

FÜGGŐVONAL-ELHAJLÁS INTERPOLÁCIÓ EÖTVÖS-INGA MÉRÉSEK ALAPJÁN

Völgyesi Lajos

okleveles geofizikus
a földtudomány kandidátusa
egyetemi docens
BME Általános és Felsőgeodézia Tanszék

HABILITÁCIÓS ÉRTEKEZÉS

Budapest, 2003

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	2
1. AZ INTERPOLÁCIÓS MÓDSZER ALAPELVE	5
2. AZ INTERPOLÁCIÓ MEGOLDÁSI MÓDSZEREI	16
2.1 A hagyományos megoldási módszer	17
2.2 A $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ismeretlenek számának csökkentése	18
2.3 Interpoláció fokozatos kiküszöbölés módszerével	19
2.4 A ξ , η összetevők közvetlen számítása	25
2.5 Interpoláció négyzethálózat sarokpontjaira	30
2.6 A mátrix-ortogonalizációs módszer alkalmazása	32
3. AZ INTERPOLÁCIÓ PONTOSSÁGI JELLEMZŐI	35
4. GYAKORLATI MEGOLDÁS	40
5. A KÍSÉRLETI SZÁMÍTÁSOK ADATAI	49
5.1 Eötvös-inga mérések	50
5.2 Az Eötvös-inga mérések javítása	55
5.3 Az interpolációs pontok koordinátái	61
5.4 Kiinduló és ellenőrző ξ , η értékek	63
6. VIZSGÁLATI EREDMÉNYEK, KÖVETKEZTETÉSEK	65
6.1 A különböző megoldási módszerek összehasonlítása	65
6.2 A súlyozás kérdése	73
6.3 Az interpolációs hálózatok célszerű geometriája	78
6.4 A korrekciók kérdése	97
7. A GEOID MEGHATÁROZÁSA	105
7.1 A csillagászati szintezés alapelve	105
7.2 A csillagászati szintezés hagyományos számítási módszere	107
7.3 A geoidmagasságok közvetlen számítása	108
7.4 A kísérleti számítások eredményei	113
ÖSSZEFOGLALÁS	116
IRODALOM	121

BEVEZETÉS

A függővonal-elhajlások ismeretének alapvetően fontos szerepe van a geodéziában, mivel ezek teremtenek kapcsolatot a Föld valódi nehézségi erőterében mérhető és valamely normál nehézségi erőterben számítható helymeghatározó mennyiségek között. Ugyanakkor a függővonal-elhajlások ismerete fontos lehetőséget kínál a geoid részletes meghatározására is. A geoid meghatározásához a függővonal elhajlás értékek sűrű hálózatára van szükségünk, amit a szokásos asztrogeodéziai úton költséges és hosszadalmas előállítani, ezért a gyakorlatban célszerű, ha beérjük a csillagászati-geodéziai pontok ritkább hálózatával, és ezek ξ , η értékeit sűrítjük különféle módszerekkel.

A függővonal-elhajlás értékek sűrítése vagy gravitációs anomáliák felhasználása alapján gravimetriai sűrítési módszerrel, vagy a nehézségi erőter potenciál szintfelületei görbületi viszonyainak ismeretében (Eötvös-inga mérési eredmények felhasználásával) történhet. A két módszer közül az előbbinek a gyakorlati alkalmazási lehetőségei meglehetősen korlátozottak, mivel kellő pontosság csak akkor érhető el, ha a meghatározandó pont környezetében legalább 300-400 km távolságig részletes nehézségi adatok állnak rendelkezésre. Emellett a gravimetriai sűrítési módszer túlzottan számításigényes és nehezen programozható.

A fenti okok miatt indokolt foglalkozni a függővonal-elhajlások Eötvös-inga mérési adatok alapján végezhető sűrítésével. A hazai adottságok mellett ez a módszer rendkívül gazdaságos, hiszen az Eötvös-inga mérésekből Magyarország területének jelentős részén rendelkezésre állnak a W_{zx} és a W_{zy} horizontális gradiensek mellett az igen nagy pontosságú W_{xy} és $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ görbületi gradiensek is. Mivel a korábbi Eötvös-inga méréseket főként nyersanyagkutatás céljából végezték, ezért többnyire csak a horizontális gradienseket dolgozták fel. A geodézia számára fontos görbületi gradiensek mindaddig

feldolgozatlanok maradtak, így ezek óriási lehetőséget rejtenek a függővonal-elhajlások részletes meghatározására.

Eötvös-inga mérések alapján végezhető függővonal-elhajlás interpolációval eddig mindössze három ország hét kutatója foglalkozott mélyebben, akik kutatási eredményeiket 16 különféle publikációban foglalták össze. A témának rendkívül jelentős magyar hagyományai vannak, hiszen ebből a 16 publikációból egyetlen kivétellel valamennyi munka részben, vagy teljes egészében magyar kutató tollából született. Az interpoláció lehetőségére elsőként *Eötvös Loránd* hívta fel a figyelmet és ezzel kapcsolatosan próbaszámításokat is végzett (*EÖTVÖS* 1906, 1909; *SELÉNYI* 1953). Eötvös módszerét *Renner János* egyszerűsített formában továbbfejlesztette (*RENNER* 1952, 1956, 1957), a kísérleti számítások eredményeinek biztonságos ellenőrzésére azonban nem volt alkalma. Az említett két magyar tudóson kívül mindössze az amerikai Columbus Egyetem két kutató tanára *J. Badekas* és a magyar származású *Müller Iván* (*BADEKAS - MUELLER* 1967), továbbá a hannoveri *U. Heineke* (*HEINEKE* 1978) foglalkozott a témával - azonban az ő munkáikban is még számos kérdés maradt megválaszolatlanul.

A továbbiakban az Eötvös-inga mérések alapján végezhető függővonal-elhajlás interpoláció lényegének és gyakorlati számítási módszereinek bemutatása után a kísérleti számításaim eredményeit tekintjük át. Ezt követően összefoglalom az interpolációval kapcsolatos tapasztalataimat és következtetéseket. Mindezt abban a reményben teszem, hogy nem marad kihasználatlanul a világon egyedülálló lehetőségünk, és hamarosan sor kerülhet a Magyarország területére évtizedek óta hatalmas mennyiségben rendelkezésre álló Eötvös-inga mérési eredmények geodéziai célú feldolgozására. Jelenleg messze ez a legolcsóbb lehetőség a függővonal-elhajlások sűrítésére és ezen keresztül a geoid részletes meghatározására.

Ennek a munkánknak a legnagyobb jelentőségét abban látom, hogy a témával kapcsolatos kutatási eredményeim és tapasztalataim azonnal és közvetlenül hasznosíthatók a gyakorlatban; a kutatási eredményeim birtokában az

általam kifejlesztett szoftver felhasználásával minden eddiginél nagyságrendekkel olcsóbban és gyorsabban előállítható Magyarország igen pontos és részletes geoidképe, ami a GPS mérések kiterjedt felhasználhatósága szempontjából igen fontos gyakorlati jelentőségű.

1. AZ INTERPOLÁCIÓS MÓDSZER ALAPELVE

Vizsgáljuk meg a függővonal-elhajlások eloszlását a földfelszín kis darabján, ahol Eötvös-inga mérési eredmények állnak rendelkezésre.

Vonatkoztassuk számításainkat olyan térbeli derékszögű koordináta-rendszerre, melynek kezdőpontja a vizsgálandó terület belsejében lévő valamely tetszőleges P_0 mérési pont. Mutasson a koordináta-rendszer $+x$ és $+y$ tengelye az északi illetve a keleti irányba, és essen egybe a z tengely a P_0 pontbeli függőleges iránnyal úgy, hogy a pozitív ága lefelé mutasson. Ha a vizsgált terület nem túlságosan nagy – legfeljebb $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ kiterjedésű, akkor az egész területen egységes koordináta-rendszert használhatunk, mert a meridiánkonvergenciából származó eltérések kisebbek, mint az észlelési hibák (SELÉNYI 1953).

Így a szóban forgó terület bármely P_i pontjához tartozó z_i irány párhuzamos lesz a P_0 ponton átmenő z tengellyel és minden x_i irány párhuzamos a P_0 ponton átmenő szintfelületi meridián érintőjével. Ezt szemléltetjük az 1-1. ábrán látható tetszőleges P_i (jelen esetben az $i=1$ pontban). Mivel a P_i pontban a z tengely párhuzamos a P_0 kezdőpontban lévő függőleges iránnyal, ezért várható, hogy a P_1 pontban a \mathbf{g}_1 vektor iránya nem esik egybe a z iránnyal. Az ábrán a $\overrightarrow{P_1V}$ vektor valójában a \mathbf{g}_1 vektornak az xz síkra vonatkozó vetülete, míg a $\overrightarrow{P_1H}$ vektor a \mathbf{g}_1 vektor \mathbf{g}_{x1} összetevőjének ugyanezen síkra eső vetülete. (A $\overrightarrow{P_1V}$ és \mathbf{g}_1 illetve a $\overrightarrow{P_1H}$ és \mathbf{g}_{x1} vektorok egymástól vett eltérése elhanyagolható.)

Amennyiben a P_0 pont szintfelületi földrajzi szélessége Φ és a P_1 pontban a $\overrightarrow{P_1V}$ és a z irány által bezárt szög $\Delta\Phi_1$ akkor a P_1 pont szintfelületi földrajzi szélessége:

$$\Phi_1 = \Phi + \Delta\Phi_1$$

Ugyanakkor az 1-1. ábráról látható, hogy

$$-g_{x1} = g_1 \sin \Delta\Phi_1$$

amely összefüggés kis $\Delta\Phi_1$ szög esetén a

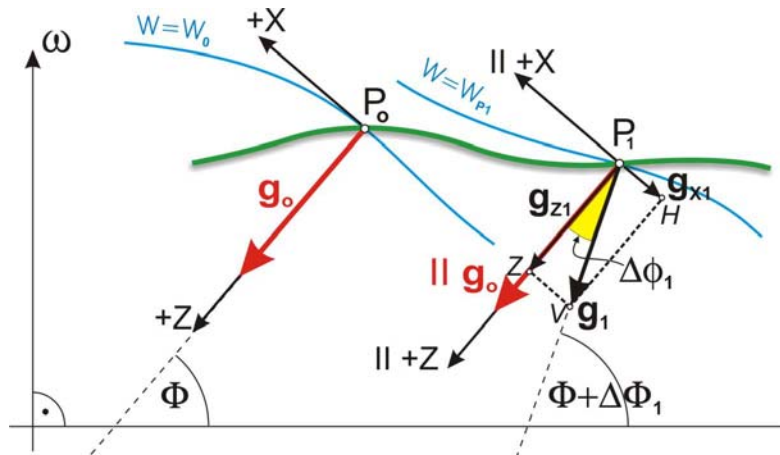
$$\Delta\Phi_1 = -\frac{g_{x1}}{g_1} \quad (1)$$

formában írható.

Azonos gondolatmenet után kapjuk az yz síkban a szintfelületi földrajzi hosszúság megváltozására a

$$\Delta\lambda_1 \cos \Phi_1 = \frac{g_{y1}}{g_1} \quad (2)$$

összefüggést.



1-1. ábra. Az interpolációhoz használt koordinátarendszer.

Az (1) és a (2) a P_0 és a P_1 pontbeli geoid-normális által bezárt szög északi, illetőleg keleti összetevőjét adja meg. Hasonlóképpen meghatározható a P_0 és valamely másik P_2 pontra a $\Delta\Phi_2$ és a $\Delta\Lambda_2$ érték. Ezek felhasználásával képezhető a P_1 és a P_2 pont között a

$$(\Delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1) = -\frac{1}{\tilde{g}}(g_{x2} - g_{x1}) = -\frac{1}{\tilde{g}}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_1\right] \quad (3)$$

és a

$$(\Delta\Lambda_2 - \Delta\Lambda_1) \cos \tilde{\Phi} = -\frac{1}{\tilde{g}}(g_{y2} - g_{y1}) = -\frac{1}{\tilde{g}}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_1\right] \quad (4)$$

különbség, ahol W a Föld valódi nehézségi erőterének potenciálja, \tilde{g} illetve $\tilde{\Phi}$ pedig a nehézségi gyorsulás és a szintfelületi földrajzi szélesség átlagértéke a P_1 és a P_2 pont között. A (3) és a (4) kifejezés az (1) és a (2) analógiájára a P_1 és a P_2 pont szintfelületi normálisa által bezárt szög északi és keleti összetevőjét adja.

Bevezetve a $\frac{\partial W}{\partial x} = W_x$ és a $\frac{\partial W}{\partial y} = W_y$ jelöléseket a (3) illetve a (4) a

$$\Delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 = -\frac{1}{\tilde{g}}(W_{x2} - W_{x1}) \quad (5)$$

és a

$$(\Delta\Lambda_2 - \Delta\Lambda_1) \cos \tilde{\Phi} = -\frac{1}{\tilde{g}}(W_{y2} - W_{y1}) \quad (6)$$

formában írható fel.

A Föld valóságos nehézségi erőterének analógiájára értelmezhetjük a normál nehézségi erőter potenciáljának szintfelületeit, az erőter nagyságát (a normál nehézségi gyorsulást), valamint az erőter irányát, és ezzel kapcsolatban valamely pont földrajzi szélességét és hosszúságát, amit ${}_n\varphi$ normál földrajzi szélességnek és ${}_n\lambda$ normál földrajzi hosszúságnak nevezünk.

Az (5) és a (6)-hoz hasonló összefüggések írhatók fel a *normál nehézségi erőterben* az erőter irányának megváltozása, azaz a P_1 és a P_2 pont ${}_n\varphi$ és ${}_n\lambda$ normál földrajzi koordinátáinak megváltozása és a normál nehézségi erőter potenciáljának (a normálpotenciálnak) megfelelő differenciálhányadosai között:

$$\Delta_n \varphi_2 - \Delta_n \varphi_1 = -\frac{1}{\tilde{\gamma}}(U_{x2} - U_{x1}) \quad (7)$$

és

$$(\Delta_n \lambda_2 - \Delta_n \lambda_1) \cos \tilde{\varphi} = -\frac{1}{\tilde{\gamma}}(U_{y2} - U_{y1}), \quad (8)$$

ahol U a normálpotenciál, $\tilde{\gamma}$ pedig a normál nehézségi gyorsulás értékének átlaga a P_1 és a P_2 pont között.

