A mátrix-ortogonalizációs módszer gyakorlati alkalmazása a kiegyenlítő számításban

Dr. Völgyesi Lajos

DK 57.2.643 : 528.1

Az előző tanulmányunkban [1] utaltunk arra, hogy bizonyos kiegyenlítési problémák megoldása során a szokásos számítási eljárás helyett célszerűbb az ún. mátrix-ortogonalizációs módszer használata. Megmutattuk, hogy ez az eljárás megkerüli a normál-egyenletek felállítását, és megfelelő mátrix-transzformációk alkalmazásával közvetlenül szolgáltatja a kiegyenlítés során keresett mennyiségeket.

Ebben a tanulmányban a mátrix-ortogonalizációs módszer gyakorlati alkalmazását tárgyaljuk. Az általánosított mátrix-ortogonalizáció fogalmának kibővítése után megmutatjuk az alkalmazását a kiegyenlítő számítás két alapfeladatának – a közvetett mérések kiegyenlítésének és a közvetlen mérések feltételekkel történő kiegyenlítésének – esetére. Közöljük az általánosított mátrix-ortogonalizációs eljárás ALGOL 60 és FORTRAN nyelven írt számítógépprogramját, és egyszerű számpéldával is szemléltetjük az ortogonalizációs módszer használatát.

1. A mátrix-ortogonalizáció alapelve a kiegyenlítő számításban

Az általánosított mátrix-ortogonalizáció alapelvét az [l]-ben mutattuk meg. Bővítsük ki most ezt az alábbiak szerint.

Partícionáljuk valamely $\hat{\mathbf{A}}$ mátrixot az

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{r} & \overbrace{\qquad\quad}^{p} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A_1} & \mathbf{A_2} \\ \hline \mathbf{A_3} & \mathbf{A_4} \\ \hline \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \hline \mathbf{A_{2t-1}} & \mathbf{A_{2t}} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \}n \\ \}m \\ \\ \}s \end{array} \tag{1.1}$$

formában, ahol az $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_{2t-1}}$, $\mathbf{A_{2t}}$ almátrixok az $\hat{\mathbf{A}}$ hipermátrix elemei. Az [1] szerint a páratlan indexű almátrixok együttesét bal oldali mátrixblokknak, a páros indexű álmátrixok együttesét jobb oldali mátrixblokknak és végül az $\mathbf{A_1}$ almátrixot fundamentális mátrixblokknak nevezzük.

Az általánosított mátrix-ortogonalizáló eljárás feladata az $\hat{\mathbf{A}}$ hipermátrix transzformáció-ja az (1.1)-gyel azonos struktúrájú $\hat{\mathbf{W}}$ hipermátrixba:

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{r} & \overbrace{\qquad\quad}^{p} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W_1} & \mathbf{W_2} \\ \hline \mathbf{W_3} & \mathbf{W_4} \\ \hline \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \hline \mathbf{W_{2t-1}} & \mathbf{W_{2t}} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \}n \\ \}m \\ \\ \}s \end{array} \tag{1.2}$$

A transzformációt a módosított Gram-Schmidt ortogonalizáló eljárással [1] hajtjuk végre, mégpedig úgy, hogy először az $\hat{\mathbf{A}}$ bal oldali mátrixblokkját transzformáljuk a $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix megfelelő bal oldali mátrixblokkjába:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(1)} \\ \mathbf{w}_3^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{2t-1}^{(1)} \end{bmatrix} = \dfrac{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(1)} \\ \mathbf{a}_3^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2t-1}^{(1)} \end{bmatrix}}{\left\| \mathbf{a}_1^{(1)} \right\|_E} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2t-1}^{(i)} \end{bmatrix}^{\langle 1 \rangle} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2t-1}^{(i)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2t-1}^{(i)} \end{bmatrix}^{\langle k+1 \rangle} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2t-1}^{(i)} \end{bmatrix}^{\langle k \rangle} - \left(\left(\mathbf{a}_1^{(i)} \right)^{\langle k \rangle}, \mathbf{w}_1^{(k)} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(k)} \\ \mathbf{w}_3^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{2t-1}^{(k)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_1^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{w}}_3^{(i)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{w}}_{2t-1}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2t-1}^{(i)} \end{bmatrix}^{\langle i \rangle} \end{array}\right. \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(i)} \\ \mathbf{w}_3^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{2t-1}^{(i)} \end{bmatrix} = \dfrac{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_1^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{w}}_3^{(i)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{w}}_{2t-1}^{(i)} \end{bmatrix}}{\left\| \tilde{\mathbf{w}}_1^{(i)} \right\|_E} \\ \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, r \\ k = 1, 2, \dots, i-1 \end{pmatrix} \end{array}\right] \tag{1.3}$$

majd az $\hat{\mathbf{A}}$ jobb oldali mátrixblokkját transzformáljuk a $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix megfelelő jobb oldali mátrixblokkjába:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_2^{(i)} \\ \mathbf{w}_4^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{2t}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^{(i)} \\ \mathbf{a}_4^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2t}^{(i)} \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{r} \left(\mathbf{a}_2^{(i)}, \mathbf{w}_1^{(k)}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(k)} \\ \mathbf{w}_3^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{2t-1}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

