A numerikus matematikai módszerek választásának néhány kérdése és a mátrix-ortogonalizációs módszer alkalmazása a kiegyenlítő számításban

Dr. Völgyesi Lajos

A tanulmány első részében röviden áttekintjük a kiegyenlítő számításban a számítógépes problémamegoldás során fellépő hibák néhány lehetséges forrását, és felhívjuk a figyelmet a számítások során az adott kiegyenlítési feladatokhoz legjobban illeszkedő numerikus matematikai módszer kiválasztásának fontosságára. Megmutatjuk, hogy léteznek olyan kiegyenlítési problémák, amelyeknek a szokásos úton – nevezetesen a normálegyenletek felállításán keresztül – való megoldása nem vezet a várt eredményre, ezért esetenként célszerűtlen a szokásos módszer alkalmazása. Látni fogjuk, hogy ilyen esetekben másik numerikus módszer, az ún. mátrix-ortogonalizácós eljárás használata célravezetőbb, mivel ezzel megkerülhetjük a normálegyenletek felállítását, és megfelelő mátrix-transzformációk alkalmazásával közvetlenül nyerhetjük a kívánt megoldást. Megmutatjuk, hogy a szóban forgó két módszer elvileg azonos megoldást szolgáltat, de az ortogonalizációs módszerrel nyerhető megoldás numerikusan stabilabb.

1. Hibaforrások a kiegyenlítési problémák számítógépes megoldása esetén

A nagy számú ismeretlent tartalmazó feladatok számítógépes kiegyenlítésekor több körülmény is döntő hatással lehet a megoldás pontosságára. Valamely megoldás pontosságának jelentősebb csökkenését az alábbi alapvető hibaforrások okozhatják [15]:

a) A matematikai modell választásából adódó hibák.

Minden feladat megoldásához először matematikai modellt kell választani, mely azonban az adott feladatot csak bizonyos egyszerűsítésekkel és elhanyagolásokkal közelíti.

b) A numerikus matematikai eljárások hibái

Az a) pontban kiválasztott matematikai modell különböző numerikus eljárásokkal lehet kapcsolatos, amelyek elvileg azonos megoldásra vezetnek, azonban a gyakorlatban ezek a megoldások többé-kevésbé eltérnek egymástól. Ebben szerepük lehet pl. a különböző numerikus közelítő módszerek alkalmazásának stb.

c) A mérésnek tulajdonítható hibák

A számításra kerülő mérési eredményeket többnyire a mérőműszerek által meghatározott véges pontosság következtében hibák terhelik. Ha valamely egyenletrendszer együtthatóiból alkotott mátrix és a tisztatagok vektora méréssel és számítással meghatározott mennyiségek – vagyis csak közelítően ismeretesek – akkor az „elvi” egyenletrendszernek csupán egy közelítését ismerjük.

d) Kerekítési hibák

A számítógépek korlátozott számábrázolása valamint az elemi műveletek – különösképpen a $\Sigma a_i b_i$ típusú szorzatösszegek – számítása jelentős kerekítési hibaforrást rejt magában [12]. Ha valamely számítássorozatban a műveleteket csak korlátozott pontossággal tudjuk elvégezni, az egyes műveletekben vétett kerekítési hibák döntő hatással lehetnek a számítás végén nyert megoldás pontonságára.

Ezek után értelmezzük kissé részletesebben a felsorolt hibatípusokat.

A geodéziai feladatok jelentős részében valamely probléma kiegyenlítése a Gauss-féle hibaelmélet alapján, a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával történik. Ezzel az *a)* pont értelmében adott egy lehetséges matematikai megfogalmazás. Természetesen nem ez az egyetlen létező modell, és esetenként nem is célszerű ezt választani.

Valamely feladat megoldása különböző numerikus matematikai módszerekkel lehet kapcsolatos. Az *a)* és a *b)* pont összefügg egymással, mivel a különböző matematikai modellek más-más numerikus módszereket tartalmazhatnak.

A matematikai modell és a megfelelő numerikus eljárás kiválasztását követően a hibaterjédés törvényeinek, valamint a végeredmény pontossági követelményeinek ismeretében a mérési pontosságot a *c)* pont figyelembevételével határozhatjuk meg. Pontosabban: mivel ezek szorosan összefüggenek, ezért az *a)* alatti modell és a *b)* szerinti numerikus eljárás megválasztása, valamint a megfelelő mérési pontosság meghatározása együttesen célszerű.

A számítás végén nyert eredmény pontosságát nagymértékben befolyásolhatják a *d)* pontban leírt kerekítési hibák. Kiküszöbölésükre, pontosabban csökkentésükre két lehetőség kínálkozik. Az egyik: megfelelő számítógép esetén dupla pontosságú számábrázolás használata a skalárszorzatok (szorzatösszegek) gyűjtésekor, a másik: az adott feladathoz legjobban illeszkedő matematikai modell és numerikus eljárás kiválasztása. Célszerű például azokat a numerikus módszereket előnyben részesítenünk, amelyekkel a számítások során a legkevesebb számú $\Sigma a_i b_i$ típusú szorzatösszeget kell képeznünk [12].

A kiegyenlítési problémákat elemezve szép számmal találhatunk olyan feladatokat, amelyek esetében a leggyakrabban alkalmazott módszer – amely a normálegyenletek felállításán és megoldásán keresztül vezet a megoldáshoz – nem nyújtja az előre várt pontosságot, sőt esetenként a megoldás hibája nagyságrendekkel meghaladhatja az előírt hibakorlátokat. Ilyen problémák adódhatnak például bizonyos graviméteres hálózatok kiegyenlítésekor, mesterséges holdak pályaelemeinek és a megfigyelőállomások koordinátáinak meghatározása esetén, vagy például Eötvös-inga mérések alapján interpolált függővonal-elhajlások számításakor [1, 6, 19].