A már említett $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ nagyságú területen belül az (5) - (8) összefüggésekben megengedhető a $\tilde{\gamma} = \tilde{g}$ valamint a $\tilde{\Phi} = {}_n\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$ közelítés, és ezen túlmenően nem csupán két szomszédos pont között, hanem az egész területre használható egyetlen \tilde{g} és $\tilde{\varphi}$ érték (BADEKAS - MUELLER 1967), amelyeket a továbbiakban egyszerűen g -vel és φ -vel jelölünk.

Vonjuk ki ezek után egymásból az (5) és a (7), illetve a (6) és a (8) kifejezést:

$$[(\Delta\Phi_2 - \Delta_n \varphi_2) - (\Delta\Phi_1 - \Delta_n \varphi_1)] g = -(W_{x2} - W_{x1}) + (U_{x2} - U_{x1}), \quad (9)$$

$$[(\Delta\lambda_2 - \Delta_n \lambda_2) - (\Delta\lambda_1 - \Delta_n \lambda_1)] g \cos \varphi = -(W_{y2} - W_{y1}) + (U_{y2} - U_{y1}), \quad (10)$$

A definíció szerint a szintfelületi és a normál földrajzi szélesség, illetve hosszúság értékek (9) és (10) különbségei adják a P_1 és a P_2 pont között a függővonal-elhajlás ξ és η összetevőjének megváltozását, tehát:

$$(\xi_2 - \xi_1) g = -(W_{x2} - W_{x1}) + (U_{x2} - U_{x1}), \quad (11)$$

és

$$(\eta_2 - \eta_1)g = -(W_{y2} - W_{y1}) + (U_{y2} - U_{y1}) . \quad (12)$$

Bevezetve a

$$\Delta\xi_{12} = \xi_2 - \xi_1 ,$$

$$\Delta\eta_{12} = \eta_2 - \eta_1$$

és a

$$\Delta W = W - U \quad (13)$$

jelöléseket, végül is az alábbi egyenlőségek írhatók fel:

$$g\Delta\xi_{21} = -\Delta W_{x2} + \Delta W_{x1} \quad (14)$$

$$g\Delta\eta_{21} = -\Delta W_{y2} + \Delta W_{y1} . \quad (15)$$

A klasszikus geodéziában gyakran találkozunk a függővonal-elhajlás

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (A - \lambda) \cos \varphi \end{aligned}$$

értelmezésével, ahol Φ és A a pont szintfelületi, φ és λ pedig a pont ellipszoidi földrajzi koordinátáit jelenti.

Ha a geodéziai alapfelület céljára szolgáló ellipszoidot fizikailag a normál nehézségi erőter egyik szintfelületeként értelmezzük (és így vesszük fel), akkor az ellipszoidi és a normál földrajzi koordináták között fennáll a

$$\varphi =_n \varphi - \kappa , \quad (16)$$

$$\lambda =_n \lambda , \quad (17)$$

összefüggés, ahol κ jelenti a normál nehézségi erőter iránykülönbségét a P földfelszíni pont és az ellipszoid felszíni pontja között a P pont normál függővonala mentén. A (16) -ban és a (17) -ben figyelembe vettük, hogy a normál függővonal síkgörbe, amely benne fekszik a P pont normál meridián síkjában.

A P pont ellipszoid feletti magasságát h -val jelölve, a normál nehézségi erőter függővonala görbületének felhasználásával:

$$\kappa = h \frac{\beta}{R} \sin 2\varphi, \quad (18)$$

ahol β a normál nehézségi erőter dinamikai lapultsága, R pedig a földsugár (MAGNITZKI - BROVAR 1964).

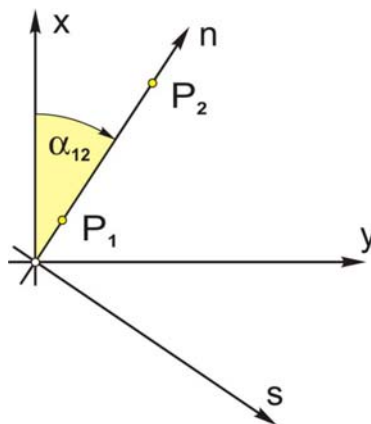
A (18) összefüggés differenciálásával könnyen belátható, hogy a már említett $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ nagyságú területen a κ változása gyakorlatilag elhanyagolhatóan kicsiny. Ennek következtében a (11) és a (12) összefüggések a függővonal-elhajlás klasszikus geodéziai értelmezése esetén is fennállnak.

A továbbiakban tehát a függővonal-elhajlások értelmezésében nem szükséges különbséget tennünk a kétféle felfogás között, ezért a függővonal-elhajlások fogalmát mindkét értelmezésben használhatjuk.

A függővonal-elhajlások összetevőit – pontosabban itt ezeknek a g -vel megszorzott értékét, vagyis a vízszintes irányú erőösszetevőket – mint láttuk, a potenciál első differenciálhányadosai határozzák meg. Az Eötvös-inga mérések viszont a

$$W_{\Delta} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \text{és a} \quad W_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

második differenciálhányadosokat szolgáltatják. A számítási feladat tehát lényegében *integrálás*, amelyet közelítő eljárással fogunk elvégezni.



1-2. ábra. $(x,y) \rightarrow (n,s)$ koordináta transzformáció.

A feladat megoldásához először hajtsuk végre a 1-2. ábrán látható koordináta transzformációt, amely az

$$\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{12} & \sin \alpha_{12} \\ -\sin \alpha_{12} & \cos \alpha_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

alakban írható le. Ez alapján:

$$W_n = \frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = W_x \cos \alpha_{12} + W_y \sin \alpha_{12} , \quad (19)$$

$$W_s = \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = -W_x \sin \alpha_{12} + W_y \cos \alpha_{12} ,$$

a második differenciálhányadosok pedig:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos^2 \alpha_{12} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \sin^2 \alpha_{12} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha_{12} , \\ \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin^2 \alpha_{12} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cos^2 \alpha_{12} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha_{12} \end{aligned} \quad (20)$$

és

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha_{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha_{12} .$$

Látható tehát, hogy ez utóbbi $W_{ns} = \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s}$ az Eötvös-inga mérési eredményekből előállítható, ha ismerjük a két vizsgált pontot összekötő irány α_{12} azimutját.

Integráljuk ezek után a (20) bal oldalát az n_1 és az n_2 határok között:

$$\int_{n_1}^{n_2} \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} dn = \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)_2 - \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)_1 = W_{s2} - W_{s1} . \quad (21)$$

Ha a P_1 és a P_2 pont elég közel fekszik egymáshoz úgy, hogy közöttük a W_{ns} második differenciálhányados megváltozása *lineárisnak* tekinthető, akkor a (21) integrál a trapéz közelítő-képlettel számítható:

$$\int_{n_1}^{n_2} \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} dn = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \right)_1 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \right)_2 \right] (n_2 - n_1) = \frac{1}{2} [(W_{ns})_1 + (W_{ns})_2] n_{12} , \quad (22)$$

ahol $n_{12} = n_2 - n_1$ a P_1 és a P_2 pont távolsága egymástól.

Másrészről a (21) integrál a (19) transzformáció alkalmazásával a

$$W_{s_2} - W_{s_1} = -(W_{x_2} - W_{x_1}) \sin \alpha_{12} + (W_{y_2} - W_{y_1}) \cos \alpha_{12} . \quad (23)$$

összefüggést adja.

Azonos gondolatmenet eredményeképpen hasonló kifejezés írható fel a normál nehézségi erőter U potenciáljára is:

$$U_{s_2} - U_{s_1} = -(U_{x_2} - U_{x_1}) \sin \alpha_{12} + (U_{y_2} - U_{y_1}) \cos \alpha_{12} . \quad (24)$$

Kivonva egymásból a (23) és a (24) összefüggést, a vízszintes irányú erőösszetevőnek a P_1 és a P_2 pont közötti n irányú $\Delta\theta_{12}$ megváltozását kapjuk. A (13) figyelembevételével, bevezetve a

$$g\Delta\theta_{12} = G_{12} \quad (25)$$

jelölést, az alábbi kifejezésre jutunk:

$$G_{12} = (-\Delta W_{x_2} + \Delta W_{x_1}) \sin \alpha_{12} - (-\Delta W_{y_2} + \Delta W_{y_1}) \cos \alpha_{12} ,$$

amelybe a (14) és a (15) összefüggéseket behelyettesítve

$$G_{12} = g\Delta\xi_{21} \sin \alpha_{12} - g\Delta\eta_{21} \cos \alpha_{12} ,$$

vagy bevezetve a

$$T_{12} = \frac{G_{12}}{g}$$

jelölést:

$$T_{12} = \Delta\xi_{21} \sin \alpha_{12} - \Delta\eta_{21} \cos \alpha_{12} . \quad (26)$$

A (26) bal oldala a (22) felhasználásával számítható ki. Figyelembe véve itt is a (13) szerinti jelölést:

$$T_{12} = \frac{1}{2} [(\Delta W_{ns})_1 + (\Delta W_{ns})_2] \frac{n_{12}}{g} , \quad (27)$$

ahol a ΔW_{ns} érték a (20) alapján számítható:

$$\Delta W_{ns} = \Delta W_{\Delta} \sin 2\alpha_{12} + \Delta W_{xy} \cos 2\alpha_{12} , \quad (28)$$

amelyben $\Delta W_{\Delta} = W_{\Delta} - U_{\Delta}$ és $\Delta W_{xy} = W_{xy} - U_{xy}$. Mint már említettük, a W_{Δ} és a W_{xy} Eötvös-ingával mérhető, - a szintfelület görbületi eltérésére jellemző adatok, az U_{Δ} és az U_{xy} pedig a görbületi adatok normális értékei, amelyek például a Hayford-féle ellipszoidra vonatkoztatva Eötvös egységben (HEINEKE 1978):

$$U_{\Delta} = 10.26 \cos^2 \varphi \quad (29a)$$

$$U_{xy} = 0 . \quad (29b)$$

Ezek után a (28) összefüggést a (27)-be helyettesítve a

$$T_{12} = \frac{n_{12}}{4g} \left[(\Delta W_{\Delta_1} + \Delta W_{\Delta_2}) \sin 2\alpha_{12} + (\Delta W_{xy_1} + \Delta W_{xy_2}) \cos 2\alpha_{12} \right] \quad (30)$$

kifejezés adódik. Ezt végül a (26) kifejezéssel összehasonlítva a kívánt alapegyenlethez jutunk, amely megadja a kapcsolatot a függővonal-elhajlás összetevők két pont közötti megváltozása és az Eötvös-ingával mérhető görbületi gradiensek között:

$$\Delta\xi_{21} \sin \alpha_{12} - \Delta\eta_{21} \cos \alpha_{12} = \frac{n_{12}}{4g} \left[(\Delta W_{\Delta_1} + \Delta W_{\Delta_2}) \sin 2\alpha_{12} + (\Delta W_{xy_1} + \Delta W_{xy_2}) \cos 2\alpha_{12} \right] \quad (31)$$

Ez az összefüggés rendkívül fontos, hiszen ez teremt kapcsolatot az Eötvös-ingával mérhető görbületi gradiensek és a függővonal-elhajlások változása között.

Ha most egy harmadik P_3 pont is adott, amely az előbbi P_1 és P_2 -vel háromszöget alkot, akkor a (26)-hoz hasonlóan a további két

$$T_{23} = \Delta\xi_{32} \sin \alpha_{23} - \Delta\eta_{32} \cos \alpha_{23} \quad (32)$$

és

$$T_{13} = \Delta\xi_{31} \sin \alpha_{13} - \Delta\eta_{31} \cos \alpha_{13} \quad (33)$$

összefüggés is felírható.

Mivel a P_1 , P_2 és a P_3 pontok által alkotott háromszögön körbehaladva a függővonal-elhajlások összetevőinek változás-összege zérus kell legyen, ezért az eddig levezetett (26), (32) és a (33) összefüggések mellé felírható még további kettő:

$$\Delta\xi_{21} + \Delta\xi_{13} + \Delta\xi_{32} = 0 \quad (34)$$

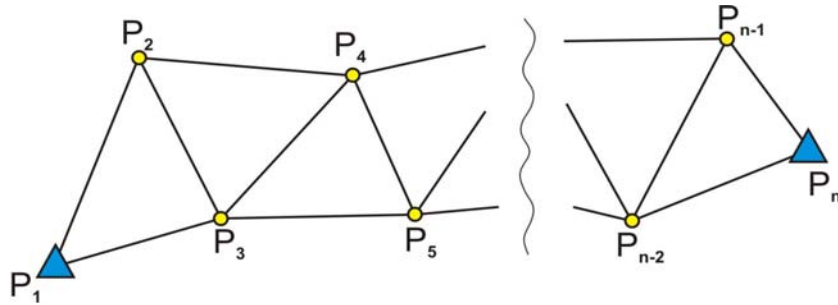
és

$$\Delta\eta_{21} + \Delta\eta_{13} + \Delta\eta_{32} = 0 \quad (35)$$

Bármely egyedül álló háromszögre tehát hat ismeretlenünk van: $\Delta\xi_{21}$, $\Delta\xi_{13}$, $\Delta\xi_{32}$, $\Delta\eta_{21}$, $\Delta\eta_{13}$, $\Delta\eta_{32}$; amelyekre a fentiek alapján öt egymástól független, a (26), (32), (33), (34) és (35) egyenlet írható fel. A feladat egyértelmű megoldásához további információ szükséges.

Vizsgáljuk meg ezek után a 1-3. ábrán látható n pontból álló interpolációs láncolatot. Az n pont összesen $n-2$ háromszögből álló láncolatot alakít ki $2n-3$ oldallal, amelyek mindegyike mentén két ismeretlen függővonal-elhajlás összetevő van, vagyis a teljes hálózatra összesen $4n-6$ ismeretlen adódik.