ahol az $\mathbf{a}_j^{(i)}$, illetve a $\mathbf{w}_j^{(i)}$ az (1.2)-ben szereplő $\mathbf{A}_j$, illetve a $\mathbf{W}_j$ blokkok i-edik oszlopát, az $\left(\mathbf{a}_j^{(i)}, \mathbf{w}_j^{(k)}\right)$ a megfelelő oszlopvektorok skalárszorzatát, az $\left\|\mathbf{a}_j^{(i)}\right\|_E$ pedig az $\mathbf{a}_j^{(i)}$ oszlopvektor euklideszi normáját jelöli. Fontos, hogy az (1.3) és az (1.4)-ben szereplő skalárszorzatokat és vektornormákat csak a fundamentális mátrixblokk elemeinek felhasználásával képezzük. Az [1] alapján egyszerűen belátható, hogy fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
\underset{(n,r)}{\mathbf{W}_1} &= \underset{(n,r)}{\mathbf{A}_1}\ \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} \\
\underset{(n,p)}{\mathbf{W}_2} &= \underset{(n,p)}{\mathbf{A}_2} - \underset{(n,r)}{\mathbf{W}_1}\ \underset{(r,n)}{\mathbf{W}_1^*}\ \underset{(n,p)}{\mathbf{A}_2} \\
\underset{(m,r)}{\mathbf{W}_3} &= \underset{(m,r)}{\mathbf{A}_3}\ \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} \\
\underset{(m,p)}{\mathbf{W}_4} &= \underset{(m,p)}{\mathbf{A}_4} - \underset{(m,r)}{\mathbf{W}_3}\ \underset{(r,n)}{\mathbf{W}_1^*}\ \underset{(n,p)}{\mathbf{A}_2} \\
&\ \ \vdots \\
\underset{(s,r)}{\mathbf{W}_{2t-1}} &= \underset{(s,r)}{\mathbf{A}_{2t-1}}\ \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} \\
\underset{(s,p)}{\mathbf{W}_{2t}} &= \underset{(s,p)}{\mathbf{A}_{2t}} - \underset{(s,r)}{\mathbf{W}_{2t-1}}\ \underset{(r,n)}{\mathbf{W}_1^*}\ \underset{(n,p)}{\mathbf{A}_2}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

ahol $\underset{(r,r)}{\mathbf{R}}$ felső háromszögmátrix.

2. Az általánosított mátrix-ortogonalizációs eljárás FORTRAN és ALGOL 60 nyelvű programja

A számítógép programok elkészítése előtt célszerű kissé átalakítani az (1.3) és az (1.4) transzformációs összefüggéseket, hogy az általánosított mátrix-ortogonalizációs eljárás (az (1.2) transzformáció) közvetlenül programozható legyen:

$$w_{k1} = \frac{a_{k1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2}} \tag{2.1}$$

$$(w_{ki})^{\langle 1 \rangle} = a_{ki} \tag{2.2a}$$

$$(w_{ki})^{\langle j+1\rangle} = (w_{ki})^{\langle j\rangle} - \left[\sum_{l=1}^{n} (w_{li})^{\langle j\rangle} \cdot w_{lj}\right] w_{kj} \tag{2.2b}$$

$$\widetilde{w}_{ki} = (w_{ki})^{\langle i\rangle} \tag{2.2c}$$

$$w_{ki} = \frac{\widetilde{w}_{ki}}{\sqrt{\sum_{l=1}^{n} \widetilde{w}_{li}^{2}}} \tag{2.3}$$

ahol a k és az i indexek értéke valamennyi helyen (k=1, 2, ... , n, n+1, ... , $n+m$, $n+m$+1, ... , $n+m$ ...+s), az (i=2, 3, ... , r, r+1, ... , $r+p$) – kivéve a (2.3) tagot, ahol (i = 2, 3, ..., r) – és végül a (2.2b)-ben (j=1, 2, ..., i-1).

Ezek alapján már könnyen megírható az (1.2) transzformáció számítógép programja. Először az (1.2) transzformáció FORTRAN programozási nyelven elkészített szubrutinját mutatjuk be.

```
      SUBROUTINE ORT(A,IS,IO,M,N)
      DIMENSION A(M,N)
      DOUBLE PRECISION G,F
      G=0.0
      DO 1 K=1,IS
      F=DBLE(A(K,1))
    1 G=G+F*F
      S=SNGL(DSQRT(G))
      DO 2 K=1,M
    2 A(K,1)=A(K,1)/S
      DO 3 I=2,N
      IJ=I-1
      DO 4 J=1,IJ
      G=0.0
      DO 5 K=1,IS
    5 G=G+DBLE(A(K,I))*(A(K,J)
      S=SNGL(G)
      DO 6 K=1,M
    6 A(K,I)=A(K,I)-S*A(K,J)
    4 CONTINUE
      IF(I-IO) 9,9,3
    9 G=0.0
      DG 7 K=1,IS
      F=DBLE(A(K,I))
    7 G=G+F*F
      S=SNGL(DSQRTG))
      DO 8 K=1,M
    8 A(K,I)=A(K,I)/S
    3 CONTINUE
      RETURN
      END
```

A formális paraméterek jelentése:

`A(M,N)` mátrix a szubrutin aktivizálásakor az (1.1)-gyel jelölt transzformálandó $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix elemeit tartalmazza. (A szubrutinból való kilépésnél a $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix elemei szintén az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix helyén adódnak.)