A következőkben a normálegyenletek megoldásával kapcsolatban tett néhány megjegyzésünkkel szeretnénk megvilágítani azt, hogy az ún. gyengén kondicionált (gyengén meghatározott) kiegyenlítési problémák esetén a normálegyenletek felállításán és megoldásán keresztül vezető számítási módszer nem elegendően pontos, sőt néhány esetben használhatatlan megoldást szolgáltat.

Jelölje a

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\,\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \qquad (n>r) \tag{1.1}$$

javítási egyenlet valamely kiegyenlítési probléma linearizált közvetítő egyenleteinek javításra kifejezett alakját – ahol $\mathbf{v}$ a javítások vektora, $\mathbf{A}$ a javítási egyenletek együtthatómátrixa, $\mathbf{x}$ az ismeretlenek- és $\mathbf{l}$ a tisztatagok vektora.

Amint ismeretes, egységsúlyú mérések esetén a

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{v}}^{*} \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \min. \tag{1.2}$$

feltétel az

$$\underset{(r,n)}{\mathbf{A}}^{*} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{n}} \tag{1.3}$$

és az

$$\underset{(r,n)}{\mathbf{A}}^{*} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} = \underset{(r,r)}{\mathbf{N}} \tag{1.4}$$

jelöléseket felhasználva kielégíthető az

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{N}} \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{n}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{0}} \tag{1.5}$$

nomálegyenletek által, amelyből

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = -\underset{(r,r)}{\mathbf{N}}^{-1} \underset{(r,1)}{\mathbf{n}} \tag{1.6}$$

Az (1 .4) szerint képezhető $\mathbf{N}$ mátrixot nevezzük az (1.5)-tel jelölt normálegyenletek együtthatómátrixának: (Megjegyezzük, hogy a továbbiakba. valamely $\mathbf{A}$ mátrix (vagy vektor) transzponáltját $\mathbf{A}^{*}$-gal, inverzét $\mathbf{A}^{-1}$-gyel és az inverzének transzponáltj át $\mathbf{A}^{-*}$ -gal jelöljük.)

Látható tehát, hogy a normálegyenletek $\mathbf{N}$ együtthatómátrixa és $\mathbf{n}$ vektora a javítási egyenletek $\mathbf{A}$ együtthatómátrixának és $\mathbf{l}$ tisztatagjának függvénye. Mivel a közvetítő egyenletek együtthatói mérések alapján számítással meghatározott mennyiségek, ezért a *b)* pont szerint a megoldandó „elméletileg pontos" egyenletrendszernek csupán egy közelitését ismerjük és oldhatjuk meg. Ha az elméletileg pontos egyenletrendszernek egyértelmű megoldása létezik, egyáltalán nem biztos, hogy a közelítésnek is van egyértelmű megoldása; mely azonos az előző megoldással. Felmerül tehát a kérdés, hogy valamely egyértelmű megoldással rendelkező lineáris egyenletrendszer együtthatóit mennyire lehet megváltoztatni, hogy az új közelítő rendszernek is szükségképpen egyértelmű megoldása legyen, és a két rendszer megoldása valamilyen értelemben elég közel essen egymáshoz. Ezzel a kérdéssel függ össze, hogy valamely invertálható $\mathbf{N}$ mátrixot kicsit megváltoztatva, az így nyert $\widetilde{\mathbf{N}}$ mátrixnak milyen feltételek mellett van inverze, továbbá az $\mathbf{N}^{-1}$ és az $\widetilde{\mathbf{N}}^{-1}$ mátrix eltérése milyen feltételek esetén lesz valamilyen értelemben kicsi.

Vezessük be ezek után a stabil és az instabil inverz mátrix fogalmát. Valamely inverz mátrixot stabilnak nevezünk, ha az eredeti mátrix elemeinek kicsi változása az inverz mátrix elémeinek arányos kis megváltozását eredményezi, ellenkező esetben pedig instabilnak mondjuk [12].

A stabil inverz mátrix eredeti mátrixát jól kondicionált (jól meghatározott), az instabil inverz mátrix eredeti mátrixát pedig gyengén kondicionált (gyengén meghatározott) mátrixnak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a mátrixok kondicionáltsága jól jellemezhető az ún. kondíciószámukkal. A továbbiakban az ismertebb definíciók közül valamely $\mathbf{N}$ mátrix kondíciószámán a

$$cond(\mathbf{N}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} \tag{1.7}$$

számértéket (az ún. Todd-féle számot) értjük, ahol λ_i (i=1, 2, ... , r) az **N** mátrix sajátértékei. A definíció szerint jól kondicionált mátrixok kondíciószáma kicsi; gyengén kondicionált mátrixok kondíciószáma pedig igen nagy [12, 14].

Ha valamely gyengén kondicionált mátrix elemei csak közelítőleg ismerétesek, akkor ez a mátrix a gyakorlatban könnyen szingulárisnak mutatkozhat. Előfordulhat ugyanis, hogy az „elméleti" mátrix determinánsa zérustól különbözik, de a mátrixnak akár egyetlen elemét is a mérési vagy a számítási pontosságon belül megváltoztatva zérus determinánsú mátrixot kapunk. Például az

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 4+\delta & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 9 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa $\delta = 0$ esetén $\det(\mathbf{N}) = 1$, viszont $\delta = -1/156$ esetén $\det(\mathbf{N}) = 0$, tehát a mátrixot gyakorlatilag szingulárisnak kell tekinteni [12].

