradienseként állítható elő:

$$\mathbf{E} = \mathbf{grad}\,V. \tag{2}$$

A (2) összefüggést az (1)-be beírva:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,V = \Delta V = 0. \tag{3}$$

A (3) a jól ismert Laplace-egyenlet, amely megoldását gömbfüggvény-sor alakban legegyszerűbb felírni. Gömbi polárkoordinátákat használva a megoldás a már jól ismert

$$V = \frac{kM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n\, P_n(\cos\vartheta) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n \left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right) P_{n,m}(\cos\vartheta)\right] \tag{4}$$

alakú.

A potenciálelmélet peremérték-feladatai

Peremérték-feladaton adott tartományban értelmezett függvények közül annak megkeresését értjük, amely az adott tartomány határán (a *peremfelületen*) előírt feltételeknek eleget tesz.

A geoid meghatározásához a potenciálzavar $T = W - U$ függvényét keressük! Erről tudjuk, hogy – mivel a centrifugális erőtér potenciálja a különbségképzésből kiesik – tömegvonzási potenciálok (nevezetesen a valódi földtömeg és a normál nehézségi erőtér forrását képező, a föld tömegével egyenlő nagyságú, de szabályos eloszlású tömeg vonzási potenciáljának) különbsége.

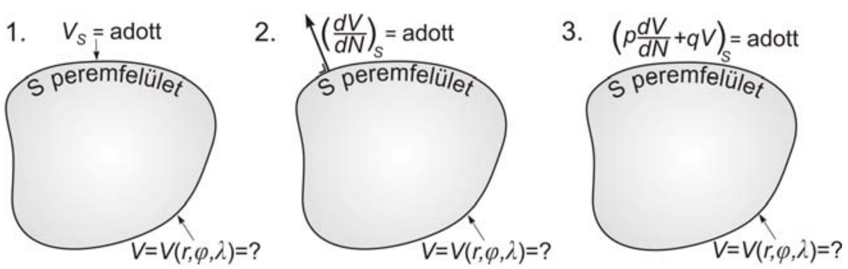
Ez pedig akkor a Föld külső terében ki kell elégítse a rávonatkozóan felírható (3) *Laplace* egyenletet, ami viszont másodrendű differenciálegyenlet *T* meghatározására. Ennek általános megoldása végtelen sok gömbfüggvényből álló sor.

A *Laplace*-egyenlet megoldását képező harmonikus függvények összességéből (a (4) gömbfüggvények végtelen sokaságából) ki kell választanunk azt, amely a Föld elméleti alakjának a felszínén, a peremfelületen előre számszerűen megadott feltételt (*peremfeltételt*) kielégíti.

A matematika három peremérték-feladatot különböztet meg attól függően, hogy mik az adott peremértékek. Az első peremérték-feladat (*Dirichlet probléma*) esetében a peremfelületen a keresett függvény által ott felveendő függvényértékek adottak (*1. ábra*).

Második peremérték feladatról (*Neumann problémáról*) beszélünk akkor, ha a peremfelületen a keresett függvény felületi normális irányú első differenciálhányadosának számértékei ismertek.

Végül *harmadik peremérték-feladattal* állunk szemben, ha a peremfelületen a keresett függvény ottani függvényértékei és felületi normális irányú első differenciálhányadosa valamilyen lineáris kombinációjának számértékei adottak.



1. ábra. A potenciálelmélet három peremérték feladata

A peremérték-feladatok különböző fajtáira a matematikában kidolgozott megoldások állnak rendelkezésre.

Peremfeltétel felállítása a geoidra

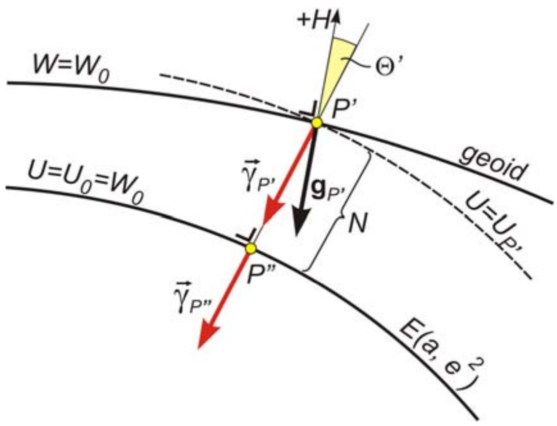
Keressünk olyan matematikai kapcsolatot, amely a *T* potenciálzavar egyelőre ismeretlen függvénye és a geoidon mérhető (vagy pontosabban a földfelszínen mérhető és a geoidra átszámítható) mennyiségek között fennáll.

Irjuk fel a *2. ábrán* látható geoidi P' pontban az ottani valódi és a normál nehézségi térerősség $g_{P'} - \gamma_{P'}$ különbségét. Vegyük figyelembe, hogy mindkettő a megfelelő potenciálfüggvény negatív gradiensének abszolút értékeként fogható fel, amely utóbbiak a megfelelő potenciálfüggvény függőleges (magasság) irányú első differenciálhányadosaként értelmezhetők. Ezeknek különbsége viszont a potenciálzavar függvényének függőleges-irányú differenciálhányadosával egyenlő:

$$g_{P'} - \gamma_{P'} = -\left(\frac{\partial W}{\partial H} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial U}{\partial H}\right)_{P'} \approx -\left(\frac{\partial W}{\partial H} - \frac{\partial U}{\partial H}\right)_{P'} = -\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P'} . \tag{5}$$