`IS` az (1.1) jelölés szerinti $\mathbf{A}_1$ fundamentális mátrixblokk (illetőleg a $\mathbf{W}_1$) sorainak száma.

`IO` az $\mathbf{A}_1$ fundamentális mátrixblokk (illetve a $\mathbf{W}_1$) oszlopainak száma.

`M` a teljes $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix (és az ennek megfelelő $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix) sorainak száma.

`N` a teljes $\hat{\mathbf{A}}$ (illetve $\hat{\mathbf{W}}$) mátrix oszlopainak száma.

Az (1.2) jelöléseinek megfelelően az `ORT` szubrutin aktivizálása például a következő formákban történhet:

```
CALL ORT (A,N,R,N+M+S,R+P)
CALL ORT (A,N,R,N+M,R+1)
```

A program megírásakor kihasználtuk a FORTRAN programozási nyelv által nyújtott duplapontosságú számábrázolási lehetőséget.

A FORTRAN szubrutin részletezése után az (1.2) transzformáció ALGOL 60 nyelven írt eljárását is közöljük, amelyet egyszerűen beépíthetünk bármely ALGOL programba.

```
procedure ort(a,is,io,m,n);
value is,io,m,n;
integer is,io,m,n;
array a;
begin integer i,j,k;
real g,f;
g:=0.0;
for k:=1 step 1 until is do begin
f:=a[k,1];
g:=g+f*f;
end;
g:=sqrt(g);
for k:=1 step 1 until m do
a[k,1]:=a[k,1]/g;
for i:=2 step 1 until n do begin
ij:=i-1;
for j:=1 step 1 until ij do begin
g:=0.0;
for k:=1 step 1 until is do
g:=g+a[k,i]*a[k,j];
for k:=1 step 1 until m do
a[k,i]:=a[k,i]-g*a[k,j];
end;
if i>io then goto c;
g:=0.0;
for k:=1 step 1 until is do begin
f:=a[k,i];
```

```
g:=g+f*f;
end;
g:=sqrt(g);
for k:=1 step 1 until m do
a[k,i]:=a[k,i]/g
c: end;
end ort;
```

A formális paraméterek jelentése teljes egészében megegyezik az előző FORTRAN szubrutin formális paramétercinek jelentésével. Az `a` mátrix „valós" típusú, mérete: `a[1:m,1:n];` a többi paraméter „integer" típusú. Az eljárásból való kilépés során a $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix elemei itt is az `a` mátrix helyén adódnak. Az `ort` eljárás aktivizálása például a következő formákban történhet:

```
ort (a,n,r,n+m+s,r+p);
ort (a,n,r,n+m,r+1);
```

Az általánosított mátrix-ortogonalizációs eljárás itt bemutatott néhány soros FORTRAN és ALGOL 60 nyelvű programja változtatás nélkül alkalmas a kiegyenlítő számítás alapfeladatainak megoldására. Az egyes feladatok megoldásakor csupán a közölt szubrutin, illetve eljárás aktivizálása különböző. A közölt számítási eljárás igen tömören, egyszerűen és általánosan adja a különféle alapfeladatok megoldását.

3. Közvetett mérések kiegyenlítése a matrix-ortogonalizációs módszerrel

A legegyszerűbb esettel az [1]-ben már röviden foglalkoztunk.

Jelölje valamely kiegyenlítési probléma linearizált közvetítő egyenleteinek javításra kifejezett alakját a

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\ \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \tag{3.1}$$

mátrixegyenlet [2], ahol $\mathbf{v}$ a javítások vektora, $\mathbf{A}$ a javítások együtthatómátrixa, $\mathbf{x}$ az ismeretlenek vektora, $\mathbf{l}$ a tisztatagok vektora és legyen $a>r$. Egymástól független ismeretlenek esetén, egységsúlyú méréseket feltételezve ($\mathbf{P}=\mathbf{1}$) az (1.2) transzformáció a következő alakú lesz:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} & \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \\ \hline \underset{(r,r)}{\mathbf{E}} & \underset{(r,1)}{\mathbf{0}} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,r)}{\mathbf{W}} & \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} \\ \hline \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} & \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} \end{array}\right] \tag{3.2}$$

ahol $\mathbf{E}$ egységmátrix, $\mathbf{0}$ zérusvektor és az $\mathbf{A}=\mathbf{WR}$ felbontás szerint $\mathbf{W}$ ortogonális oszlopokkal rendelkező mátrix, $\mathbf{R}$ pedig felső háromszögmátrix. Az (1.2) jelölései szerint $\mathbf{A}_1$-nek az $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_2$-nek az $\mathbf{l}$, $\mathbf{A}_3$-nak az $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}_4$-nek a $\mathbf{0}$ felel meg. Az [1]-ben már bizonyítottuk, hogy a (3.2) transzformáció során adódó $\mathbf{v}$ javítások és az $\mathbf{x}$ ismeretlenek vektora algebrailag ekvivalens a normálegyenletek felállításán és megoldásán keresztül adódó $\mathbf{v}$ és $\mathbf{x}$ vektorokkal.