Ugyanakkor az $n-2$ háromszögre felírható $2n-3$ (26) típusú, és $2n-4$ (34) illetve (35) típusú egyenlet, azaz a $4n-6$ ismeretlenre összesen $4n-7$ egyenlet adódik. A feladat egyértelmű megoldásához egy további, az előzőktől független információ (egyenlet) szükséges.



1-3. ábra. Interpolációs láncolat kialakítása.

Például a 1-3. ábrán bemutatott interpolációs láncolat esetén, amennyiben ismerjük a két szélső pontban a ξ_1, ξ_n vagy az η_1, η_n függővonal-elhajlás összetevők értékét, akkor felírható a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta \xi_{i+1,i} = \xi_n - \xi_1 \quad (36)$$

vagy a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta \eta_{i+1,i} = \eta_n - \eta_1 \quad (37)$$

összefüggés. Ezzel a további (36), vagy (37) összefüggéssel a $4n-6$ ismeretlenre összesen $4n-6$ egyenlet írható fel, tehát így valamennyi ismeretlen $\Delta \xi$ és $\Delta \eta$ függővonal-elhajlás összetevő különbség egyértelműen meghatározható. Ha a láncolat két szélső pontjában mind a ξ , mind az η értékek ismertek, azaz a (36) és a (37) összefüggések egyidejűleg felírhatók, akkor a feladat túlhatározott, és az ismeretlenek értékét kiegyenlítéssel határozhatjuk meg.

2. AZ INTERPOLÁCIÓ MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

Az előző részben az Eötvös-inga mérési eredmények felhasználásával elvégezhető függővonal-elhajlás interpoláció alapelvét tekintettük át. Az interpoláció különféle gyakorlati számítási eljárások alkalmazásán keresztül valósítható meg. A megoldások mindegyike az előző részben ismertetett alapelvre épül, azonban a különböző számítási módszerek – elsősorban az általuk szolgáltatott eredmények megbízhatósága tekintetében – nem egyenértékűek. Az alábbiakban a lehetséges megoldásokat tekintjük át.

A megoldások két fő csoportba oszthatók. Az egyik esetben a függővonal-elhajlás összetevők két pont közötti $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ megváltozását választjuk ismeretleneknek, a másik esetben pedig maguk a pontbeli ξ , η függővonal-elhajlás összetevők a meghatározandó ismeretlenek. Az első esetben, vagyis ha az egyes pontok közötti függővonal-elhajlás összetevő különbségeket tekintjük ismeretleneknek, akkor a feladat megoldására három lehetőség kínálkozik:

- ▶ invertáljuk az előző részben szereplő (26), (34), (35), (36), (37) típusú egyenletek felhasználásával előállított $4n-6$ egyenlet együtthatóiból alkotott teljes együtthatómátrixot, majd meghatározzuk a $4n-6$ ismeretlen $\Delta\xi$ és $\Delta\eta$ függővonal-elhajlás különbség értékét,

- ▶ a fenti együtthatómátrixnak csak a feltétlenül szükséges $2n-2$ ismeretlenhez tartozó részével foglalkozunk,

- ▶ a $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ismeretleneket lépésenként fokozatos kiküszöböléssel (szukcesszív eliminációval) határozzuk meg.

2.1 A hagyományos megoldási módszer

Az első megoldási módszer Eötvös Lorándtól származik (EÖTVÖS 1906, 1909; SELÉNYI 1953). Ebben az esetben az interpolációs hálózatban a függővonal-elhajlásoknak a szomszédos pontok közötti különbségét tekintjük ismeretleneknek és ezekre a $\Delta\xi$ és $\Delta\eta$ ismeretlenekre a (26), (34), (35), továbbá a (36), vagy a (37) típusú egyenleteket írjuk fel. Ekkor tetszőleges n pontból álló interpolációs hálózat (láncolat) esetében $4n-6$ ismeretlen $\Delta\xi$ és $\Delta\eta$ függővonal-elhajlás különbség értékét kell meghatározni. Az előző részben láthattuk, hogy az ismeretlen $\Delta\xi$ és $\Delta\eta$ értékek egyértelmű meghatározásához szükségünk van a hálózat két tetszőleges pontjában (lehetőleg a végpontokon) a függővonal-elhajlások ugyanazon összetevőjének, tehát vagy a ξ , vagy az η értékének ismeretére. Mivel az esetek döntő részében nem elégszünk meg a szomszédos pontok közötti $\Delta\xi$ és $\Delta\eta$ különbségek ismeretével, hanem az egyes pontokon magukra a ξ , η értékekre vagyunk kíváncsiak, ezért nem elegendő a hálózat két pontjában csupán a függővonal-elhajlás egyik összetevőjét ismerni, hanem emellett valamelyik pontban a másik összetevő értékének ismeretére is szükségünk van. Más szóval, ha az interpolációs hálózat pontjaiban magukat a ξ , η értékeket kívánjuk meghatározni, akkor az Eötvös-inga mérési eredmények mellett szükségünk van két ismert (asztrogeodéziai) pontra, melyek egyikében mind a ξ , mind az η értéket, a másikban pedig vagy a ξ , vagy az η értékét ismerjük. A gyakorlatban inkább az az eset fordul elő, amikor legalább két ismert asztrogeodéziai pontban rendelkezésre állnak mind a ξ mind az η értékek, tehát fölös adatunk is van, és a feladat túlhatározott. Ebben az esetben az ismeretlenek értékét kiegyenlítéssel határozhatjuk meg.

A gyakorlatban a kiegyenlítési feladat megoldásához a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzuk.

2.2 A $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ismeretlenek számának csökkentése

Interpolációs láncolatoknak az előző 2.1 fejezetben ismertetett módszerrel történő számítása esetén jelentős mennyiségű és felesleges többletmunkát végzünk, amely mind a megoldás pontossága, mind a gazdaságossága szempontjából előnytelen. A hagyományos számítási módszer esetében a többletmunkát azzal végezzük, hogy valamely, a pontból álló láncolat esetén az összes $4n-6$ ismeretlenhez tartozó együtthatómátrixot invertáljuk, - holott a feladat egyértelmű megoldásához a szükséges ismeretlenek száma mindössze $2n-2$. Ez az n nagy értéke esetén az interpolált $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ értékek jelentős pontosságcsökkenését eredményezheti.

Az ismeretlenek számának csökkentéséhez bontsuk fel a $4n-6$ ismeretlen tartalmazó rendszert két csoportra. Az egyik csoportba csak a szükséges ismeretlenek kerüljenek (így például a 3. ábrán látható láncolatban csak a P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , P_4P_5 , ... oldalakra vonatkozó $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ értékek), a másik csoportba pedig a felesleges ismeretleneket tegyük (például a 3. ábrán látható láncolat fennmaradó P_1P_3 , P_2P_4 , P_3P_5 , ... oldalaira vonatkozó ismeretleneket). Az ismeretlenek második csoportjával a továbbiakban nem törődünk, és csak a szükséges ismeretlenekre vonatkozó egyenletekből felépített rendszer együtthatómátrixát kell invertálni. Ez utóbbi viszont mindössze $(2n-2) \times (2n-2)$ méretű, tehát lényegesen kisebb, mint a hagyományos esetben adódó $(4n-6) \times (4n-6)$ méretű együtthatómátrix.

Lássuk ezek után, hogy melyek azok a szükséges egyenletek, amelyeket elegendő felírunk.

Tekintsük ismét a 3. ábrát! Az első ($P_1P_2P_3$) háromszögre a (26), (32), (33) egyenletekből a $\Delta\xi_{31}$ és a $\Delta\eta_{31}$ ismeretlenek kiküszöbölésével:

$$\Delta\xi_{21} \sin \alpha_{12} - \Delta\eta_{21} \cos \alpha_{12} = T_{12} , \quad (38)$$

$$\Delta\xi_{32} \sin \alpha_{23} - \Delta\eta_{32} \cos \alpha_{23} = T_{23} , \quad (39)$$

$$\Delta\xi_{21} \sin \alpha_{31} - \Delta\eta_{21} \cos \alpha_{31} - \Delta\xi_{32} \sin \alpha_{31} + \Delta\eta_{32} \cos \alpha_{31} = T_{31} . \quad (40)$$

az összes többi háromszögre pedig további két-két egyenlet adódik:

$$\Delta\xi_{i+2,i+1} \sin \alpha_{i+1,i+2} - \Delta\eta_{i+2,i+1} \cos \alpha_{i+1,i+2} = T_{i+1,i+2} \quad (41)$$

és

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{i+1,i} \sin \alpha_{i+2,i} - \Delta\eta_{i+1,i} \cos \alpha_{i+2,i} - \\ - \Delta\xi_{i+2,i+1} \sin \alpha_{i+2,i} + \Delta\eta_{i+2,i+1} \cos \alpha_{i+2,i} = T_{i+2,i} \end{aligned} \quad (42)$$

ahol $i = 2, 3, 4, \dots, n-2$.

Ez összesen $2n-3$ egyenlet $2n-2$ $\Delta\xi$ és $\Delta\eta$ ismeretlennel. A feladat egyértelmű megoldásához a korábbi megállapításainknak megfelelően most is további információ (egyenlet) szükséges. Ezt a további információt az interpolációs hálózat pontjaiban megadott (ismert) függővonal-elhajlások szolgáltatják. Amennyiben az interpolációs láncolat két tetszőleges pontjában (lehetőleg a végpontokon) adottak a ξ_1, η_1 és a ξ_n, η_n értékek, akkor a (38), (39), (40), továbbá a (41) és a (42) összefüggések mellé felírhatók még a (36), (37) feltételei egyenletek is, és a $\Delta\xi, \Delta\eta$ ismeretlenek értéke kiegyenlítéssel meghatározható.

2.3 Interpoláció fokozatos kiküszöböléssel

Számos gyakorlati előnyhöz jutunk abban az esetben, ha a $\Delta\xi, \Delta\eta$ ismeretleneket nem az ismeretlenek együtthatómátrixának invertálásán keresztül, hanem fokozatos kiküszöböléssel (lépésenként) határozzuk meg (BADEKAS - MUELLER 1967).

A lépésenkénti meghatározás lényegének bemutatásához tekintsük ismét a 3. ábrán látható interpolációs láncolatot. A számunkra szükségtelen ismeretlenekkel (a $P_1P_3, P_2P_4, P_3P_5, P_4P_6, \dots$ oldalakra vonatkozó $\Delta\xi, \Delta\eta$ függővonal-elhajlás összetevőkkel) nem fogunk törődni, csupán a $P_1P_2, P_2P_3,$

P_3P_4 , P_4P_5 , ... oldalakra vonatkozó $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ismeretleneket kívánjuk meghatározni.

Kezdjük az ismeretlenek meghatározását a $P_1P_2P_3$ háromszög első P_1P_2 oldalára, és induljunk ki az alábbi triviális összefüggésből:

$$\Delta\xi_{21} = u = a_1u + b_1 \quad (43)$$

ahol

$$a_1 = 1 \quad \text{és} \quad b_1 = 0 \quad (44)$$

Beírva a (26)-ba a (43) egyenlőséget, és kifejezve a $\Delta\eta_{12}$ értékét:

$$\Delta\eta_{12} = \frac{a_1 \sin \alpha_{12}}{\cos \alpha_{12}} u + \frac{b_1 \sin \alpha_{12} - T_{12}}{\cos \alpha_{12}} ,$$

vagy rövidebben:

$$\Delta\eta_{21} = u = c_1u + d_1 , \quad (45)$$

ahol

$$c_1 = \frac{a_1 \sin \alpha_{12}}{\cos \alpha_{12}}$$

és

$$d_1 = \frac{b_1 \sin \alpha_{12} - T_{12}}{\cos \alpha_{12}} . \quad (46)$$

Folytassuk az ismeretlenek meghatározását a $P_1P_2P_3$ háromszög következő P_2P_3 oldalára. Kiküszöbölve a $P_1P_2P_3$ háromszögre felírható (26) , (32) , (33) , (34) és (35) összefüggésekből a $\Delta\xi_{31}$ és a $\Delta\eta_{31}$ ismeretleneket, továbbá bevezetve a

$$Q = (\sin \alpha_{23} \cos \alpha_{31} - \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{23})^{-1} \quad (47)$$

jelölést, a $\Delta\xi_{32}$ és a $\Delta\eta_{32}$ ismeretlenekre az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\Delta\xi_{32} = (T_{23} \cos \alpha_{31} + T_{31} \cos \alpha_{23} + \Delta\xi_{21} \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{23} - \Delta\eta_{21} \cos \alpha_{31} \cos \alpha_{23})Q$$

és

$$\Delta\eta_{32} = (T_{23} \sin \alpha_{31} + T_{31} \sin \alpha_{23} + \Delta\xi_{21} \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{23} - \Delta\eta_{21} \cos \alpha_{31} \sin \alpha_{23})Q .$$

Behelyettesítve ezekbe a (43) és a (45) kifejezéseket:

$$\Delta\xi_{32} = [(a_1 \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{23} - c_1 \cos \alpha_{31} \cos \alpha_{23})u + T_{23} \sin \alpha_{31} + T_{31} \sin \alpha_{23} + b_1 \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{23} - d_1 \cos \alpha_{31} \cos \alpha_{23}]Q$$

és

$$\Delta\eta_{32} = [(a_1 \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{23} - c_1 \cos \alpha_{31} \cos \alpha_{23})u + T_{23} \cos \alpha_{31} + T_{31} \cos \alpha_{23} + b_1 \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{23} - d_1 \cos \alpha_{31} \sin \alpha_{23}]Q$$

vagy másképp jelölve:

$$\Delta\xi_{32} = a_2 u + b_2 , \quad (48)$$

$$\Delta\eta_{32} = c_2 u + d_2 , \quad (49)$$

ahol

$$a_2 = (a_1 \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{23} - c_1 \cos \alpha_{31} \cos \alpha_{23})Q ,$$

$$b_2 = (b_1 \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{23} - d_1 \cos \alpha_{31} \cos \alpha_{23} + T_{23} \cos \alpha_{31} + T_{31} \cos \alpha_{23})Q \quad (50)$$

és

$$c_2 = (a_1 \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{23} - c_1 \cos \alpha_{31} \sin \alpha_{23})Q ,$$

$$d_2 = (b_1 \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{23} - d_1 \cos \alpha_{31} \sin \alpha_{23} + T_{23} \sin \alpha_{31} + T_{31} \sin \alpha_{23})Q . \quad (51)$$

Látható, hogy az a_i és a c_i együtthatók kizárólag a hálózat geometriájának, míg a b_i és a d_i együtthatók a hálózat geometriájának és a szintfelület görbületére jellemző második potenciálderiváltaknak a függvényei.