Olyan egyenletrendszer esetében, amelynek mátrixa gyengén kondicionált, az együtthatók egészen kicsi megváltozása a megoldásvektor nagyságrendekkel történő megváltozását eredményezheti. Vizsgáljuk meg például az

$$\begin{aligned} x_1 + 100.0x_2 & - 101.0 \\ x_1 + 100.1x_2 & = 100.1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert [12]. Az együtthatómátrix (1.7) szerinti kondíciószáma igen nagy, tehát a mátrix gyengén kondicionált. Az egyenletrendszer megoldása $x_1 = 1$; $x_2 = 1$. Az egyenletrendszer első sorának első együtthatóját mindössze $-1/1011$ értékkel megváltoztatva $x_1 = 101.1$; $x_2 = 0$ adódik !

Végül szeretnénk azt szemléltetni, hogy bizonyos kiegyenlítési problémák eleve gyengén kondicionált mátrixú normálegyenletekhez vezetnek [11].

(Ezeket a problémákat gyengén kondicionált kiegyenlítési problémáknak nevezhetjük.) Tekintsük például az alábbi esetet [11]! Legyen a javítási egyenletek együtthatómátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}$$

ahol δ tetszőleges változó. Az (1.4) szerint

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+\delta^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\delta^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\delta^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\delta^2 \end{bmatrix}$$

amelynek az (1.7) definíció szerint a kondíciószáma $\delta \to 0$ esetén

$$\lim_{\delta \to 0} cond(\mathbf{N}) = \lim_{\delta \to 0} (5+\delta^2)\delta^{-2} = \infty$$

Hasonló példák nagy számban találhatók, a tárgyalásuktól azonban eltekintünk.

Az előbbi példa mintájára léteznek olyan kiegyenlítési problémák, amelyek eleve gyengén meghatározott mátrixú normálegyenletekhez vezetnek. Azt is tudjuk, hogy valamely gyengén kondicionált együtthatómátrix esetében az együtthatókat a mérési vagy a számítási pontosságon belül megváltoztatva a megoldásvektor akár nagyságrendekkel is megváltozhat. Ilyen esetekben pedig a normálegyenletek felállításán és megoldásán keresztül vezető kiegyenlítési eljárás használhatóságát kétségbe kell vonnunk. A *b)* pont értelmében gyengén kondicionált kiegyenlítési problémák esetében a fenti kiegyenlítési módszer használata nem célravezető, tehát szükségesnek tűnik egy olyan módszer ismerete, amely a normálegyenletek együtthatómátrixának gyenge meghatározottsága esetén is kielégítő megoldást biztosít.

A következőkben olyan matematikai modellt vázolunk fel, amelynek alkalmazásával megkerülhető a normálegyenletek felállítása és megoldása, és amely a javítási (vagy a feltételi) egyenletek együtthatómátrixából bizonyos mátrix-transzformációk alkalmazásával közvetlenül szolgáltatja a megoldást. Ez a módszer - az ún. mátrixortogonalizációs eljárás – a normálegyenletek megkerülésével gyengén meghatározott kiegyenlítési problémák megoldására is hatékonyan alkalmazható [7].

A szóban levő kiegyenlítési eljárás tárgyalása előtt azonban célszerű röviden áttekinteni a szükséges matematikai alapfogalmakat.

2. Ortogonális mátrixok és a mátrix-ortogonalizáció alapelve

Mint ismeretes, valamely valós kvadratikus $\mathbf{W}$ mátrix akkor ortogonális (ortonormális), ha a $\mathbf{W}^*$ transzponáltja megegyezik a $\mathbf{W}^{-1}$ inverzével:

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^* \tag{2.1}$$

vagy másképpen

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^* = \mathbf{W}^*\mathbf{W} = \mathbf{E} \tag{2.2}$$

ahol $\mathbf{E}$ egységmátrix [14].

A definíciókból az ortogonális (ortonormális) mátrixok néhány fontos tulajdonsága következik:

1. ortogonális mátrix sorai és oszlopai páronként ortogonálisak. A $\mathbf{W} = [w_{ij}]$ jelöléssel $i \neq j$ esetén:

$$\sum_{k=1}^{n} w_{ik} w_{jk} = 0$$

és

$$\sum_{k=1}^{n} w_{ki} w_{kj} = 0 \ .$$

2. Ortogonális mátrix bármely sorának vagy oszlopának elemeiből alkotott négyzetösszeg 1-gyel egyenlő:

$$\sum_{k=1}^{n} w_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{n} w_{ki}^2 = 1 \ .$$

3. Ortogonális mátrixok inverze és transzponáltja szintén ortogonális. Ugyanis a (2.1)-ben transzponált mátrixokra áttérve:

$$(\mathbf{W}^{-1})^* = (\mathbf{W}^*)^* = \mathbf{W} = (\mathbf{W}^{-1})^{-1} \ .$$

Először megmutatjuk hogyan állíthatjuk elő valamely tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális oszlopokkal rendelkező $^{\mathbf{o}}\mathbf{W}$, vagy ortogonális sorokkal rendelkező $^{\mathbf{s}}\mathbf{W}$ mátrixát.

Legyen a következő valós kvadratikus mátrixunk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

és tekintsük ezen $\mathbf{A}$ mátrix oszlopait vektoroknak:

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

így

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} .$$

Legyen a továbbiakban az $\mathbf{A}$ mátrix nem szinguláris, tehát $\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Keressük a $^{\mathbf{o}}\mathbf{W}$ ortogonális oszlopokkal rendelkező mátrixot is a

$$^{\mathbf{o}}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix}$$

alakban, ahol $\mathbf{w}_i \quad (i = 1, 2, \dots n)$ a kívánt ortogonális oszlopok.