Gépi számítás esetén ennél a kiegyenlítési problémánál az előző részben közölt FORTRAN szubrutint a

```
CALL ORT(A,N,R,N+R,R+1)
```

az ALGOL 60 nyelvű eljárást pedig az

```
ort (a,n,r,a+r,r+1);
```

utasítással kell aktivizálni. Az aktivizálás során a (3.2) jelöléseinek megfelelően az `A=a=`$\hat{\mathbf{A}}$ mátrix elemei az:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & l_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & l_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & l_n \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

kell legyenek. Az eljárásból való kilépés után ugyancsak a (3.2) jelöléseinek megfelelően az `A` mátrix helyén a

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1r} & v_1 \\
w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2r} & v_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nr} & v_n \\
\hline
r'_{11} & r'_{12} & \cdots & r'_{1r} & x_1 \\
0 & r'_{22} & \cdots & r'_{2r} & x_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & r'_{rr} & x_r
\end{array}\right]
$$

transzformált mátrixot kapjuk.

Itt kell még megjegyeznünk, hogy a (3.2) transzformáció n=r esetén igen pontos lineáris egyenletrendszer-megoldó eljárás. Ebben az esetben a közölt szubrutin, illetve eljárás aktivizálása:

```
CALL ORT(A,R,R,R+R,R+1)
ort(a,r,r,r+r,r+1);
```

Terjesszük ki ezek után a (3.2) transzformációt arra az esetre is, amikor a kiegyenlített mennyiségek függvényeivel is számolni kívánunk! Erre gyakran szükségünk van, - például amikor a kiegyenlített mennyiségekből alkotott függvények középhibáit akarjuk meghatározni. Jelölje az

$$\underset{(s,1)}{\mathbf{f}} = \underset{(s,r)}{\mathbf{F}}\,\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(s,1)}{\mathbf{d}} \qquad (3.3)$$

mátrixegyenlet a kiegyenlített mennyiségek függvényeit, ahol s a függvények száma, $\mathbf{F}$ pedig a függvényelvnek a kiegyenlített mennyiségek szerinti parciális deriváltjait tartalmazó mátrix. Ebben az esetben a transzformáció:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} & \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \\ \hline \underset{(r,r)}{\mathbf{E}} & \underset{(r,1)}{\mathbf{0}} \\ \hline \underset{(s,r)}{\mathbf{F}} & \underset{(s,1)}{\mathbf{d}} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,r)}{\mathbf{W}} & \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} \\ \hline \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} & \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} \\ \hline \underset{(s,r)}{\mathbf{FR}^{-1}} & \underset{(s,1)}{\mathbf{f}} \end{array}\right] \qquad (3.4)$$

és az (1.5) alapján nyilvánvalóan:

$$\underset{(s,1)}{\mathbf{f}} = \underset{(s,1)}{\mathbf{d}} - \underset{(s,r)}{\mathbf{FR}^{-1}}\,\underset{(r,n)}{\mathbf{W}^*}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

Ebben az esetben a közölt FORTRAN szubrutint a

```
CALL ORT(A,N,R,N+R+S,R+1)
```

az ALGOL 60 eljárást pedig az

```
ort(a,n,r,n+r+s,r+1)
```

utasítással kell aktivizálni.

Megjegyezzük, hogy ezen az úton is előállítható a normálegyenletek $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{N}$ együtthatómátrixa, mivel a már említett $\mathbf{A} = \mathbf{WR}$ felbontással

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{N}} = \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^*}\,\underset{(r,r)}{\mathbf{R}}$$

erre azonban közvetlenül nincs szükségünk, mivel a különböző varianciák és kovarianciák meghatározásához szükséges súlykoefficiens-mátrixok is egyszerűen adódnak a $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix bal oldali blokkjainak felhasználásával [2,3]. Így az $\mathbf{x}$ ismeretlenek súlykoefficiens-mátrixa:

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{(\mathbf{x})}} = \mathbf{N}^{-1} = \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}}\,\underset{(r,r)}{(\mathbf{R}^{-1})^*} \qquad (3.5)$$

a kiegyenlített mennyiségek $\mathbf{f}$ függvényeinek súlykoefficiens-mátrixa pedig:

$$\underset{(s,s)}{\mathbf{Q}_{(\mathbf{f})}} = \mathbf{FN}^{-1}\mathbf{F}^* = \underset{(s,r)}{\mathbf{FR}^{-1}}\,\underset{(r,s)}{(\mathbf{FR}^{-1})^*} \qquad (3.6)$$