A fenti (43) , (45) , (48) és (49) összefüggések a 3. ábrán látható láncolat valamennyi háromszögére sorra felírhatók. Általánosan, az i -edik háromszögre:

$$\Delta\xi_{i+2,i+1} = a_{i+1}u + b_{i+1} \quad (52)$$

$$\Delta\eta_{i+2,i+1} = c_{i+1}u + d_{i+1} . \quad (53)$$

Ezzel olyan egyparaméteres egyenletrendszerre jutunk, amelyben az összes ismeretlen az a paraméterek függvénye.

Hasonlóan az eddigi esetekhez, az u paraméter meghatározásához itt is további információ szükséges. Amennyiben ismerjük a hálózat két szélső pontjában a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők értékét, felírhatók az alábbi összefüggések:

$$\Delta\xi_{n1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i u + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \quad (54)$$

és

$$\Delta\eta_{n1} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i u + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \quad (55)$$

Az u paraméter értéke az (54) vagy az (55) összefüggés valamelyikéből meghatározható. Ezt az u értéket az (52), és az (53) összefüggésekbe beírva egyszerűen kiszámítható valamennyi szükséges pontpár között az ismeretlen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ függővonal-elhajlás különbség értéke.

Ha az (54) és az (55) összefüggés egyidejűleg felírható, akkor az u értéket kiegyenlítéssel határozhatjuk meg. Erre a célra például a (Badekas, Mueller 1967) kiegyenlítési modellje egyszerűsége miatt előnyösen alkalmazható.

Ezen kiegyenlítési modell alapelve szerint meg kell keresnünk azokat az l_i és x_i értékeket, amelyekre

$$f(l_i, x_i) = 0$$

ahol l_i a mért mennyiségek, x_i pedig a keresett paraméterek kiegyenlített értékei. Sorbafejtve az f függvényt, és a másod- és magasabb fokú tagokat elhagyva:

$$f(l_{0i}, x_{0i}) + \frac{\partial f}{\partial l_i} v_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0$$

ahol: v_i az l_{0i} megfigyelt mennyiségek javítása, δx_i pedig az x_{0i} előzetes értékek megváltozása, vagyis

$$l_i = l_{0i} + v_i$$

$$x_i = x_{0i} + \delta x_i \quad .$$

Mátrixos formában:

$$\mathbf{F} + \mathbf{L}v + \mathbf{A}x = \mathbf{0}$$

ahol:

$$\mathbf{F} = [f(l_{0i}, x_{0i})] \quad , \quad \mathbf{L} = \left[\frac{\partial f}{\partial l_i} \right] \quad \text{és} \quad \mathbf{A} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \quad .$$

Ezt a modellt a feladatunkra, vagyis az (54) és az (55) összefüggésekre alkalmazva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ \sum_{i=1}^{n-1} c_i \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} b_i - \xi_{n1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} d_i - \eta_{n1} \end{bmatrix}$$

ha az x_{0i} (itt $x_{0i} = u$) előzetes értékét zérusnak vesszük. A Σb és a Σd varianciáját $\mu_{\Sigma b}^2$ és $\mu_{\Sigma d}^2$ -vel jelölve a \mathbf{P} súlymátrix, illetve ennek \mathbf{P}^{-1} inverze:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mu_{\Sigma b}^2 & 1 \\ 0 & \mu_{\Sigma d}^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_{\Sigma b}^2 & 0 \\ 0 & \mu_{\Sigma d}^2 \end{bmatrix} \quad .$$

Képezzük ezek után az $\mathbf{S} = \mathbf{L}^* \mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}$ mátrixszorzatot (\mathbf{L}^* az \mathbf{L} traszponáltját jelöli), majd ennek \mathbf{S}^{-1} inverzét:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mu_{\Sigma b}^2 & 0 \\ 0 & \mu_{\Sigma d}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_{\Sigma b}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_{\Sigma d}^2} \end{bmatrix}.$$

A fenti jelölések mellett a megoldás általános alakja:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^* \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{S}^{-1} \mathbf{F},$$

ami ebben az esetben:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i - \xi_{n1} \right) \mu_{\Sigma d}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i - \eta_{n1} \right) \mu_{\Sigma b}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^2 \mu_{\Sigma d}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \right)^2 \mu_{\Sigma b}^2},$$

vagy u_ξ -vel jelölve az (54), és u_η -val az (55) egyenlet megoldását:

$$u = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^2 \mu_{\Sigma d}^2 u_\xi + \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \right)^2 \mu_{\Sigma b}^2 u_\eta}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^2 \mu_{\Sigma d}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \right)^2 \mu_{\Sigma b}^2} \quad (56)$$

Ha ezt az u értéket visszahelyettesítjük az (54), és az (55) összefüggésekbe, a Σa , Σb , Σc , Σd megfelelő értékeinek felhasználásával számított ξ és η értékek általában nem fognak megegyezni a függővonal-elhajlás összetevőknek a szélső pontok között megadott különbségével. A keletkező záróhibákat ellenkező előjellel mint korrekciókat vesszük figyelembe, és szétosztjuk az illető Σb és Σd összegek egyes tagjai között, ezek varianciáinak függvényében – feltételezve, hogy az egyes b_i és d_i tagok kovarianciái elhanyagolhatóan kicsik.

2.4 A ξ , η összetevők közvetlen számítása

Az eddig leírt gyakorlati megoldások többé-kevésbé előnyösen alkalmazhatók olyan (például a 3. ábrán is látható) interpolációs *láncolatok* esetén, amelyek kezdő és végpontjában ismert függővonal-elhajlás értékek vannak. Ugyanezen megoldási módszerek alkalmazása komoly számítástechnikai nehézségekkel járhat, ha az interpolációt nem láncolat mentén, hanem tetszőleges, nagyobb területre kiterjedő háromszöghálózat pontjaira végezzük. A (26), (32), (33) típusú közvetítőegyenletek felírása ugyan nem okoz gondot, azonban a (34), (35) kényszerfeltételi egyenletek számítógépes előállítására igen bonyolult. Ráadásul, ha a hálózatban kettőnél több csillagászati geodéziai pontunk van, amelyekben adottak a ξ , η értékek, akkor az ezeknek megfelelő kényszerfeltételi egyenletek számítógépes előállítása gondot jelent; a feldolgozás során a számítógépes program könnyen végtelen ciklusba kerülhet. Ilyen jellegű problémák tisztázásához és megoldásához gráfelméleti megfontolások szükségesek (TAKÁTSY, 1985).

Vizsgálataim szerint mindezek a nehézségek áthidalhatók, ha az interpoláció során nem az egyes pontok közötti $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ különbségeket tekintjük ismeretleneknek, hanem magukat a pontbeli ξ , η függővonal-elhajlás értékeket. Ennek megfelelően a

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{ij} &= \xi_i - \xi_j, \\ \Delta\eta_{ij} &= \eta_i - \eta_j\end{aligned}$$

helyettesítéssel alakítsuk át a (26) típusú összefüggéseinket:

$$T_{ij} = \xi_j \sin \alpha_{ij} + \eta_j \cos \alpha_{ij} - \xi_i \sin \alpha_{ij} - \eta_i \cos \alpha_{ij} . \quad (57)$$

Ezzel jelentősen le tudjuk csökkenteni az ismeretlenek számát, ugyanis az oldalanként két ismeretlen helyett pontonként lesz két ismeretlenünk. Tetszőleges hálózatban ugyanis a pontok száma jóval kisebb az oldalak számánál, mivel a klasszikus háromszögelési elv szerint a meglévő hálózathoz minden új

pont két oldallal csatlakozik. Homogén háromszögelési hálózatra az *oldal/pont* arány kettőnél nagyobb szám is lehet. További előnye ennek a megoldásnak, hogy a háromszögekre nem kell a (34), (35) kényszerfeltételeket felírni, mivel a felállított közvetítőegyenletek már tartalmazzák ezeket. Amennyiben az interpolációs hálózat m számú csillagászati geodéziai pontot tartalmaz ismert függővonal-elhajlás értékekkel, akkor az ezekre felírható kényszerfeltételekkel tovább csökkenthető az ismeretlenek száma, és a normálegyenletek mátrixának mérete.

Vizsgáljuk meg ezek után, hogyan oldható meg az interpoláció olyan tetszőleges hálózat esetében, amelyben az egyértelmű megoldáshoz szükségesnél több csillagászati geodéziai pont van, ahol ismerjük a függővonal-elhajlás összetevőket, és az ismeretlen értékeket kiegyenlítéssel határozzuk meg. A W_{Δ} és a W_{xy} Eötvös-inga mérések, valamint a ξ , η ismeretlen függővonal-elhajlás értékek közötti kapcsolatot az (57) összefüggés adja meg, amelyben:

$$T_{ij} = \frac{n_{ij}}{4g} \left[\left((W_{\Delta} - U_{\Delta})_i + (W_{\Delta} - U_{\Delta})_j \right) \sin 2\alpha_{ij} + \left((W_{xy} - U_{xy})_i + (W_{xy} - U_{xy})_j \right) \cos 2\alpha_{ij} \right] \quad (58)$$

ahol U_{Δ} és U_{xy} a görbületi gradiensek normális értékei. Felmerül a kérdés, hogy a kiegyenlítés szempontjából mely adatokat tekintjük mérési eredményeknek: a tényleges W_{Δ} és a W_{xy} Eötvös-inga méréseket, vagy az (58) szerint előállított T_{ij} értékeket? Mivel olyan egyszerű függvénykapcsolat (közvetítőegyenlet) nem írható fel, amelynek egyik oldalán egy mérési eredmény, a másikon pedig az ismeretlenek szerepelnek, ezért a számítást a közvetlen mérések kiegyenlítése feltételekkel és nem mért ismeretlenekkel (V. kiegyenlítési csoport) szerint kellene elvégezni, ez azonban túlzottan számításigényes, és gépi számítás esetén túl nagy tároló kapacitást igényel. Ezért a mérési eredmények tekintetében két közelítéssel élhetünk: egyrészt *az asztrogeodéziai pontokon mért függővonal-elhajlás összetevőket nem látjuk el javítással*, – tehát ezeket kényszerként visszük be a kiegyenlítésbe, másrészt pedig az (57) alapegyenletünk bal oldalán szereplő T_{ij} mennyiségeket tekintjük *fiktív mérési*

eredményeknek és látjuk el javítással. Így az (57) közvetítőegyenlet az alábbi formában írható fel

$$T_{ij} + v_{ij} = \xi_j \sin \alpha_{ij} + \eta_j \cos \alpha_{ij} - \xi_i \sin \alpha_{ij} - \eta_i \cos \alpha_{ij} \quad (59)$$

és ezzel a számítást a közvetett mérések kiegyenlítése az ismeretlenek között megadott feltételekkel (IV. kiegyenlítési csoport) szerint végezhetjük.

Az első közelítést azért tehetjük, mert a csillagászati geodéziai mérésekből meghatározott függővonal-elhajlás összetevők megbízhatósága jóval felülmúlja az interpolációval nyert értékek megbízhatóságát (ezt az elvet alkalmazzuk a geodéziai alaphálózataink esetében is). A második közelítés jogosságára pedig a súlyozás kérdésének vizsgálatakor még visszatérünk.

Az interpolációs hálózat minden egyes háromszögoldalára felírható az (59) alapján képzett

$$v_{ij} = \xi_j \sin \alpha_{ij} + \eta_j \cos \alpha_{ij} - \xi_i \sin \alpha_{ij} - \eta_i \cos \alpha_{ij} - T_{ij} \quad (60)$$

javítási egyenlet. Mátrixos írásmódban:

$$\underset{(m,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(m,2n)}{\mathbf{A}} \underset{(2n,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(m,1)}{\mathbf{l}}$$

ahol \mathbf{A} a javítási egyenletek együtthatómátrixa, \mathbf{x} a ξ és az η ismeretleneket tartalmazó vektor, \mathbf{l} a tisztatagok vektora, m az interpolációs hálózat oldalainak száma, n pedig a pontok száma. Az \mathbf{A} mátrix tetszőleges i -edik sorának zérustól különböző elemei

$$\left[\dots \sin \alpha_{ij} \quad \cos \alpha_{ij} \quad -\sin \alpha_{ij} \quad -\cos \alpha_{ij} \quad \dots \right], \quad (61)$$

az \mathbf{l} tisztatag vektor elemei pedig a T_{ij} értékek.

Az asztrogeodéziai pontokban rögzített függővonal-elhajlás kényszerértékek módosítják a javítási egyenletek szerkezetét. Jelölje

$$\begin{aligned}\xi_k &= \xi_{kc} = \text{adott}, & k &= 1, 2, \dots, m_1 \\ \eta_k &= \eta_{kc} = \text{adott}, & k &= 1, 2, \dots, m_2\end{aligned}$$

az adott függővonal-elhajlás értékeket. Ezeket az adott értékeket behelyettesítve a (60) javítási egyenletekbe csökkenni fog az ismeretlenek száma, és ennek megfelelően módosul a javítási egyenletek \mathbf{A} együttthatómátrixa és \mathbf{l} tisztatag vektora. Például ha az (59) egyenletben $\xi_i = \xi_{ic} = \text{adott}$ akkor az \mathbf{A} mátrix ennek megfelelő (61) sora:

$$\left[\dots \sin \alpha_{ij} \quad \cos \alpha_{ij} \quad \dots \quad -\cos \alpha_{ij} \quad \dots \right],$$

a megváltozott tisztatag pedig: $T_{ij} + \xi_{ic} \sin \alpha_{ij}$; vagyis az \mathbf{x} vektorból hiányzik a ξ_i , az \mathbf{A} mátrixból a ξ_i együttthatóinak oszlopa, az \mathbf{l} tisztatag vektor megfelelő elemei pedig $\xi_{ic} \sin \alpha_{ij}$ értékkel megváltoznak. Valamely interpolációs hálózatban lehetséges, hogy egyes pontokban a ξ értékek, más pontokban az η értékek adottak. Gyakoribb azonban, hogy ugyanabban az asztrogeodéziai pontban mind a ξ mind az η értéke ismert. Ebben az esetben a javítási egyenletek \mathbf{A} együttthatómátrixa, \mathbf{x} vektora, és az \mathbf{l} tisztatag vektora az előbbieken leírt módon tovább módosul.