Legyen

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 \tag{2.3}$$

majd bontsuk fel az $\mathbf{a}_2$ vektort a $h_{12}\mathbf{w}_1$ és a $\mathbf{w}_2$ komponenseire úgy, hogy a $h_{12}\mathbf{w}_1$ iránya egybeessen a $\mathbf{w}_1$ irányával, a $\mathbf{w}_2$ pedig merőleges egyen erre [8, 16] – ahogyan az 1. ábrán is látható. Ekkor

$$\mathbf{a}_2 = h_{12}\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \tag{2.4}$$

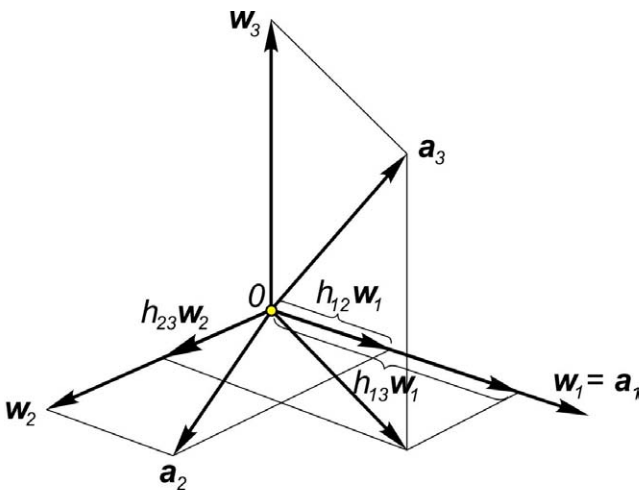
a $\mathbf{w}_1$ és a $\mathbf{w}_2$ skalárszorzata pedig a merőlegesség (ortogonalitás) miatt zérus:

$$\sum_{k=1}^{n} w_{k1} w_{k2} = 0 \ ,$$

vagy a szokásos j elöléssel:

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0 \ . \tag{2.5}$$

Hasonlóképpen bonthatjuk fel az $\mathbf{a}_3$ vektort is három komponensére: $h_{12}\mathbf{w}_1$, $h_{23}\mathbf{w}_2$ és $\mathbf{w}_3$; úgy, hogy az első két komponens iránya egybeessen $\mathbf{w}_1$ és a $\mathbf{w}_2$ irányával, a $\mathbf{w}_3$ pedig merőleges ezekre – ahogyan az 1. ábrán látható.



1. ábra

Ekkor

$$\mathbf{a}_3 = h_{13}\mathbf{w}_1 + h_{23}\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 \tag{2.6}$$

és az ortogonalitás miatt

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3) &= 0 \\ (\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tovább folytatva, az $\mathbf{A}$ mátrix n-ik oszlopa így írható:

$$\mathbf{a}_n = h_{1n}\mathbf{w}_1 + h_{2n}\mathbf{w}_2 + ... + h_{n-1,n}\mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}_n \tag{2.8}$$

és az ortogonalitás miatt

$$\begin{aligned} &(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_n) = 0 \\ &(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_n) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &(\mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_n) = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

A (2.3) ÷ (2.9) összefüggésekből már könnyen meghatározhatjuk a ... , $\mathbf{w}_i$, ... , $\mathbf{w}_j$, ... vektorokat és a h_{ij} együtthatókat. A h_{ij} értékek meghatározása érdekében szorozzuk meg először a (2.4) mindkét oldalát. skalárisan a vektorral, és vegyük figyelembe a (2.7) összefüggést. Ekkor

$$(\mathbf{a}_2, \mathbf{w}_1) = h_{12}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)$$

és ha az $\mathbf{A}$ mátrix nem szinguláris, akkor

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{w}_1 \neq 0$$

tehát

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) \neq 0$$

és így

$$h_{12} = \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)}$$

Hasonlóképpen a (2.6) mindkét oldalát megszorozva $\mathbf{w}_2$-vel, illetve $\mathbf{w}_3$-mal, továbbá figyelembe véve a (2.7) összefüggéseket

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_3, \mathbf{w}_1) &= h_{13}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) \\ (\mathbf{a}_3, \mathbf{w}_2) &= h_{23}(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2) \end{aligned}$$

és ebből ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris

$$h_{13} = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)} \quad ,$$

$$h_{23} = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{w}_2)}{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2)} \quad .$$

Tovább folytatva az eljárást

$$h_{ij} = \frac{(\mathbf{a}_j, \mathbf{w}_i)}{(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i)} \quad (i < j) \tag{2.10}$$

vagyis a h_{ij} együtthatók a

$$
\begin{array}{llll}
h_{12} & & & \\
h_{13} & h_{23} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
h_{1n} & h_{2n} & \dots & h_{n-1,n}
\end{array}
$$

sorrendben meghatározhatók és ezzel a keresett

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 \\
&\mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - h_{12}\mathbf{w}_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\mathbf{w}_n = \mathbf{a}_n - h_{1n}\mathbf{w}_1 - h_{2n}\mathbf{w}_2 - \dots - h_{n-1,n}\mathbf{w}_{n-1}
\end{aligned}
$$

ortogonális vektorrendszer előállítható. Ugyanez rövidebben:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 \\
&\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\mathbf{a}_i, \mathbf{w}_k)}{(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k)} \mathbf{w}_k \qquad (i = 2, 3, \dots n)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Végül tehát az $\mathbf{A}$ mátrix felírható az alábbi két mátrix szorzataként:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
$$

vagy rövidebben

$$
\underset{(n,n)}{\mathbf{A}} = \underset{(n,n)}{{}^{\mathbf{o}}\mathbf{W}} \; \underset{(n,n)}{\mathbf{H}} \tag{2.12}
$$

ahol ${}^{\mathbf{o}}\mathbf{W} = [w_{ij}]$ ortogonális oszlopokkal rendelkező mátrix (amely oszlopaiból alkotott vektorok páronként merőlegesek egymásra), a $\mathbf{H} = [h_{ij}]$ pedig felső háromszögmátrix, a főátlójában csupa egyesekkel.