Végül röviden kitérünk arra az esetre is, amikor a $\mathbf{P}$ súlymátrix nem egységmátrix; tehát a mérések nem egységsúlyúak. Helyettesítsük most a (3.4) transzformációban szereplő $\mathbf{A}$ mátrixot és $\mathbf{l}$ vektort az alábbiakkal [3]:

$$\underset{(n,r)}{\widetilde{\mathbf{A}}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{P}^{1/2}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}}$$

$$\underset{(n,1)}{\widetilde{\mathbf{l}}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{P}^{1/2}} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \tag{3.7}$$

A legtöbb gyakorlati esetben, amikor a $\mathbf{P}$ súlymátrix a főátlójában pozitív elemeket tartalmazó diagonálmátrix, a $\mathbf{P}^{1/2}$ és a $\mathbf{P}^{-1/2}$ számítása igen egyszerű. Ekkor, ha

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

akkor

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{P}^{1/2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{p_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{p_{nn}} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

és

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{P}^{-1/2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p_{22}}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_{nn}}} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

A mátrixtranszformáció a (3.4)-hez hasonlóan

$$\left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,r)}{\widetilde{\mathbf{A}}} & \underset{(n,1)}{\widetilde{\mathbf{l}}} \\ \hline \underset{(r,r)}{\mathbf{E}} & \underset{(r,1)}{\mathbf{0}} \\ \hline \underset{(s,r)}{\mathbf{F}} & \underset{(s,1)}{\mathbf{d}} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,r)}{\widetilde{\mathbf{W}}} & \underset{(n,1)}{\widetilde{\mathbf{v}}} \\ \hline \underset{(r,r)}{\widetilde{\mathbf{R}}^{-1}} & \underset{(r,1)}{\widetilde{\mathbf{x}}} \\ \hline \underset{(s,r)}{\mathbf{F}\widetilde{\mathbf{R}}^{-1}} & \underset{(s,1)}{\widetilde{\mathbf{f}}} \end{array}\right] \tag{3.10}$$

ahol most

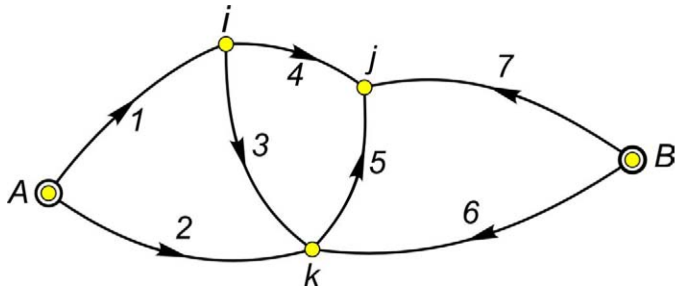
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{P}^{-1/2}\widetilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{x} &= \widetilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{f} &= \widetilde{\mathbf{f}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

és

$$\mathbf{Q}_{(\mathbf{x})} = \widetilde{\mathbf{Q}}_{(\mathbf{x})} \tag{3.12a}$$

$$\mathbf{Q}_{(\mathbf{f})} = \widetilde{\mathbf{Q}}_{(\mathbf{f})} \tag{3.12b}$$

Nézzük meg az eddigiek ismeretében egyszerű számpéldán a (3.10) transzformáció alkalmazását!



1. ábra

Egyenlítsük ki az 1. ábrán látható szintezési hálózatot! A nyilak az emelkedések irányát mutatják. Meghatározandó az *i, j* és a *k* pont legvalószínűbb magassági értéke az m_i, m_j és az m_k, ha az *A* és a *B* pont ismert és végleges magassági értéke:

$$m_A = 100.000m \text{ és } m_B = 105.000m$$

és a mérési eredmények:

$$h_1 = 5.006m \ , \ h_2 = 10.011m, \ h_3 = 4.998m \ , \ h_4 = 9.990m$$
$$h_5 = 5.003m \ , \ h_6 = 4.991m \ , \ h_7 = 10.007m$$

A mérési hosszak különbözők, a súlyokat a mérési hosszak fordított arányában állapítottuk meg. A súlymátrix:

$$\underset{(7,7)}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A közvetítő egyenletek lineárisak:

$$\begin{aligned} m_i \quad &= m_A + h_1 \\ m_k \quad &= m_A + h_2 \\ m_k - m_i &= h_3 \\ m_j - m_i &= h_4 \\ m_j - m_k &= h_5 \\ m_k \quad &= m_B + h_6 \end{aligned}$$

$$m_j \qquad = m_B + h_7$$

Példánkban az ismeretlenekre előzetes értéket nem veszünk fel, hogy a megoldás lényegét könnyebben áttekinthessük. Az m_i, m_j, m_k ismeretleneket x_1, x_2, x_3-mal jelölve a javítási egyenletek:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -105.006 &= v_1 \\ x_3 \quad -110.011 &= v_2 \\ -x_1 + x_3 \quad -4.998 &= v_3 \\ -x_1 + x_2 \quad -9.990 &= v_4 \\ x_2 - x_3 \quad -5.003 &= v_5 \\ x_3 - 109.991 &= v_6 \\ x_2 - 115.007 &= v_7 \end{aligned}$$

vagy a (3.1) jelölésnek megfelelően

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -105.006 \\ -110.011 \\ -4.998 \\ -9.990 \\ -5.003 \\ -109.991 \\ -115.007 \end{bmatrix}$$