A kiegyenlítés során felmerül a súlyozás kérdése is. Korábban azzal a közelítéssel éltünk, hogy a közvetlen Eötvös-inga mérések helyett az ezekből előállított fiktív mérési eredményeket választottunk kiindulásul. Fiktív mérési eredményeket azonban csak bizonyos feltételek teljesülése esetén alkalmazhatunk. A legfontosabb feltétel, hogy a fiktív mérési eredmények kovariancia mátrixa a hibaterjedés törvényéből levezethető legyen. Ehhez viszont szükséges a fiktív mérési eredményeket előállító összefüggés, amit a mi esetünkben az (58) egyenlet ad meg. Az (58) jobb oldalán álló mennyiségek közül a W_{Δ} és a W_{xy} Eötvös-inga mérések tekinthetők hibásaknak. Ezek megbízhatósága viszont közel egyenlő ($\pm 1 E$), továbbá egymástól független mennyiségeknek tekinthetők, tehát a \mathbf{Q}_{WW} súlykoefficiens mátrixuk egységmátrix lesz. A \mathbf{Q}_{WW} ismer-

tében a fiktív T_{ij} mérések \mathbf{Q}_{TT} súlykoefficiens mátrixa (DETREKŐI 1991) szerint:

$$\mathbf{Q}_{TT} = \mathbf{F}^* \mathbf{Q}_{WW} \mathbf{F} = \mathbf{F}^* \mathbf{F} ,$$

mivel $\mathbf{Q}_{WW} = \mathbf{E}$ egységmátrix. Az \mathbf{F}^* mátrix tetszőleges i -edik sorának elemei:

$$\left[\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial W_{\Delta}} \right)_1 \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial W_{\Delta}} \right)_2 \dots \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial W_{\Delta}} \right)_n \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial W_{xy}} \right)_1 \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial W_{xy}} \right)_2 \dots \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial W_{xy}} \right)_n \right]$$

A további vizsgálatokhoz állítsuk elő az \mathbf{F}^* mátrix első (a P_1P_2 pontok közötti oldalra vonatkozó) \mathbf{f}_1^* és második (a P_1P_3 pontok közötti oldalra vonatkozó) \mathbf{f}_2^* sorát:

$$\mathbf{f}_1^* = [n_{12}k(\sin 2\alpha_{12}, \sin 2\alpha_{12}, 0, 0, \dots, 0, \cos 2\alpha_{12}, \cos 2\alpha_{12}, 0, 0, \dots, 0,)]$$

és

$$\mathbf{f}_2^* = [n_{13}k(\sin 2\alpha_{13}, 0, \sin 2\alpha_{13}, 0, 0, \dots, 0, \cos 2\alpha_{13}, 0, \cos 2\alpha_{13}, 0, 0, \dots, 0,)]$$

ahol $k = \frac{1}{4}g$ állandó. Az \mathbf{f}_1^* segítségével a P_1P_2 oldalra vonatkozó T érték varianciája:

$$m^2 = n_{12}^2 k^2 (2 \sin^2 2\alpha_{12} + 2 \cos^2 2\alpha_{12}) = 2k^2 n_{12}^2$$

valamint az \mathbf{f}_1^* és az \mathbf{f}_2^* segítségével a P_1P_2 és a P_1P_3 oldalakra vonatkozó T értékek kovarianciája:

$$\text{cov} = n_{12}n_{13}k^2 (\sin 2\alpha_{12} \sin 2\alpha_{13} + \cos 2\alpha_{12} \cos 2\alpha_{13}) .$$

Megállapítható tehát, hogy a fiktív mérési eredmények korreláltak, és a súlykoefficiens mátrix ott tartalmaz kovariancia elemeket, ahol két oldal közös pontban csatlakozik.

Szükség esetén a súlymátrix ezen súlykoefficiens mátrix invertálásával állítható elő. A gyakorlatban azonban két közelítéssel élhetünk: egyrészt a T *fiktív mérési eredményeket függetleneknek tekintjük egymástól*, ezért a súlymátrix diagonálmátrix; másrészt *a fiktív mérési eredmények súlyát a távolság négyzetével fordított arányban vesszük fel*.

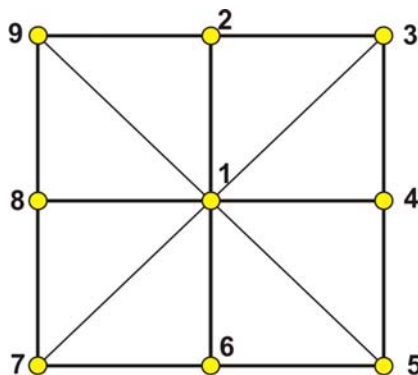
Független méréseket feltételezve a második közelítés az invertálásból is adódik, mivel a súlykoefficiens mátrix főátlójában az oldalhosszak négyzetével arányos tagok állnak. Az elhanyagolást azonban a számítási egyszerűsítésen kívül az is indokolja, hogy az ellentmondásokat nem annyira a mérési hibák, mint inkább a funkcionális modell számítási hibái okozzák. (Erre a későbbiekben még visszatérünk).

2.5 Interpoláció négyzethálózat sarokpontjaira

Renner János dolgozta ki ezt a nagyobb összefüggő területre vonatkozó interpolációs eljárást, amely szintén megkívánja a teljes együtthatómátrix invertálását (RENNER 1952, 1956, 1957).

Renner módszerének az a lényege, hogy a függővonal-elhajlás értékeket nem az Eötvös-inga mérési pontokban, hanem tetszőleges négyzetháló sarokpontjaiban határozzuk meg. Ennek érdekében a kérdéses területet észak-dél és kelet-nyugat irányú vonalakkal 1-2 *km*-es oldalhosszúságú négyzethálózattal borítjuk be, és az így adódó sarokpontokra az ismert Eötvös-inga mérések alapján interpoláljuk a szükséges W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek értékét.

A négyzetes hálózat bármely tetszőleges belső pontját a 2-1. ábrán látható formában nyolc szomszédos pont veszi körül, amelyek által kialakított nyolc derékszögű háromszögben igen egyszerű összefüggések írhatók fel a középső ponthoz kapcsolódó függővonal-elhajlás összetevőkre vonatkozóan.



2-1. ábra. A Renner-féle négyzetes hálózat.

Ha a négyzetes hálózat minden egyes pontjára felírjuk ezeket az egyenleteket, akkor minden $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ különbségre felírt összefüggés kétszer szerepel, tehát a pontonkénti nyolc egyenlet száma *négy* egymástól független egyenletre csökken.

Renner a kísérleti számításai során a $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ értékeket tekintette ismeretleneknek, célszerűbb azonban itt is magukat a ξ , η értékeket választani ismeretleneknek. Ebben az esetben az interpolációs hálózat tetszőleges pontját (például a 2-1. ábrán a P_1 pontot) körülvevő nyolc darab P_2 , P_3 , P_4 , ..., P_9 pont esetén az alábbi rendkívül egyszerű összefüggések írhatók fel:

$$\begin{aligned}
 T_{12} &= \eta_2 - \eta_1 \\
 \sqrt{2}T_{13} &= \xi_3 + \eta_3 - \xi_1 - \eta_1 \\
 T_{14} &= \xi_4 - \xi_1 \\
 \sqrt{2}T_{15} &= \xi_5 - \eta_5 - \xi_1 + \eta_1 \\
 T_{16} &= -\eta_6 + \eta_1 \\
 \sqrt{2}T_{17} &= -\xi_7 - \eta_7 + \xi_1 + \eta_1 \\
 T_{18} &= -\xi_8 + \xi_1 \\
 \sqrt{2}T_{19} &= -\xi_9 + \eta_9 + \xi_1 - \eta_1
 \end{aligned}$$

Hasonlóképpen igen egyszerűen számíthatók ki az összefüggések bal oldalán álló T_{ij} értékek is, ugyanis a T_{ij} -ben szereplő szögfüggvények értéke csak 0 vagy 1 lehet. Bármely tetszőleges méretű interpolációs hálózat esetén

mindössze ez a nyolc összefüggés valamelyike írható fel, ettől eltérés csupán a ξ , η kényszerértékeket tartalmazó asztrogeodéziai pontok környezetében, ezek csatlakoztatása miatt adódik.

2.6 A mátrix-ortogonalizációs módszer alkalmazása

A fokozatos kiküszöbölés módszere kivételével bármelyik fajta gyakorlati megoldás során szembekerülhetünk a hagyományos kiegyenlítési eljárás alkalmazásakor egy viszonylag nagyobb méretű mátrix invertálásának nehézségeivel. Valamely feladat kiegyenlítését alapvetően két különböző úton hajthatjuk végre: vagy a szokásos módszerrel *a normálegyenletek felállításán és megoldásán keresztül*, vagy közvetlenül *mátrix-ortogonalizációs módszerrel*.

Vannak olyan kiegyenlítési feladatok, amelyeknek a megoldása a szokásos módszerrel – a normálegyenletek felállításán és invertálásán keresztül – nem vezet a várt pontosságú eredményre, mert például az előállított normálegyenletek együtthatómátrixa gyengén kondicionált. Ezért a kiegyenlítési feladatok gyakorlati megoldására a mátrix-ortogonalizációs eljárás alkalmazása célszerűbb, hiszen ezzel megkerülhetjük a normálegyenletek felállítását, és megfelelő mátrix-transzformációk alkalmazásával közvetlenül nyerhetjük a kívánt megoldást, amely numerikusan stabilabb (VÖLGYESI 1975, 1979, 1980).

A mátrix-ortogonalizációs kiegyenlítési eljárás alapelvét az

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \hline (n,r) & (n,1) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline (r,r) & (r,1) \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W} & \mathbf{v} \\ \hline (n,r) & (n,1) \\ \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{x} \\ \hline (r,r) & (r,1) \end{array} \right] \quad (62)$$

hypermátrix-transzformáció szemlélteti, ahol \mathbf{A} a javítási egyenletek együtthatómátrixa, \mathbf{I} a tisztatagok vektora, \mathbf{E} egységmátrix, $\mathbf{0}$ zérusvektor; \mathbf{W}

ortonormális oszlopokkal rendelkező mátrix, \mathbf{G}^{-1} pedig egy felső háromszög-mátrix.

A (62) transzformáció algoritmusának szemléltetéséhez vezessük be az alábbi jelöléseket: legyen \mathbf{a}_i az \mathbf{A} mátrix i -edik oszlopa, jelölje \mathbf{w}_i a \mathbf{W} mátrix i -edik oszlopát, \mathbf{e}_i az \mathbf{E} mátrix i -edik oszlopát, és végül \mathbf{g}_i a \mathbf{G}^{-1} mátrix i -edik oszlopát! Ezekkel a jelölésekkel a (62) mátrixtranszformáció az alábbi lépésekben hajtható végre:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{g}_1 \end{bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}}{\|\mathbf{a}_1\|_E} \\ \left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix}_{<k>} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix}_{<k+1>} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix}_{<k>} - ((\mathbf{a}_i)_{<k>}, \mathbf{w}_k) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{g}_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i^* \\ \mathbf{g}_i^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix}_{<i>} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{g}_i \end{bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_i^* \\ \mathbf{g}_i^* \end{bmatrix}}{\|\mathbf{w}_i^*\|_E} \end{aligned} \right\} \\ i = 2, 3, \dots, r; k = 1, 2, \dots, j-1 \end{aligned}$$

majd ezt követően:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^r (\mathbf{I}, \mathbf{w}_k) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{g}_k \end{bmatrix}$$

ahol $\|\mathbf{a}_1\|_E$ és $\|\mathbf{w}_i^*\|_E$ az \mathbf{a}_i illetve a \mathbf{w}_i^* oszlopvektorok Euklideszi normája, az $(\mathbf{a}_i, \mathbf{w}_k)$ és az $(\mathbf{I}, \mathbf{w}_k)$ pedig az \mathbf{a}_i és a \mathbf{w}_k oszlopvektorok, illetve az \mathbf{I} és a \mathbf{w}_k vektorok skaláris szorzata.

A (62) mátrixtranszformáció a keresett x_i ismeretleneket és a v_i javításokat az \mathbf{x} , illetve a \mathbf{v} vektor helyén közvetlenül szolgáltatja (VÖLGYESI 1979, 1980).

Az x_i ismeretlenek varianciáját és kovarianciáit a

$$\mathbf{Q}_{(\mathbf{x})} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{G}^{-1})^* \quad (63)$$

súlykoefficiens mátrix tartalmazza, ahol $(\mathbf{G}^{-1})^*$ a \mathbf{G}^{-1} transzponáltját jelöli.

A mátrix-ortogonalizációs kiegyenlítési eljárás további részleteinek tárgyalásával itt nem foglalkozunk, ezek korábbi munkáimban megtalálhatók (VÖLGYESI 1975, 1979, 1980).

3. AZ INTERPOLÁCIÓ PONTOSSÁGI JELLEMZŐI

Az interpoláció különböző gyakorlati megoldási módszerei által szolgáltatott függővonal-elhajlás értékek pontossága nem azonos. A pontosság jellemzésére, az interpolált értékek középhibáinak meghatározására több lehetőség is kínálkozik.