Hasonló felbontás végezhető el, ha az $\mathbf{A}$ mátrix sorait tekintjük vektoroknak és ezeket ortogonalizáljuk. Ekkor

$$
\underset{(n,n)}{\mathbf{A}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{H}'} \; \underset{(n,n)}{{}^{\mathbf{s}}\mathbf{W}} \tag{2.13}
$$

hol a $\mathbf{H}'$ mosd alsó háromszögmátrix a főátlójában csupa egyesekkel, a ${}^{\mathbf{s}}\mathbf{W}$ pedig ortogonális sorokkal rendelkező mátrix.

Kijelenthetjük tehát, hegy bármely nem szinguláris valós mátrix felbontható egy ortogonális oszlopokkal rendelkező mátrix és egy felső háromszögmátrix szorzatára (2.12) ; vagy pedig egy alsó háromszögmátrix és egy ortogonális sorokkal rendelkező mátrix szorzatára (2.13).

Második lépésként megmutatjuk, hogy bármely valós ortogonális sorokkal vagy oszlopokkal rendelkező mátrix felbontható egy ortogonális és egy diagonálmátrix szorzatára.

Tudjuk, hogy ha valamely valós mátrix oszlopai ortogonális vektorrendszert képeznek, akkor e mátrix transzponáltjának és magánk a mátrixnak a szorzata diagonálmátrixot eredményez, mivel

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} w_{ki} w_{kj} = (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \quad \begin{cases} = 0 & ha \quad i \neq j \\ \neq 0 & ha \quad i = j \end{cases}$$

az ortogonalitás miatt. Így tehát

$$\underset{(n,n)}{{}^{\circ}\mathbf{W}^{*}} \; \underset{(n,n)}{{}^{\circ}\mathbf{W}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{D}} \qquad (2.14)$$

ahol

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonálmátrix. Mivel

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} w_{ki}^2 > 0$$

ezért bevezetjük a

$$g_i = \sqrt{d_{ii}} > 0$$

értékét és ennek segítségével definiáljuk a

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & g_n \end{bmatrix}$$

mátrixot.

Belátható, hogy $\mathbf{D} = \mathbf{G}^2$, ezért (2.14) így is írható:

$$\underset{(n,n)}{{}^{\circ}\mathbf{W}^{*}} \; \underset{(n,n)}{{}^{\circ}\mathbf{W}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{G}^2}$$

amiből

$$\mathbf{G}^{-1} \, {}^{\circ}\mathbf{W}^{*} \, {}^{\circ}\mathbf{W} \, \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{E}$$

Mivel $(\mathbf{G}^{-1})^{*} = \mathbf{G}^{-1}$, ezért

$$({}^{\mathbf{o}}\mathbf{W}\mathbf{G}^{-1})^{*}\,({}^{\mathbf{o}}\mathbf{W}\,\mathbf{G}^{-1}) = \mathbf{E}$$

tehát a (2.2) értelmében a

$${}^{\mathbf{o}}\mathbf{W}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{W} \tag{2.15}$$

ortogonális mátrix, vagyis a ${}^{\mathbf{o}}\mathbf{W}$ ortogonális oszlopokkal rendelkező mátrix a

$$\underset{(n,n)}{{}^{\mathbf{o}}\mathbf{W}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{W}}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{G}} \tag{2.16}$$

formában felbontható egy ortogonális és egy diagonálmátrix szorzatára. Hasonlóképpen igen egyszerűen belátható, hogy

$${}^{\mathbf{s}}\mathbf{W} = \mathbf{G}'\mathbf{W}' \ . \tag{2.17}$$

A (2.15) összefüggés a számunkra azért fontos, mert megadja, hogyan állíthatunk elő ortogonális mátrixot ortogonális oszlopokkal rendelkező mátrixból. A (2.15)-ben szereplő $\mathbf{G}^{-1}$ az eddigiek alapján így írható:

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1)}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_2)}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{w}_n,\mathbf{w}_n)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{w}_1\|_E} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|_E} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\|\mathbf{w}_n\|_E} \end{bmatrix}$$

ahol a

$$\|\mathbf{w}_i\|_E = \sqrt{(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_i)} = \sqrt{w_{1i}^2 + w_{2i}^2 + \ldots + w_{ni}^2}$$

a $\mathbf{w}_i$ vektor euklideszi normája. A (2.15) összefüggés alapján világos tehát, ha valamely ortogonális oszlopokkal (sorokkal) rendelkező mátrixot ortogonális mátrixszá kívánjuk transzformálni, akkor a megfelelő oszlopokat (sorokat) normalizálni kell, ami azt jelenti, hagy az oszlopok (sorok) valamennyi elemét el kell osztanunk a megfelelő oszlop (vagy sor) elemeinek négyzetösszegéből vont négyzetgyökével, azaz euklideszi normájával.

A most felírt összefüggéseken alapszik az ortogonalizációs eljárás, amelyet Gram-Schmidt eljárásnak nevezzünk [17] – és amellyel valamely valós, nemszinguláris $\mathbf{A}$ mátrixot egy $\mathbf{W}$ ortogonális mátrixszá tudunk transzformálni:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_E} \tag{2.18a}$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\mathbf{a}_i,\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k \tag{2.18b}$$

$$\mathbf{w}_i = \frac{\tilde{\mathbf{w}}_i}{\|\tilde{\mathbf{w}}_i\|_E} \quad (i = 2, 3, ..., n) \tag{2.18c}$$

Látható, hogy ez annyiban különbözik a (2.11) transzformációtól, hogy itt normalizáljuk is az oszlopokat. Ebben az esetben

$$\mathbf{A} = {}^{\mathbf{o}}\mathbf{W}\mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{G}\mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{R} \tag{2.19}$$

ahol nyilvánvalóan $\mathbf{R} = \mathbf{G}\mathbf{H}$ és

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a}_1\|_E \\ r_{ij} &= (\mathbf{a}_i, \mathbf{w}_j) \\ r_{ii} &= \|\tilde{\mathbf{w}}_i\|_E \end{aligned} \tag{2.20}$$