A meghatározandó x ismeretlenek és v javítások mellett számítsuk ki még a meghatározott m_i, m_j, m_k magasságok ismeretében az $m_j - m_i$ és az $m_k - m_i$ magasságkülönbségek középhibáit is – illetve az ehhez szükséges kiegyenlített mennyiségek függvénycinek $\mathbf{Q}_{(\mathbf{f})}$ súlykoefficiens-mátrixát. A (3.3)-nak megfelelően az ismeretlenek függvényei

$$\begin{aligned} \Delta m_{ji} &= x_2 - x_1 \\ \Delta m_{ki} &= x_3 - x_1 \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ezzel minden szükséges kiinduló adat a rendelkezésünkre áll, tehát hozzákezdhetünk a (3.10) jelöléseinek megfelelő transzformálandó A hipermátrix előállításához. A (3.7) szerint és a (3.8) figyelembevételével

$$\underset{(7,3)}{\widetilde{\mathbf{A}}} = \underset{(7,7)}{\mathbf{P}^{1/2}}\ \underset{(7,3)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.414 & & 1.414 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és hasonlóképpen

$$\underset{(7,1)}{\widetilde{\mathbf{l}}} = \underset{(7,7)}{\mathbf{P}^{1/2}}\ \underset{(7,1)}{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} -148.501 \\ -110.011 \\ -7.068 \\ -19.980 \\ -10.006 \\ -109.991 \\ -115.007 \end{bmatrix}$$

Így tehát a (3.10) jelöléseinek megfelelően a transzformálandó $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underset{(7,3)}{\widetilde{\mathbf{A}}} & \underset{(7,1)}{\widetilde{\mathbf{l}}} \\ \hline \underset{(3,3)}{\mathbf{E}} & \underset{(3,1)}{\mathbf{0}} \\ \hline \underset{(2,3)}{\mathbf{F}} & \underset{(2,1)}{\mathbf{d}} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1.414 & 0 & 0 & -148.501 \\ 0 & 0 & 1 & -110.011 \\ -1.414 & 0 & 1.414 & -7.068 \\ -2 & 2 & 0 & -19.980 \\ 0 & 2 & -2 & -10.006 \\ 0 & 0 & 1 & -109.991 \\ 0 & 1 & 0 & -115.007 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az általánosított mátrix-ortogonalizációs eljárást alkalmazva – az (1.2)-vel szimbolizált transzformáció után – az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrixból az alábbi $\hat{\mathbf{W}}$ hipermátrixot kapjuk

$$\begin{bmatrix} \underset{(7,3)}{\widetilde{\mathbf{W}}} & \underset{(7,1)}{\widetilde{\mathbf{v}}} \\ \hline \underset{(3,3)}{\widetilde{\mathbf{R}}^{-1}} & \underset{(3,1)}{\widetilde{\mathbf{x}}} \\ \hline \underset{(2,3)}{\mathbf{F}\widetilde{\mathbf{R}}^{-1}} & \underset{(2,1)}{\widetilde{\mathbf{f}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2673 & -0.4332 & -0.0032 \\ 0 & 0 & 0.5045 & -0.0097 \\ -0.5 & -0.2673 & 0.2803 & -0.0069 \\ -0.7071 & 0.3780 & 0.1081 & 0.0072 \\ 0 & 0.7560 & -0.2883 & -0.0046 \\ 0 & 0 & 0.5045 & 0.0103 \\ 0 & 0.3780 & 0.3604 & -0.0051 \\ 0.3535 & 0.1890 & 0.3063 & 105.0083 \\ 0 & 0.3780 & 0.3604 & 115.0019 \\ 0 & 0 & 0.5045 & 110.0001 \\ -0.3535 & 0.1890 & 0.0540 & 9,9936 \\ -0.3035 & -0.1890 & 0.1982 & 4.9929 \end{bmatrix}$$

Figyelembe véve a (3.11) összefüggéseket és a (3.9) jelölést:

$$\underset{(7,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(7,7)}{\mathbf{P}^{-1/2}} \underset{(7,1)}{\widetilde{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0032 \\ -0.0097 \\ -0.0069 \\ 0.0072 \\ -0.0046 \\ 0.0103 \\ -0.0051 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0023 \\ -0.0097 \\ -0.0049 \\ 0.0036 \\ -0.0023 \\ 0.0103 \\ -0.0051 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(3,1)}{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 105.0083 \\ 115.0019 \\ 110.0001 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2,1)}{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 9.9936 \\ 4.9929 \end{bmatrix}$$