A legegyszerűbb és a pontosságról a legreálisabb információt szolgáltató módszer az interpolált értékek közvetlen összehasonlítása ismert függővonal-elhajlás értékekkel. Erre akkor kínálkozik lehetőség, ha az asztrogeodéziai pontok viszonylag sűrű hálózata áll rendelkezésünkre és egyes asztrogeodéziai pontokat az interpolációs hálózaton belül ellenőrző pontként tudunk kezelni, ahol az interpolált függővonal-elhajlás értékek közvetlenül összehasonlíthatók az asztrogeodéziai értékekkel. Az interpolációs módszerek pontosságának jellemzésére egy másik, ugyancsak egyszerű lehetőség adódik, ha olyan különböző interpolációs hálózatokat (láncolatokat) létesítünk, amelyek közös hálózati pontokban csatlakoznak. A különböző hálózatok azonos pontjaiban az interpolált értékeknek többé-kevésbé meg kellene egyezniük, az eltérések mértéke nyilvánvalóan az interpoláció pontosságát jellemzi.

Ha az interpolált értékek közvetlen ellenőrzésére nincs módunk, akkor az interpolált értékek pontossági mérőszámainak meghatározása matematikai módszerek alkalmazásával, a hibaterjedés törvényeinek felhasználásával is lehetséges.

A hagyományos kiegyenlítési eljárás alkalmazása esetén az interpolált függővonal-elhajlás értékek középhibái az ismert módon az

$$\mathbf{M}_{(x)} = \mu_0^2 \mathbf{Q}_{(x)}$$

variancia-kovariancia mátrixból határozhatók meg, ahol μ_0^2 a súlyegység középhibája, $\mathbf{Q}_{(x)}$ pedig az ismeretlen függővonal-elhajlások súlykoefficiens mát-

rixa (DETREKŐI 1991). A $\mathbf{Q}_{(x)}$ mátrix vagy egyszerűen a normálegyenletek együttthatómátrixának \mathbf{N}^{-1} inverze, vagy összetettebb esetekben az \mathbf{N}^{-1} felhasználásával könnyen előállítható.

Az interpolált függővonal-elhajlások pontossági mérőszámaihoz akkor is igen egyszerűen hozzájuthatunk, ha a számítást a mátrix-ortogonalizációs módszer alkalmazásával végezzük. Ebben az esetben az interpolált függővonal-elhajlások $\mathbf{Q}_{(x)}$ súlykoefficiens mátrixa a (63) összefüggés szerint állítható elő.

A fenti esetekhez képest részletesebben foglalkozunk a fokozatos kiküszöbölés módszere által szolgáltatott eredmények pontossági mérőszámainak vizsgálatával. Az alapfeladatunk most is az, hogy a kiinduló adatok pontossági mérőszámaiból az interpolált függővonal-elhajlások pontosságára következtessünk.

Vizsgálatainkban a hibaterjedés általános törvényét alkalmazzuk, amely szerint legyenek adottak az

$$\left. \begin{aligned} u &= f(x, y, z, \dots) \\ v &= g(x, y, z, \dots) \\ w &= h(x, y, z, \dots) \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

többváltozós függvények, és legyen adott az alábbi

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_x^2 & c_{xy} & c_{xz} & \dots \\ c_{yx} & \mu_y^2 & c_{yz} & \dots \\ c_{zx} & c_{zy} & \mu_{xz}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

variancia-kovariancia mátrix, ahol μ_i^2 az i -edik változó varianciája (középhibájának négyzete), c_{ij} pedig az i -edik és a j -edik független változó

$$c_{ij} = r_{ij} |\mu_i| |\mu_j|$$

kovarianciája (r_{ij} az i -edik és a j -edik változó közötti korrelációs együttható).

Az

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \dots \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} & \dots \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

jelöléssel (\mathbf{F}^* az \mathbf{F} transzponáltja) az u, v, w, \dots mennyiségek keresett

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mu_u^2 & c_{uv} & c_{uw} & \dots \\ c_{vu} & \mu_v^2 & c_{vw} & \dots \\ c_{wu} & c_{wv} & \mu_w^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

variancia-kovariancia mátrixa:

$$\mathbf{N} = \mathbf{F}^* \mathbf{M} \mathbf{F} \quad (64)$$

Tekintsük adottnak az Eötvös-inga mérésekre a $\mu_{W_A}^2$, $\mu_{W_{xy}}^2$ és a c_{W_A} , $c_{W_{xy}}$, valamint az asztrogeodéziai pontokban ismert függővonal-elhajlásokra a $\mu_{\xi_0}^2$ és a $\mu_{\eta_0}^2$ értékeket. Mivel a mérési pontok koordinátáiból számított, a (30), vagy a (31) összefüggésben szereplő távolságok és azimutok hibái elhanyagolhatók a torziós inga mérések hibái mellett (VÖLGYESI 1975, 1976), ezért a fentiek értelemszerű alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \mu_{T_{12}}^2 &= \left(\frac{n_{12}}{2g} \right)^2 \left[2 \sin^2 2\alpha_{12} \mu_{W_A}^2 + 2 \cos^2 2\alpha_{12} \mu_{W_{xy}}^2 + 4 \sin 2\alpha_{12} \cos 2\alpha_{12} c_{W_A, W_{xy}} \right] \\ \mu_{T_{23}}^2 &= \left(\frac{n_{23}}{2g} \right)^2 \left[2 \sin^2 2\alpha_{23} \mu_{W_A}^2 + 2 \cos^2 2\alpha_{23} \mu_{W_{xy}}^2 + 4 \sin 2\alpha_{23} \cos 2\alpha_{23} c_{W_A, W_{xy}} \right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
c_{T_{23}, T_{31}} &= \frac{n_{23} n_{31}}{(2g)^2} \left[\sin 2\alpha_{23} \sin 2\alpha_{31} \mu_{W_{\Delta}}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \cos 2\alpha_{23} \cos 2\alpha_{31} \mu_{W_{xy}}^2 + \sin(2\alpha_{23} + 2\alpha_{31}) c_{W_{\Delta}, W_{xy}} \right] \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Ezek felhasználásával a (44), (46), (50) és az (51) alapján, a (47) jelölést itt is alkalmazva:

$$\mu_{b_1}^2 = 0$$

$$\mu_{d_1}^2 = \frac{\mu_{T_{12}}^2}{\cos^2 \alpha_{12}}$$

$$c_{b_1, d_1} = 0$$

$$\begin{aligned}
\mu_{b_2}^2 &= \left[\cos^2 \alpha_{23} \mu_{T_{31}}^2 + \cos^2 \alpha_{31} \mu_{T_{23}}^2 + 2 \cos \alpha_{23} \cos \alpha_{31} c_{T_{23}, T_{31}} + \right. \\
& \quad \left. + \sin^2 \alpha_{31} \cos^2 \alpha_{23} \mu_{b_1}^2 + \cos^2 \alpha_{31} \cos^2 \alpha_{23} \mu_{d_1}^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2 \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{31} \cos^2 \alpha_{23} c_{b_1, d_1} \right] Q^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{d_2}^2 &= \left[\sin^2 \alpha_{23} \mu_{T_{31}}^2 + \sin^2 \alpha_{31} \mu_{T_{23}}^2 + 2 \sin \alpha_{23} \sin \alpha_{31} c_{T_{23}, T_{31}} + \right. \\
& \quad \left. + \sin^2 \alpha_{31} \sin^2 \alpha_{23} \mu_{b_1}^2 + \cos^2 \alpha_{31} \sin^2 \alpha_{23} \mu_{d_1}^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2 \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{31} \sin^2 \alpha_{23} c_{b_1, d_1} \right] Q^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{b_2, d_2} &= \left[\sin \alpha_{23} \cos \alpha_{23} \mu_{T_{31}}^2 + \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{31} \mu_{T_{23}}^2 + \right. \\
& \quad \left. + (\cos \alpha_{32} \sin \alpha_{31} + \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{31}) c_{T_{23}, T_{31}} + \right. \\
& \quad \left. + \sin^2 \alpha_{31} \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{23} \mu_{b_1}^2 + \cos^2 \alpha_{31} \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{23} \mu_{d_1}^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2 \sin \alpha_{31} \cos \alpha_{31} \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{23} c_{b_1, d_1} \right] Q^2
\end{aligned}$$

⋮

majd végül ezekből:

$$\begin{aligned}
\mu_{\Sigma b}^2 &= \mu_{b_1}^2 + \mu_{b_2}^2 + \dots + \mu_{b_{n-1}}^2 + c_{b_1, b_2} + \dots \\
\mu_{\Sigma d}^2 &= \mu_{d_1}^2 + \mu_{d_2}^2 + \dots + \mu_{d_{n-1}}^2 + c_{d_1, d_2} + \dots
\end{aligned}$$

Ezzel elértük egyik fő célunkat, ugyanis megkaptuk az (56) összefüggéshez szükséges $\mu_{\Sigma b}^2$ illetve a $\mu_{\Sigma d}^2$ varianciákat.

Végül határozzuk meg a fokozatos kiküszöbölésen alapuló interpolációval előállított függővonal-elhajlás értékek középhibáit! Az u paraméter varianciája az (54) vagy az (55) alapján:

$$\mu_u^2 = \frac{\mu_{\xi 0}^2 + \mu_{\Sigma b}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^2}$$

vagy

$$\mu_u^2 = \frac{\mu_{\eta 0}^2 + \mu_{\Sigma d}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \right)^2}$$

attól függően, hogy mely adatok ismertek az u meghatározására. Az (52) és az (53) alapján az eddigi eredmények felhasználásával:

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta \xi_{i+1,i}}^2 &= a_{i+1}^2 \mu_u^2 + \mu_{b_{i+1}}^2 \\ \mu_{\Delta \eta_{i+1,i}}^2 &= c_{i+1}^2 \mu_u^2 + \mu_{d_{i+1}}^2 \end{aligned}$$

a szükséges függővonal-elhajlás különbségek varianciái. Végül a keresett függővonal-elhajlás összetevők középhibái:

$$\mu_{\xi_i} = \pm \left[\mu_{\xi 0}^2 + \left(\sum_{k=1}^i a_k \right)^2 \mu_u^2 + \mu_{\Sigma b}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (65)$$

$$\mu_{\eta_i} = \pm \left[\mu_{\eta 0}^2 + \left(\sum_{k=1}^i c_k \right)^2 \mu_u^2 + \mu_{\Sigma d}^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (66)$$

4. GYAKORLATI MEGOLDÁS

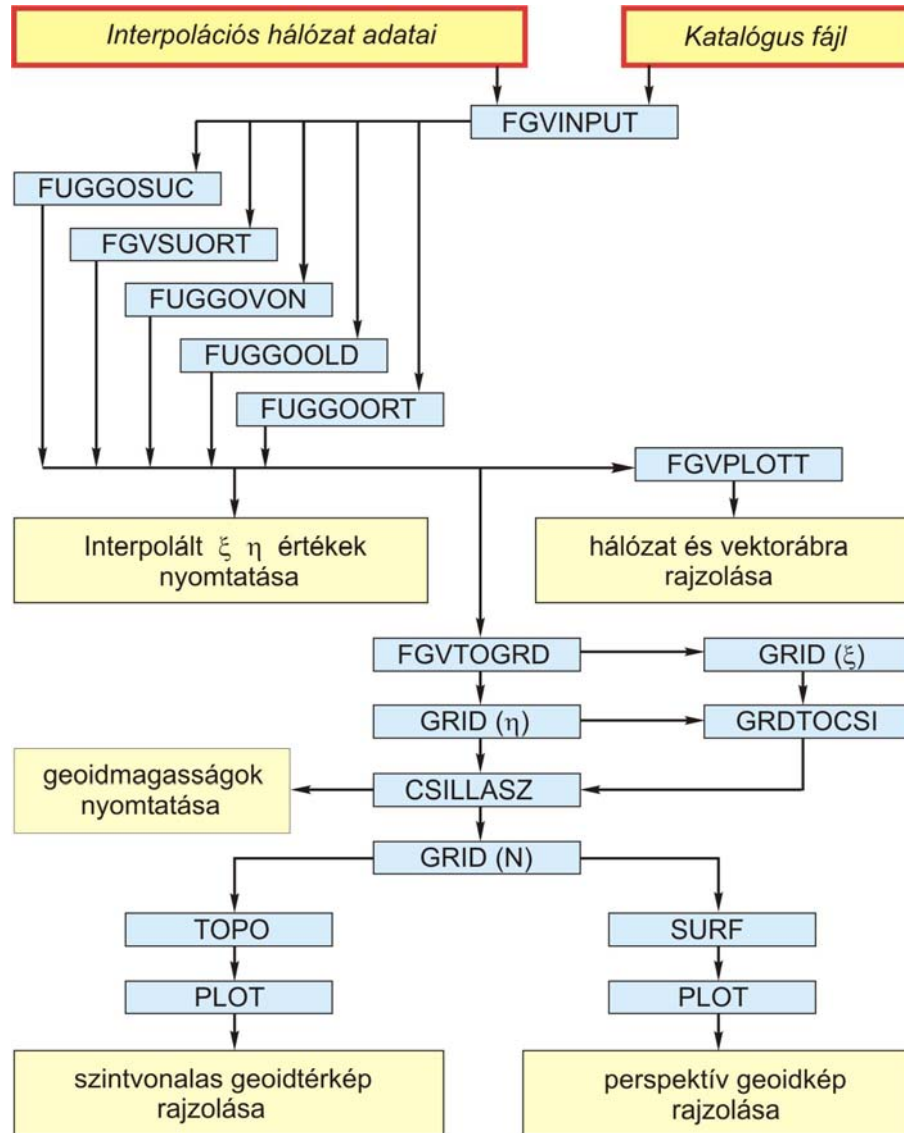
Az előző részekben tárgyalt elméleti megfontolásoknak megfelelően szoftvert készítettem, amely Eötvös-inga mérések felhasználásával akár láncolat mentén, akár tetszőleges területet beborító hálózatokra, bármely interpolációs módszerrel képes a függővonal-elhajlás értékeket meghatározni. Ki tudja rajzolni az interpolációs hálózatot és az interpolált függővonal-elhajlások vektorábráját, csillagászati szintezéssel ki tudja számítani a geoidmagasságokat, és meg tudja rajzolni a kérdéses területre a geoid akár perspektív, akár szintvonalas térképét. A szoftver működését az 4-1. ábra szemlélteti.