Másrészt a P' pontbeli nehézségi értékek különbségében szereplő $\gamma_{P'}$ geoidi normál nehézségi térerősség a $\gamma_{P''} = \gamma_e(1+\beta\sin^2\varphi_{P''} + \cdots)$ függvénynek az ellipszoidi P'' pontban végzett N szerinti sorbafejtésével számítható ki. Ha a $\overline{P'P''} = N$ távolság (azaz a geoid-ellipszoid távolság) a Föld méreteihez viszonyítva kicsi (*1. feltétel*), akkor elegendő a sorbafejtést a lineáris (1. fokú) tagig végezni és a sor többi tagjai elhanyagolhatók:

$$\gamma_{P'} = \gamma_{P''} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right)_{P''} N . \tag{6}$$



2. ábra. Peremfeltétel felállítása a geoidra

Helyettesítsük (6)-ban N értékét a *Bruns*-féle összefüggés

$$N = \frac{T_{P'}}{\gamma_{P''}}$$

egyszerűsített alakjával (*2. feltétel:* $U_0 = W_0$) és rendezzük a kapott tagokat a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P'} - \frac{1}{\gamma_{P''}}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right)_{P''} T_{P'} = -(g_{P'} - \gamma_{P''}) = -\Delta g_{P'} \tag{7}$$

alakra. Ennek jobb oldalán álló kifejezés a *geoidi nehézségi rendellenesség*, amelyben $g_{P'}$ a föld felszínén mérhető és a geoidra átszámítással nyerhető valódi és $\gamma_{P''}$ pedig a választott geodéziai vonatkoztatási rendszernek megfelelő képletből a szintellipszoid felszínén fekvő P'' ponthoz kiszámítható normál nehézségi érték. Különbségeik a nehézségi rendellenességek (vagy gravitációs anomáliák).

Számítsuk ki a (7) bal oldali második tagjában a T függvény együtthatóját azzal a közelítéssel, hogy a lapultság elhanyagolásával az ellipszoidot a Föld tömegével megegyező M tömegű (*3. feltétel*), az ellipszoidéval azonos térfogatú homogén gömbbel helyettesítjük, amelynek sugara R. A keresett együtthatót ennek külső erőterében számítva a (7)-nek a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P'} + \frac{2}{R} T_{P'} = -\Delta g_{P'} = -(g_{P'} - \gamma_{P''}) \tag{8}$$

közelítő alakjára jutunk, amelyben az elhanyagolás a lapultság ($f \approx 1/300$) nagyságrendjének felel meg.

A jobb oldal számszerű ismeretében a (7) vagy a (8) közelítő alak elsőrendű lineáris differenciálegyenlet az ismeretlen T függvény meghatározására, amit a *fizikai geodézia alap differenciálegyenletének* szokás nevezni.

Mivel azonban a Δg nehézségi rendellenességek nem az egész térben, hanem zárt felület (a geoid) mentén tekinthetők ismertnek, a (7)-ből, vagy a (8) közelítő alakból a T függvény térbeli eloszlása közvetlenül nem határozható meg. Alkalmas ez az egyenlet azonban arra, hogy ha ismerjük a T függvény általános alakját, akkor *peremfeltételként* szolgáljon az azt kielégítő konkrét függvény kikereséséhez.

Ha a külső térre korlátozódunk (*4. feltétel*), akkor a potenciálzavar T függvényének általános alakja a ΔT *Laplace* egyenlet megoldásainak összességét tartalmazó végtelen gömbfüggvénysor. Ebből a (7) vagy a (8) kifejezést peremfeltételként használva, a *mért peremértékek* alapján meghatározható az ezt kielégítő gömbfüggvénysor együtthatóinak számszerű értéke. A (7), vagy a (8) alakilag a *harmadik peremérték-feladat peremfeltételének* felel meg.

Megjegyezzük, hogy a 4. érvényességi feltétellel megadtuk a földfelszínen mért nehézségi értékek geoidra átszámításának módját is. Ennek olyannak kell lennie, hogy eredményül azt a nehézségi térerősséget adja, amit a *geoidon mérnénk, ha fölötte tömegek nem lennének.*)

Felírva a T függvény térbeli gömbfüggvénysorának általános alakját a geoidot közelítő R sugarú gömb külső terére, képezzük ennek helyvektor (azaz magasság) irányú első differenciálhányadosát, és az így nyert alakokban a geoidi P' pont helyvektorát a geoidot közelítő gömb R sugarával helyettesítve, előállíthatjuk a T függvény – és első differenciálhányadosa P' geoidi pontbeli értékét gömbfüggvény alakban. Ezeket a (8) peremfeltételben szereplő $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P'}$ és $T_{P'}$ helyére beírva, a lehetséges összevonások után (és az előjelet megfordítva) megkapjuk az

$$\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\, T_n(\vartheta,\lambda) = \Delta g_{P'} \tag{9}$$

peremfeltételt a geoidra gömbfüggvénysor alakjában. Keressük tehát a potenciálzavar T függvényének azt az alakját, amelyik a geoidon a (8) vagy (9) alakban a most felállított peremfeltételt kielégíti.

A peremértékfeladaton keresztül történő geoidmegoldásokat két nagy csoportra oszthatjuk: a peremérték-feladatot vagy a potenciálfüggvény gömbfüggvény-sorával, vagy a Stokes-féle sorral oldjuk meg.