A (2.18) ortogonalizációs eljárásnak ismert egy másik módosított változata is, amelyet Gram-Schmidt eljárásnak nevezünk. Ez abban különbözik a (2.18) eljárástól, hogy a $\tilde{\mathbf{w}}_i$ vektorokat nem a (2.18b) szerint, hanem a következőképpen képezzük:

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{a}_i)^{(1)} &= \mathbf{a}_i \\ (\mathbf{a}_i)^{(k+1)} &= (\mathbf{a}_i)^{(k)} - ((\mathbf{a}_i)^{(k)}, \mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k \\ &(k = 1, 2, \; ... \; i-1) \\ \tilde{\mathbf{w}}_i &= (\mathbf{a}_i)^{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

A (2.18b) és a (2.21) algebrailag ekvivalens eljárások, azonban gépi számításoknál az utóbbi alkalmazása előnyösebb [13].

3. Az általánosított mátrix-ortogonalizáció alapelve

A következőkben olyan matematikai módszert vázolunk fel, amely közvetlenül alkalmas a kiegyenlítő számítás alapfeladatainak megoldására [7].

Partícionáljuk valamely $\hat{\mathbf{A}}$ mátrixot az

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hline \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, m \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{A_1}}_{r} \;\; \underbrace{\hphantom{A_2}}_{p} \end{array} \tag{3.1}$$

formában, ezáltal az $\hat{\mathbf{A}}$ hipermátrix elemei az $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ blokkok (almátrixok) lesznek. Nevezzük a páratlan indexű almátrixok együttesét bal oldali, a páros indexű almátrixok, együttesét pedig jobb oldali mátrixblokknak. Az ortogonalizáció során az $\mathbf{A}_1$ blokknak kitüntetett szerep jut, ezért fundamentális mátrixblokknak nevezzük.

Az általánosított mátrix-ortogonalizációs eljárás feladata az $\hat{\mathbf{A}}$ hipermátrix transzformációja egy azonos struktúrájú

$$\hat{\mathbf{W}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 \\ \hline \mathbf{W}_3 & \mathbf{W}_4 \end{array}\right] \begin{matrix} \}n \\ \}m \end{matrix} \tag{3.2}$$

$$\underbrace{\quad}_{r} \quad \underbrace{\quad}_{p}$$

hipermátrixba. Az

$$\hat{\mathbf{A}} \to \hat{\mathbf{W}} \tag{3.3}$$

transzformációt két lépésben hatjuk végre a következőkben bemutatott algoritmus alapján. Először az $\hat{\mathbf{A}}$ bal oldali mátrixblokkját transzformáljuk a $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix megfelelő bal oldali mátrixblokkjába (2.18), illetve a (2.21) eljárás segítségével. Ezt a transzformációt úgy kell végrehajtanunk, hogy a (2.21)-ben szereplő $((\mathbf{a}_i)^{(k)}, \mathbf{w}_k)$ skalárszorzatokat, valamint a (2.18)-ban szereplő $\|\mathbf{a}_1\|_E$ és $\|\tilde{\mathbf{w}}_i\|_E$ vektornormákat csak a fundamentális mátrixblokk elemeit felhasználva képezzük. – Érdemes megjegyeznünk, hogy az általánosított mátrix-ortogonalizáció lényeges-, és a kiegyenlítő számításban való alkalmazhatóságának szempontjából alapvetően fontos tulajdonsága, hogy általa nem kvadratikus mátrixok is ortogonalizálhatók. Ennek megfelelően a (2.13) által leírt transzformációt úgy kel kezelnünk, mintha kvadratikus mátrixot transzformálnánk, de a transzformációt csak az $i = 1, 2, \dots r$ $(r > n)$ oszlopig végezzük el. Így a (2.19)-ben szereplő $\mathbf{W}$ mátrix ortogonális oszlopokkal rendelkező mátrix lesz, amely oszlopai tehát egymásra ortogonálisak és normálisak. – Ezek után rendezzük át az indexeket az egyszerűbb áttekinthetőség érdekében úgy, hogy az $\mathbf{a}_j^{(i)}$ vagy $\mathbf{w}_j^{(i)}$ a j-edik indexű blokk i-edik oszlopát jelölje. Ekkor :

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(1)} \\ \mathbf{w}_3^{(1)} \end{bmatrix} = \dfrac{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(1)} \\ \mathbf{a}_3^{(1)} \end{bmatrix}}{\left\|\mathbf{a}_1^{(1)}\right\|_E} \\
\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \end{bmatrix}^{\langle 1 \rangle} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \end{bmatrix}^{\langle k+1 \rangle} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \end{bmatrix}^{\langle k \rangle} - \left((\mathbf{a}_1^{(i)})^{\langle k \rangle}, \mathbf{w}_1^{(k)}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(k)} \\ \mathbf{w}_3^{(k)} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_1^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{w}}_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(i)} \\ \mathbf{a}_3^{(i)} \end{bmatrix}^{\langle i \rangle}
\end{array}\right. \\
\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(i)} \\ \mathbf{w}_3^{(i)} \end{bmatrix} = \dfrac{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_1^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{w}}_3^{(i)} \end{bmatrix}}{\left\|\tilde{\mathbf{w}}_1^{(i)}\right\|_E} \\
(i = 2, 3, \dots r \;\; ; \quad k = 1, 2, \dots i-1)
\end{array}\right\} \tag{3.4}$$

Ezt követően kell az $\hat{\mathbf{A}}$ jobb oldali mátrixblokkját transzformálni a $\hat{\mathbf{W}}$ mátrix megfelelő jobb oldali mátrixblokkjába a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_2^{(i)} \\ \mathbf{w}_4^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^{(i)} \\ \mathbf{a}_4^{(i)} \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{r} (\mathbf{a}_2^{(i)}, \mathbf{w}_1^{(k)}) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(k)} \\ \mathbf{w}_3^{(k)} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{3.5}$$

algoritmussal, ahol az $\mathbf{a}_j^{(i)}$, illetve a $\mathbf{w}_j^{(i)}$ szintén az $\mathbf{A}_j$, illetve a $\mathbf{W}_j$ blokkok *i*-edik oszlopát jelöli. Látható, hogy a szükséges skalárszorzatokat itt is csak a fundamentális mátrixblokk elemeinek felhasználásával képezhetjük.