A számítási munka első lépéseként létre kell hoznunk egy ún. *katalógus fájlt*, amely tartalmazza a feldolgozandó területre vonatkozó valamennyi ismert Eötvös-inga mérési adatot (a mérési pontok azonosító számát, koordinátáit, a W_{Δ} , W_{xy} görbületi gradienseket), továbbá a katalógusnak tartalmaznia kell a rendelkezésre álló asztrogeodéziai pontok ismert függővonal-elhajlás értékeit.

A programrendszer számára a katalógus fájl mellett elő kell állítanunk azt a másik input fájlt is, amely az *interpolációs hálózat adatait* tartalmazza (meg kell páronként adni azon mérési pontok számát, amelyek a kérdéses interpolációs hálózatban háromszögoldalakat alkotnak, illetve meg kell jelölni, hogy melyek azok a kényszerpontok, ahol ismertek a függővonal-elhajlás értékek).

Az 4-1. ábrán szemléltetett folyamatnak megfelelően a feldolgozó programrendszer első, FGVINPUT elnevezésű programja a kérdéses interpolációs hálózat adatait tartalmazó fájl felhasználásával kiválogatja a katalógusfájlból a feldolgozáshoz szükséges adatokat, és annak függvényében, hogy a továbbiakban mely interpolációs módszert kívánjuk használni, a különböző (FUGGOSUC, FGVSUORT, FUGGOVON, FUGGOOLD, FUGGOORT) programok számára előállítja a megfelelő formátumú bemenő adatrendszert. Ekkor választhatjuk ki például, hogy korrekció nélküli, vagy a topografikus korrekcióval

ellátott Eötvös-inga mérési eredményekkel akarjuk-e az interpolációt végezni; megadhatjuk, hogy mely pontot választjuk az adott területen a helyi koordináta-rendszer kezdőpontjaként, és itt kell megadnunk, hogy a továbbiakban mely interpolációs módszerrel kívánunk számolni.



4-1. ábra. Az interpolációs szoftver működésének vázlata.

Az 4-1. ábrának megfelelően az alábbi öt lehetőség közül választhatunk:

A FUGGOSUC nevű program tetszőleges interpolációs *láncolatok* esetén adott Eötvös-inga mérési eredmények felhasználásával két asztrogeodéziai pont között meghatározza a *láncolat* pontjaiban a függővonal-elhajlás összetevők közvetlen értékeit a fokozatos kiküszöbölés módszerével. A program input adatai: az interpolációs hálózat pontjainak koordinátái, az egyes pontokon vagy az Eötvös-ingával közvetlenül mért W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek, vagy az ezek alapján a (13) szerint előállított ΔW_{Δ} és ΔW_{xy} értékek, valamint az ismert ξ_1, η_1 és ξ_n, η_n függővonal-elhajlások a *láncolat* kezdő és végpontján. Ezen adatok felhasználásával a program kiszámítja a hálózat egyes oldalainak hosszúságát és azimutját; a (30) felhasználásával minden egyes háromszögdalra előállítja a T_{ij} értékeket, ezek varianciáját és kovarianciáit; kiszámítja az a_1, b_1, c_1 és d_1 együtthatókat, ezek $\Sigma a, \Sigma b, \Sigma c$ és Σd összegét; az (54), (55), vagy az (56) összefüggés alapján kiszámítja az u paraméter értékét, meghatározza a megfelelő oldalakra a $\Delta \xi_{ij}, \Delta \eta_{ij}$ összetevő különbségeket; majd ezek és a kiinduló adatok birtokában kiszámítja az interpolációs hálózat pontjaiban az ismeretlen értékeket és ezek középpontjait. Végül a program előállítja az output fájlokat, részben az eredmények nyomtatásához, részben pedig az esetleges további feldolgozás céljára.

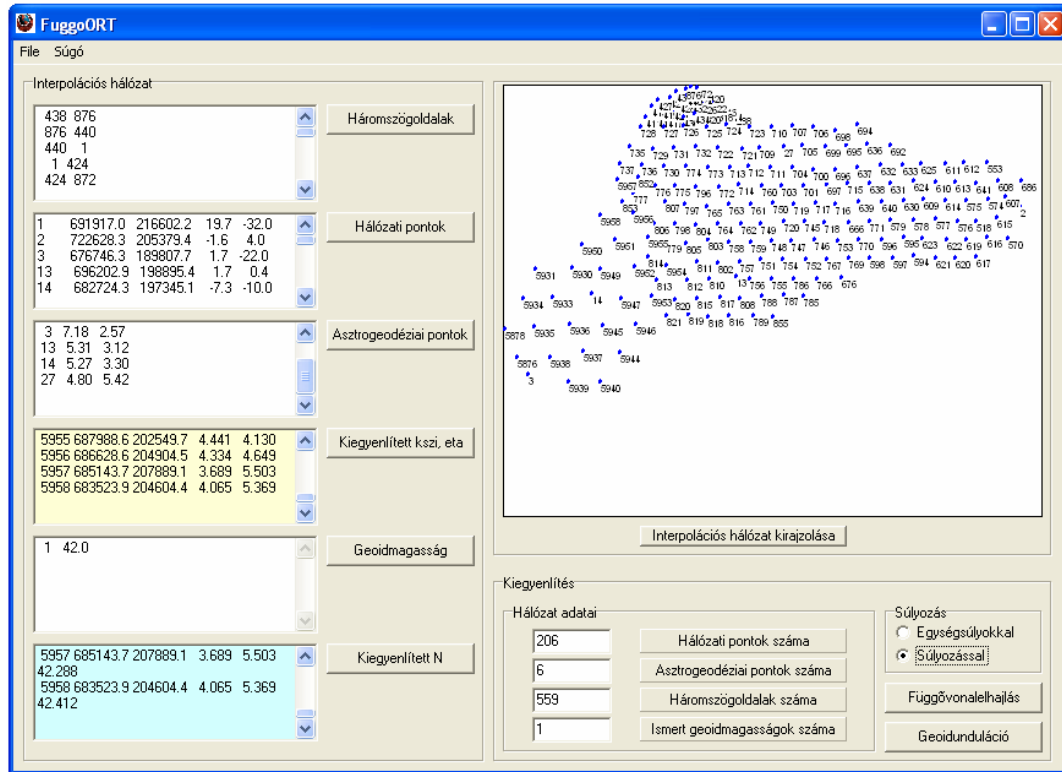
Az FGVSUORT nevű program adott Eötvös-inga mérési eredmények felhasználásával két asztrogeodéziai pont közötti interpolációs *láncolat* esetén meghatározza a *láncolat* pontjai közötti $\Delta \xi, \Delta \eta$ függővonal-elhajlás összetevő különbségeket mátrix-ortogonalizációs módszer felhasználásával. A program input adatai teljesen azonosak a FUGGOSUC program kiinduló adataival és a FUGGOSUC programhoz hasonlóan csak olyan interpolációs *láncolatok* számítására alkalmazható, melyek kezdő és végpontjában adottak a függővonal-elhajlás értékek.

A FUGGOVON nevű program már nem csak egyszerű interpolációs *láncolatok*, hanem tetszőleges alakú hálózatok számítására is alkalmazható. A

program adott Eötvös-inga mérési eredmények felhasználásával, tetszőleges számú és területi eloszlású asztrogeodéziai pontban rögzített ξ_0 , η_0 érték figyelembevételével határozza meg az interpolációs hálózat pontjaiban a ξ , η függővonal-elhajlás összetevők közvetlen értékeit. A program input adatai az interpolációs hálózat pontjainak koordinátái, az egyes pontokon vagy az Eötvös-ingával közvetlenül mért W_Δ és W_{xy} görbületi gradiensek, vagy az ezek alapján a (13) szerint előállított ΔW_Δ és ΔW_{xy} értékek, az ismert ξ_0 , η_0 függővonal-elhajlás értékek a tetszőleges számú kényszerponton, és végül sorra az interpolációs hálózat oldalai (két-két pontszámmal megadva). Ezen adatok felhasználásával a program először kiszámítja a hálózat egyes oldalainak hosszúságát és azimutját, előállítja a javítási egyenletek együtthatómátrixát és tisztatag vektorát, meghatározza az ismeretlen ξ , η értékeket és ezek középhibáit, és végül előállítja az output fájlokat, részben az eredmények nyomtatásához, részben pedig az esetleges további feldolgozás céljára.

A FUGGOOLD nevű program a FUGGOVON módosított változata. A két program között az a különbség, hogy a FUGGOOLD input adatai között nem szerepelnek az interpolációs hálózat oldalai, mivel ezeket a FUGGOOLD nevű program automatikusan állítja elő. Az oldalak helyett viszont nagy körültekintéssel meg kell adni egy maximális távolsáértéket; amelynél kisebb értékekre a program minden egyes hálózati ponthoz megkeresi azokat a szomszédos pontokat (Eötvös-inga mérési helyeket), amelyekkel hálózati oldalak alkothatók. A program igen előnyösen alkalmazható olyan "homogén" területeken, ahol az Eötvös-inga mérési állomások közel azonos távolságra fekszenek egymástól, és a kialakítható interpolációs hálózatban közel azonos oldalhosszúságok adódnak.

A FUGGOORT az előző négy interpolációs programnál lényegesen nagyobb tudású számítógép program, amely igen nagy méretű mátrixokkal is képes dolgozni, emellett az általam elkészített interpolációs programok közül a leggyorsabban és a legpontosabban számol. A FUGGOORT program fő (*input-output*) ablakának képe a 4-2 ábrán látható.

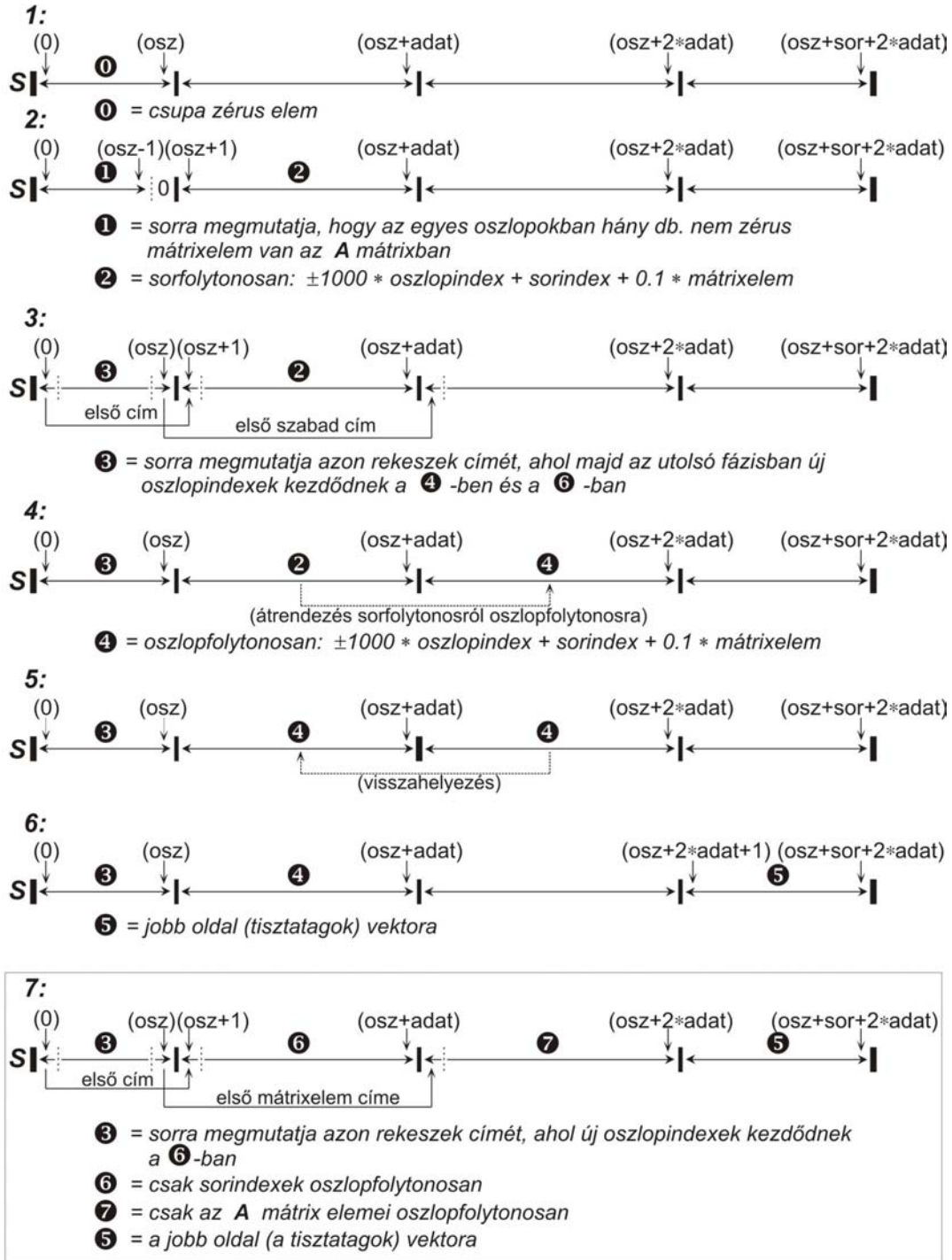


4-2. ábra. A FUGGOORT program kommunikációs ablaka.

A FUGGOORT tetszőleges alakú interpolációs hálózatok számítására alkalmazható, adott Eötvös-inga mérési eredmények felhasználásával, tetszőleges számú és területi eloszlású asztrogeodéziai pontban rögzített ξ_0 , η_0 értékek figyelembevétel határozza meg a kérdéses hálózat pontjaiban a ξ , η függővonal-elhajlás összetevők közvetlen értékeit mátrix-ortogonalizációs kiegyenlítési eljárással. A program input adatai megegyeznek a FUGGOVON input adataival.