A (3.5) és a (3.12a) összefüggés szerint az ismeretlenek súlykoefficiens-mátrixa:

$$\underset{(3,3)}{\mathbf{Q}_{(\mathbf{x})}} = \underset{(3,3)}{\mathbf{R}^{-1}} \underset{(3,3)}{\mathbf{R}^{-*}} = \begin{bmatrix} 0,3535 & 0.1890 & 0.3063 \\ 0 & 0.3780 & 0.3063 \\ 0 & 0 & 0.5045 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3535 & 0 & 0 \\ 0.1890 & 0.3780 & 0 \\ 0.3063 & 0.3063 & 0.5045 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2545 & 0.1653 & 0.1545 \\ 0.1653 & 0.2367 & 0.1545 \\ 0.1545 & 0.1545 & 0.2545 \end{bmatrix}$$

a (3.0) és a (3.12b) összefüggés szerint a kiegyenlített mennyiségek súlykoefficiens-mátrixa pedig:

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{Q}_{(\mathbf{f})}} = \underset{(2,3)}{\mathbf{FR}^{-1}} \underset{(3,2)}{(\mathbf{FR}^{-1})^*} = \begin{bmatrix} -0.3535 & 0.1890 & 0.0540 \\ -0.3535 & -0.1890 & 0.1982 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.3535 & -0.3535 \\ 0.1890 & -0.1890 \\ 0.0540 & 0.1982 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1636 & 0.0999 \\ 0.0999 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

Mint ismeretes, a súlykoefficiens-mátrixokból a szükséges variancia-kovariancia mátrixok a súlyegység középhibájának négyzetével való szorzással adódnak [2]:

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{x})} = \mu_0^2 \mathbf{Q}_{(\mathbf{x})}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{f})} = \mu_0^2 \mathbf{Q}_{(\mathbf{f})}$$

ahol

$$\mu_0^2 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^* \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-r}}$$

a súlyegység középhibája.

Ez esetünkben

$$\mu_0^2 = \frac{0.0004}{7-3} = 0.0001$$

Végül a keresett középhibák a megfelelő variancia-kovariancia mátrix főátlójának elemeiből nyerhetők négyzetgyökvonással. Így

$$x_1 = m_i = 105.0083 \pm 0.0050\, m$$

$$x_2 = m_j = 115.0019 \pm 0.0048\, m$$

$$x_3 = m_k = 110.0001 \pm 0.0050\, m$$

és

$$f_1 = \Delta m_{ji} = 9.9936 \pm 0.0040\, m$$

$$f_2 = \Delta m_{ki} = 4.9929 \pm 0.0045\, m \;.$$

4. Közvetlen mérések kiegyenlítése feltételekkel

A [2] jelöléseinek megfelelően írjuk a már linearizált feltételi egyenleteket a

$$\underset{(f,n)}{\mathbf{B}^*} \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} + \underset{(f,1)}{\mathbf{l}} = \underset{(f,1)}{\mathbf{0}} \tag{4.1}$$

alakban, ahol f a fölös mérések száma, **B** a feltételi egyenletek együtthatómátrixa, **v** a javítások vektora, **l** pedig az ellentmondások vektora. Egységsúlyú mérések esetén a

$$\mathbf{v}^*\mathbf{v} - 2\mathbf{k}^*(\mathbf{B}^*\mathbf{v} + \mathbf{l}) = \min.$$

feltételes szélsőértékből a

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,f)}{\mathbf{B}}\,\underset{(f,1)}{\mathbf{k}} \tag{4.2}$$

ún. korreláta-egyenlet adódik, ahol **k** a korreláták vektora. A (4.2) kifejezést a (4.1)-be behelyettesítve a

$$\mathbf{B}^*\mathbf{B} = \mathbf{N}$$

jelöléssel az

$$\mathbf{N}\mathbf{k} + \mathbf{l} = \mathbf{0} \tag{4.3}$$

normálegyenlethez jutunk, amiből

$$\underset{(f,1)}{\mathbf{k}} = -\underset{(f,f)}{\mathbf{N}^{-1}}\,\underset{(f,1)}{\mathbf{l}}$$

és végül ezt a (4.2)-be helyettesítve:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{B}\mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{l}$$

amelynek felhasználásával a kiegyenlített mérési eredmények

$$\mathbf{U} = \mathbf{L} + \mathbf{v}$$

ahol **L** a mért értékek vektora.

Egyszerűen belátható, hogy az általánosított mátrixortogonalizáció módszerének alkalmazásával a (4.3) normálegyenletek felállítását és megoldását megkerülve ugyanerre az eredményre jutunk. Ebben az esetben az (1.3) és az (1.4) által leírt (1.2) transzformáció:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,f)}{\mathbf{B}} & \underset{(n,s)}{\mathbf{F}^*} \\ \hline \underset{(1,f)}{\mathbf{l}^*} & \underset{(1,s)}{\mathbf{d}^*} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,f)}{\mathbf{W}} & \underset{(n,s)}{\mathbf{Q}^*} \\ \hline \underset{(1,f)}{(\mathbf{l}\mathbf{R}^{-1})^*} & \underset{(1,s)}{\mathbf{f}^*} \end{array}\right] \tag{4.4}$$

ahol

$$\underset{(s,1)}{\mathbf{f}} = \underset{(s,n)}{\mathbf{F}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} + \underset{(s,1)}{\mathbf{d}}$$

a (3.3)-hoz hasonlóan a kiegyenlített mennyiségek függvényei. Gépi számítás esetén a (4.4) transzformáció számításakor a közölt FORTRAN szubrutint a

```
CALL ORT(A,N,R,N+1,F+S)
```

az ALGOL 60 eljárást pedig az

```
ort (a,n,r,n+1,f+s)
```

utasítással kell aktivizálni.