Az eddigiek alapján belátható, hogy a (3.3) transzformáció a (2.19) és a (2.20)-szal összhangban a (3.1) és a (3.2) jelöléseinek megfelelően az alábbi felbontásokhoz vezet:

$$\begin{aligned} \underset{(n,r)}{\mathbf{W}_1} &= \underset{(n,r)}{\mathbf{A}_1} \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} \\ \underset{(n,p)}{\mathbf{W}_2} &= \underset{(n,p)}{\mathbf{A}_2} - \underset{(n,r)}{\mathbf{W}_1} \underset{(r,n)}{\mathbf{W}_1^*} \underset{(n,p)}{\mathbf{A}_2} \\ \underset{(m,r)}{\mathbf{W}_3} &= \underset{(m,r)}{\mathbf{A}_3} \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} \\ \underset{(m,p)}{\mathbf{W}_4} &= \underset{(m,p)}{\mathbf{A}_4} - \underset{(m,r)}{\mathbf{W}_3} \underset{(r,n)}{\mathbf{W}_1^*} \underset{(n,p)}{\mathbf{A}_2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. Az általánosított mátrix-ortogonalizáció alkalmazása

Egyszerű példaként alkalmazzuk az általánosított mátrix-ortogonalizáció módszerét közvetett mérések kiegyenlítésére egymástól független ismeretlenek esetén [3, 7, 9]. Az egyszerűség kedvéért egységsúlyú mért mennyiségeket feltételezünk. Ekkor a megfelelő helyettesítésekkel a (3.3) transzformáció

$$\left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} & \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \\ \hline \underset{(r,r)}{\mathbf{E}} & \underset{(r,1)}{\mathbf{0}} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \underset{(n,r)}{\mathbf{W}} & \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} \\ \hline \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} & \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} \end{array}\right] \tag{4.1}$$

alakú lesz, ahol $\underset{(r,r)}{\mathbf{E}}$ egységmátrix, $\underset{(r,1)}{\mathbf{0}}$ zérusvektor, a többi jelölés pedig már az előző részekből ismeretes.

Amint látható, a (4.1) mátrix-transzformáció a kiegyenlítés során keresett $\mathbf{v}$ javítások és $\mathbf{x}$ ismeretlenek vektorát a megjelölt helyen közvetlenül szolgáltatja. A (3.6) összefüggések alapján

$$\underset{(n,r)}{\mathbf{W}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} \tag{4.2}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} - \underset{(n,r)}{\mathbf{W}} \underset{(r,n)}{\mathbf{W}^*} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \tag{4.3}$$

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = - \underset{(r,r)}{\mathbf{R}^{-1}} \underset{(r,n)}{\mathbf{W}^*} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \tag{4.4}$$

Igen könnyen belátható, hogy az így adódó $\mathbf{v}$ és $\mathbf{x}$ vektorok algebrailag ekvivalensek a szokásos úton – vagyis a normálegyenletek felállításán és megoldásán keresztül számított $\mathbf{v}$ és $\mathbf{x}$ vektorokkal. Ugyanis az (1.1) és az (1.6) a (2.19) felbontás alkalmazásával így írható:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^*\mathbf{l}) = [(\mathbf{WR})^*(\mathbf{WR})]^{-1}(\mathbf{WR})^*\mathbf{l} = -(\mathbf{R}^*\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}^*\mathbf{W}^*\mathbf{l} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}^*\mathbf{l}$$

és

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{l} = \mathbf{WRx} + \mathbf{l} = -\mathbf{WR}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}^*\mathbf{l}) + \mathbf{l} = \mathbf{l} - \mathbf{WW}^*\mathbf{l}$$

ezek viszont megegyeznek a (4.3) és a (4.4) jobb oldalával. – Ez rendkívül fontos eredmény, mivel azt bizonyítja, hogy a normálegyenletek kikerülésével egyszerűbb úton ugyanarra az eredményre jutunk, mint ami a normálegyenletek felállításán és megoldásán keresztül adódna!

5. Összefoglalás és következtetések

Az első részben szó volt néhány hibaforrásról, amelyek különböző kiegyenlítési feladatokban a leginkább veszélyeztethetik a megoldás pontosságát.

Láthattuk, hogy a megoldás pontossága szempontjából igen fontos követelmény az egyes kiegyenlítési feladatokhoz a legmegfelelőbb numerikus matematikai módszer megválasztása. Tudjuk, hogy léteznek olyan kiegyenlítési problémák, amelyek eleve gyengén kondicionált mátrixú normálegyenletekhez vezetnek, és ezeknek a kiegyenlítési problémáknak a szokásos úton történő megoldása – amely a normálegyenletek felállításán és megoldásán keresztül történik – teljesen megbízhatatlan lehet. Ebben az esetben olyan numerikus módszert célszerű választani, amely megkerüli a normálegyenleteken keresztül vezető utat. Amint láttuk, az általánosított mátrix-ortogonalizációs eljárás megkerüli a normálegyenletek felállítását és megoldását – ugyanakkor mivel ez az eljárás is a legkisebb négyzetek elvéből indul ki, elvileg ugyanarra a megoldásra vezet, mint amelyre a szokásos módszer.