Az (1.5) összefüggések figyelembevételével az $\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{R}$ felbontást felhasználva

$$\underset{(f,f)}{\mathbf{N}} = \underset{(f,f)}{\mathbf{R}^*}\,\underset{(f,f)}{\mathbf{R}} \tag{4.5}$$

$$\underset{(f,1)}{\mathbf{k}} = -\underset{(f,f)}{\mathbf{R}^{-1}}\,\underset{(f,1)}{(\mathbf{l}\mathbf{R}^{-1})} \tag{4.6}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = -\underset{(n,f)}{\mathbf{W}}\,\underset{(f,1)}{(\mathbf{l}\mathbf{R}^{-1})} \tag{4.7}$$

$$\underset{(n,s)}{\mathbf{Q}^*} = \underset{(n,s)}{\mathbf{F}^*} - \underset{(n,f)}{\mathbf{W}}\,\underset{(f,n)}{\mathbf{W}^*}\,\underset{(n,s)}{\mathbf{F}^*} \tag{4.8}$$

$$\underset{(1,s)}{\mathbf{f}^*} = \underset{(1,s)}{\mathbf{d}^*} - \underset{(1,f)}{(\mathbf{lR}^{-1})^*}\,\underset{(f,n)}{\mathbf{W}^*}\,\underset{(n,s)}{\mathbf{F}^*} \tag{4.9}$$

Ezekből a számunkra legfontosabb összefüggések a (4.7) és a (4.8). A (4.7) azt mutatja, hogy ez a kiegyenlítési probléma is igen egyszerűen megoldható a normálegyenletek kikerülésével, – ugyanis a (4.4) transzformáció elvégzése után a transzformált $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix két blokkjának szorzata a keresett javítások vektorát adja. A (4.5) és a (4.6) összefüggések azt mutatják, hogy a normálegyenletek együtthatómátrixa és a korreláták vektora is meghatározható, – azonban ezekre semmi szükségünk sincs, mivel a különböző varianciák és kovarianciák számításához szükséges súlykoefficiens mátrixok most is igen egyszerűen adódnak a transzformált $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix megfelelő blokkjainak felhasználásával [3]. Így a kiegyenlített mérési eredmények súlykoefficiens mátrixa:

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{(\mathbf{u})}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}^* = \underset{(n,n)}{\mathbf{E}} - \underset{(n,f)}{\mathbf{W}}\,\underset{(f,n)}{\mathbf{W}^*}$$

a kiegyenlített mennyiségek függvényeinek súlykoefficiens-mátrixa pedig

$$\underset{(s,s)}{\mathbf{Q}_{(\mathbf{f})}} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_{(\mathbf{u})}\mathbf{F}^* = \underset{(s,n)}{\mathbf{Q}}\,\underset{(n,s)}{\mathbf{Q}^*}$$

Az előző kiegyenlítési problémánál tárgyalt változtatásokkal a (4.4) transzformáció is alkalmassá tehető nem egységsúlyú mérések kiegyenlítésére.

Végül fontos megemlíteni, hogy az általánosított mátrix-ortogonalizációs eljárással megoldható a kiegyenlítő számítás további két alapfeladata is: a közvetett mérések kiegyenlítése az ismeretlenek között megadott feltételekkel és a közvetlen mérések kiegyenlítése feltételekkel és nem mért ismeretlenekkel [3]. A közölt számítógép-programok megfelelő értelmezéssel ezen feladatok megoldására is alkalmasak.

IRODALOM

1. Völgyesi L.: A numerikus matematikai módszerek választásának néhány kérdése és a mátrix-ortogonalizációs módszer alkalmazása a kiegyenlítő számításban. Geodézia és Kartográfia 1979/5
2. Detrekői Á.: Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
3. Charamza F.: Orthogonalization Algorithm for solving the Fundamental problems of the Calculus of Observations. Geofisikálni Sbornik, 1971, XIX.

Practical application of the matrix orthogonalization method in adjustment

Dr. L. Völgyesi

Summary

In certain cases the application of the matrix orthogonalization method may be advantageous in adjustment. The orthogonalization method avoids the setting up and the solution of the normal equations and it provides the wanted quantities directly by application of matrix transformations. In this study the practical application of the matrix-orthogonalization method is presented for the two basic problems of adjustment: adjustment of indirect observations and adjustment with conditions, and computer programs in FORTRAN and ALGOL-60 languages are also presented for the solution of these problems. Finally application of orthogonalization method in geodesy is demonstrated by numerical example.

* * *

Völgyesi L. (1980) A mátrix-ortogonalizációs módszer gyakorlati alkalmazása a kiegyenlítõ számításban. Geodézia és Kartográfia, Vol. 32, Nr. 1. pp. 7-15.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.
Web: http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi E-mail: volgyesi@eik.bme.hu