Végül érdemes néhány szót szólni a különböző számítási módszerek ún, numerikus stabilitásáról. A [12] szerint két számítási módszer közül annak nagyobb a numerikus stabilitása, amely a számítások során kevesebb számú $\sum a_i b_i$ típusú szorzatösszeg képzését igényli (feltételezve természetesen, hogy az egyéb műveletek igénye közel azonos).

Kiszámítható, hogy a (4.1) által szimbolizált transzformáció során összesen

$$\frac{r^2+3r}{2}$$

számú $\sum a_i b_i$ típusú szorzatösszeg képzése szükséges ahhoz, hogy megkapjuk az $\mathbf{x}$ megoldások és a $\mathbf{v}$ javítások vektorát. Ugyanakkor a másik módszer használata esetén mindössze az (1.5) normálegyenleteknek az (1.3) és az (1.4) szerinti előállításához

$$r^2+r$$

számú szorzatösszeg képzése szükséges. Mivel

$$r^2+r > \frac{r^2+3r}{2}$$

és mivel a két számítás egyéb műveletigénye közel azonos, ezért a [12] szerint (különösen ha n nagy) az ortogonalizációs eljárás numerikusan stabilabbnak tekinthető; főleg azért, mert ekkor a szokásos módszerrel még csak a normálegyenletek felállításáig jutottunk el – aminek még hátra van a megoldása – az ortogonalizációs módszer pedig már a teljes megoldást szolgáltatta. Megjegyezzük, hogy a [7] a numerikus stabilitás kérdésével részletesen foglalkozik, és más úton ugyanerre az eredményre jut.

Befejezésképpen meg kell még jegyeznünk, hogy – mint minden módszernek – az ortogonalizációs eljárás alkalmazásának is vannak korlátjai. Amint a második részben láttuk, nem alkalmazható az ortogonalizációs módszer akkor, amikor az **A** mátrix oszlopaiból alkotott vektorok nem lineárisan függetlenek. Emellett bizonyos esetekben az ortogonalizációs eljárás eredményeit is ronthatják a kerekítési hibák, bár ugyanakkor a számítási pontosság az ún. újra-ortogonalizálás módszerének alkalmazásával tovább javítható [4, 7], tehát a kerekítési hibák hatása is csökkenthető.

(Beérkezett: 1977. aug. 9-én.)

IRODALOM

1. Ádám J. - Tarcsay Cy.: Independent Geometrical Doppler Geodetic Systems. Observation of Artificial Satelites of the Earth, No. 14, Bukarest, 1974.
2. Bácsatyai L.: A lineáris egyenletrendszerek kondicionáltsága és a geodéziai hálózatok szerkezete. Geod, és Kart. 1973/6.
3. Bell, J. F. - D. Roberts: Some Notes on the Application of Orthogonal Matrix Transformations to the Least Squares Problem. International Symposmm on Computational Methods, Oxford, 1973.
4. Biró P. - Detrekői Á. - Földváriné Varga M. - Völgyesi L.: Gravimetriai mérések korszerű kiegyenlítési módszere. BME Felsőgeodézia Tanszék, kutatási beszámoló, Budapest, 1974.
5. Bjerhammar, A.: Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses. Elsevier. Sci. Publ. Comp., Amsterdam, 1973.
6. Charamza, F. - L. Träger: Bearbeitung der lelessungsergebnisse auf den Schwerepolygonen. Geofysikálni Sbornik, XIX, 1971.
7. Charamza, F.: Orthogonalization Algorithrn for Solving the Fundamental Problems of the Calculus of Observations. Geofysikálni Sbornik, XIX, 1971.
8. Demidovich, B. P: -J. A. Maron : Computational. Mathematics. Mir Publishers, Moszkva, 1973.
9. Detrekői Á.: Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
10. Kuros, A. G.: Felsőbb Algebra. Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
11. Läuchli, P.: Jordan-Elimination und Ausgleichung nach kleinstein Quadraten. Num. Math., 3, 226, 1961.
12. Obádovics J. Gy.: Gyakorlati számítási eljárások. Gondolat Kiadó, Budapest, 1972.
13. Rice, J. R.: Experiments on Gram-Schmidt Othogonalization. Math. Comp., 20, 325, 1966.
14. Rózsa P.: Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
15. Schmitt, G.: Rounding-off Errors in Solvmg Linear System of High Order. International Symposium on Computational Methods, Oxford, 1973.

16: Szidarovszky F.: Lineáris algebra közelítő módszerei. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

17. Todd, J.: Survey of Numerical Analysis. McGrawHill, New York, 1962.
18. Völgyesi L.: Matrix-Orthonormalization Method in Adjustment. Periodica Politechnica, No. 1-2, 19, 1975.
19. Völgyesi L.: Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Torsion Balance Results. Periodica Politechnica, No. 1-2, 21, 1977.

Some Problems about the Choice of the Numerical Methods, and the Application of the Matrix Orthogonalization Method in Adjustment

Dr. L. Völgyesi

Summary

Some possible sources of errors are briefly outlined in case of application of computers for solving problems in adjustment and attention is called to the importance of selecting the best fitting numerical models. In certain cases the usual way in adjustment, setting up and solving normal equations, is inefficient and the use of the orthogonalization method is suggested. It is proved that both processes theoretically give the same solution, but the solution by orthogonalization has the greater numerical stability.

* * *

Völgyesi L. (1979) A numerikus modellek választásának néhány kérdése és a mátrix-ortogonalizációs módszer alkalmazása a kiegyenlítõ számításban. Geodézia és Kartográfia, Vol. 31, Nr. 5, pp. 327-334.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.
Web: http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi E-mail: volgyesi@eik.bme.hu