Az **A** mátrix és az **I** vektor előállítás az **S** segédvektorban:

osz = oszlopok száma, sor = sorok száma,
adat = zérustól különböző mátrix elemek száma az **A** mátrixban



4-3. ábra. A nagyméretű mátrixok kezelésének alapelve.

A FUGGOORT a 4-3. ábrán vázolt programozási ötlet felhasználásával igen nagy méretű mátrixok kezelésére képes (VÖLGYESI 2000, 2001), ezért akár több százezer pontot tartalmazó interpolációs hálózatok is egyszerűen számíthatók és kiegyenlíthetők az alkalmazásával. Mivel ez a programozási ötlet más hasonló, a geodéziában gyakran előforduló bármely nagyméretű és rosszul kitöltött (sok zérus elemet tartalmazó) együtthetómátrixot szolgáltató kiegyenlítési probléma megoldására is igen jól alkalmazható, ezért a 4-3. ábrán vázlatosan bemutatom, hogyan állítható elő célszerűen és rendkívül helytakarékosan a javítási egyenletek együtthetómátrixa a mátrix-ortogonalizációs kiegyenlítési eljárás számára.

Az interpolációs hálózatot és az interpolált függővonal-elhajlások vektorábráját az FGVPLOTT elnevezésű program rajzolja ki. Az FGVPLOTT menürendszeréből többek között kiválaszthatjuk, hogy fel akarjuk-e tüntetni a rajzon a hálózati pontok pontszámát, össze akarjuk-e kötni az egyes háromszögoldalakat alkotó hálózati pontokat, és hogy ki akarjuk-e rajzoltatni (és milyen méretarányban) az interpolált függővonal-elhajlások vektorábráját. (Egyébként ez a program változtatás nélkül alkalmas bármely tetszőleges geodéziái hálózat ábrázolására)

Amennyiben az interpolált függővonal-elhajlások felhasználásával meg akarjuk határozni az adott terület részletes geoidképét is, az 4-1. ábrán vázolt utat kell követnünk. Az interpolációs hálózat területére vonatkozó részletes geoidképet a CSILLASZ nevű program állítja elő csillagászati szintezéssel. A CSILLASZ program számára szolgáló input adatokat több lépésben az FGVTOGRD, a GRID és a GRDTOCSI segédprogramok állítják elő.

Az FGVTOGRD segédprogram a FUGGOSUC, a FUGGOVON, a FUGGOOLD, vagy a FUGGOORT programok által előállított output fájlokat rendezi át olyan formában, hogy alkalmasak legyenek a GRID program számára a további feldolgozásra.

A GRID program a SURFER programrendszer része, a Golden Software Inc. szoftvercég terméke. A GRID olyan interpolációs program, amely egy

előzőleg kiválasztott rácsállandójú négyzethálózat sarokpontjaira interpolálja valamely tetszőleges területi eloszlásban megadott adathalmaz (például esetünkben a függővonal-elhajlások ξ , η összetevője, vagy például a geoidmagasságok) értékeit. A GRID program használatára azért van szükségünk, mert a függővonal-elhajlások meghatározását követően az interpolált ξ , η értékek tetszőleges, "szórt" területi eloszlásban ismertek, viszont valamely területen a csillagászati szintezés számításához a ξ , η összetevők szabályos rácshálózat sarokpontjaiban adott értékei szükségesek. Az 4-1. ábrán a GRID(ξ) és a GRID(η) egy előzőleg megfelelően kiválasztott rácsállandójú négyzethálózat sarokpontjaira interpolálja a tetszőleges, szórt területi eloszlásban ismert ξ , η függővonal-elhajlás összetevők értékeit.

A GRDTOCSI segédprogram a már szabályos rácshálózat sarokpontjaira interpolált függővonal-elhajlás összetevőket tartalmazó adatfájlokat rendezi át olyan formában, hogy alkalmasak legyenek a CSILLASZ program számára a csillagászati szintezéssel elvégezhető geoidmeghatározáshoz.

A CSILLASZ nevű program az interpolált függővonal-elhajlások felhasználásával csillagászati szintezéssel előállítja az interpolációs hálózat területére vonatkozó részletes geoidképet. A program az előre definiált rácsméretű négyzethálózat sarokpontjaiban adja meg a geoid-ellipszoid távolságok értékét, és kétféle adatfájlt állít elő: az egyik a számítási eredményeket könnyen áttekinthető táblázatos formában jeleníti meg, míg a másik adatfájl a meghatározott geoid szintvonalas térképének, illetve a geoid perspektív ábrájának kirajzolásához szükséges.

Amennyiben a CSILLASZ program által előállított geoidképet ábrázolni is szeretnénk, ez vagy a TOPO szintvonal szerkesztő, vagy a SURF felületgeneráló programok felhasználásával lehetséges. (A TOPO és a SURF program - hasonlóan a GRID programhoz - a SURFER programrendszer további két programja, a Golden Software Inc. szoftvercég terméke.) A TOPO és a SURF speciális input adatrendszerét ugyancsak a GRID program állítja elő (ez az 4-1. áb-

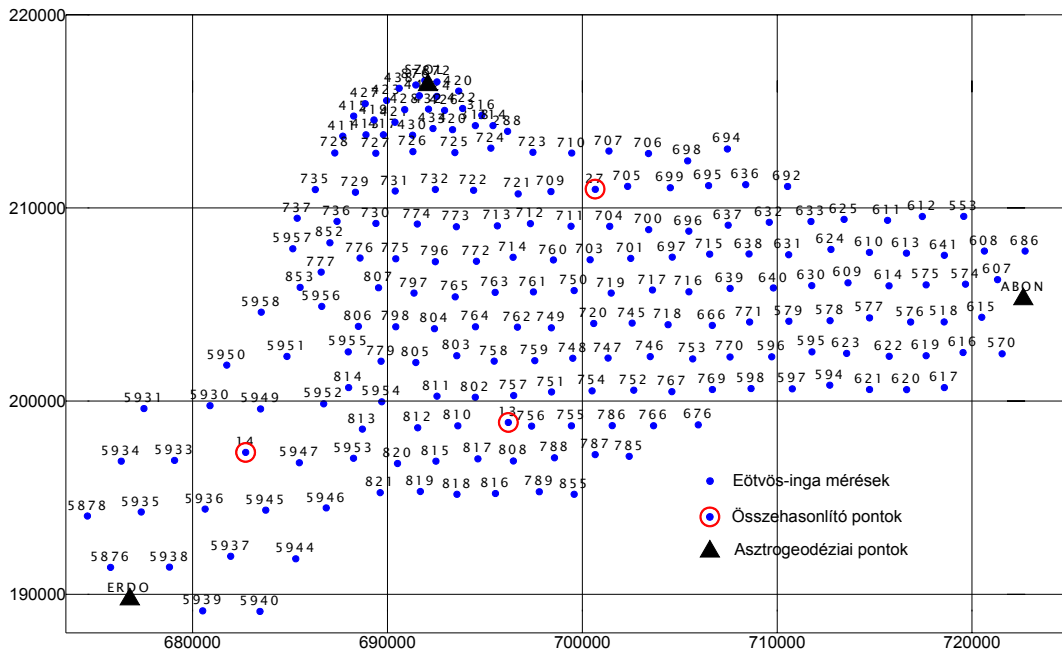
rán a GRID(N) lépés). Végül a TOPO és a SURF által előállított rajz-fájlok a PLOT (Golden Software Inc.) program felhasználásával rajzolhatók meg.

A függővonal-elhajlások számítására elkészített közel hatezer sor terjedelmű szoftver teljes forrásnyelvi leírása a korlátozott terjedelem miatt itt nem lehetséges.

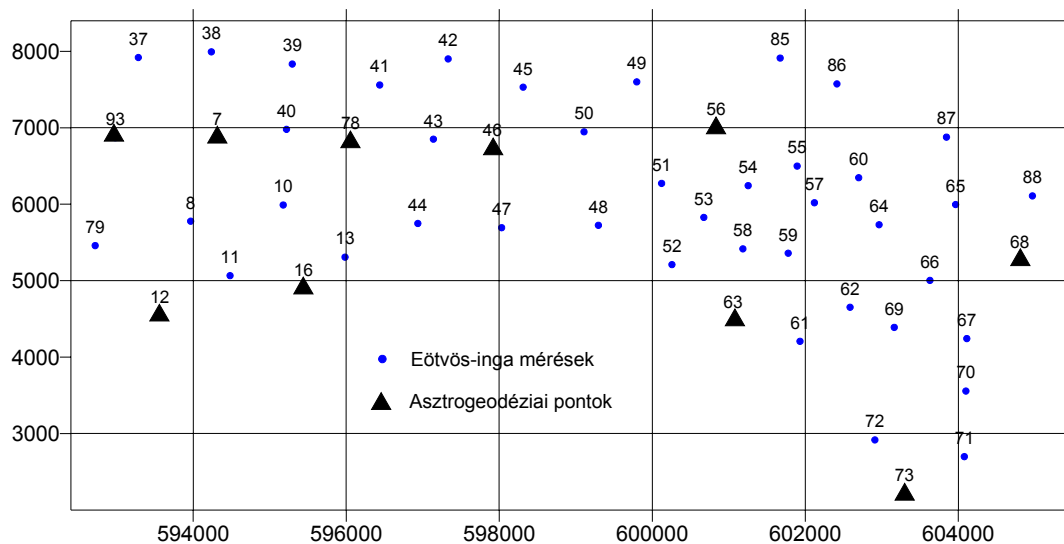
5. A KÍSÉRLETI SZÁMÍTÁSOK ADATAI

A kísérleti számítások céljára az 5-1. ábrán bemutatott Cegléd környéki, mintegy 1200 km^2 kiterjedésű, Eötvös-ingával részletesen felmért területet választottam. Emellett a későbbiekben részletezett okok miatt még az 5-2. ábrán látható németországi Harz-hegység északi szélén található hegyvidéki területen is végeztem teszt számításokat.

Az 5-1. ábrán látható Cegléd környéki teszt területen az asztrogeodéziai pontok egymástól mért távolsága és közöttük az Eötvös-inga állomások sűrűsége megfelel az átlagos magyarországi síkvidéki viszonyoknak; azonban az ábra felső részén, Pilis és Albertirsa közelében szembeűnő, hogy az Eötvös-inga mérési állomásokat az átlagos alföldi gyakorlattól eltérően nagyobb pontsűrűséggel telepítették. Ez a Gödöllői-dombság déli nyúlványa területére esik, ahol a viszonylag tagoltabb topográfia miatt az Eötvös-ingával mérhető gradiensek változása nagyobb mértékű.



5-1. ábra. A Cegléd környéki teszt terület



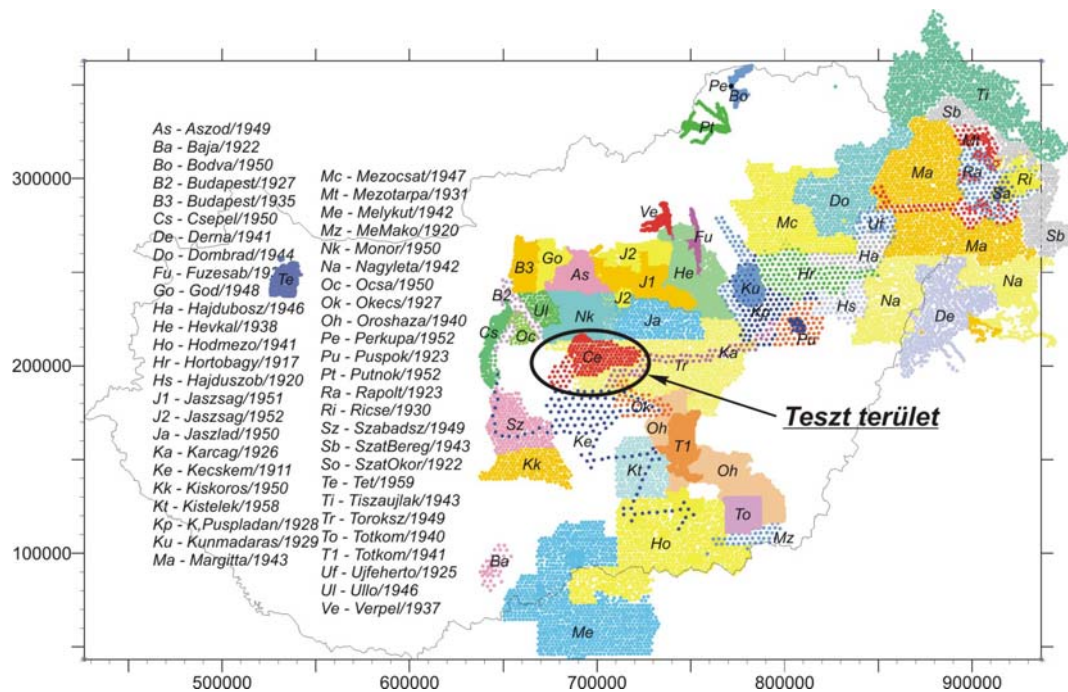
5-2. ábra. A németországi teszt terület

Az 5-2. ábrán a németországi Harz-hegység szélén található területen *J.Brennecke* és *U.Heineke* végzett Eötvös-inga méréseket (*Brennecke* és *Heineke*, 1975), majd ezek alapján kísérleti függővonal-elhajlás interpolációs számításokat (*Heineke*, 1978). A kísérleti számítások során azonban a terület által kínált olyan vizsgálati lehetőségek maradtak kihasználatlanul, amelyeket utólag célszerű volt pótolni. Amint az 5-2. ábrán látható, ezen a területen az átlagos magyarországi viszonyokhoz képest szokatlanul sok asztrogeodéziai pont áll rendelkezésre, ezért itt olyan vizsgálatok elvégzésére nyílt lehetőség, amelyekre a hazai viszonyok között csak igen nagy anyagi áldozatok árán lehetett volna sort keríteni.

5. 1 Eötvös-inga mérések

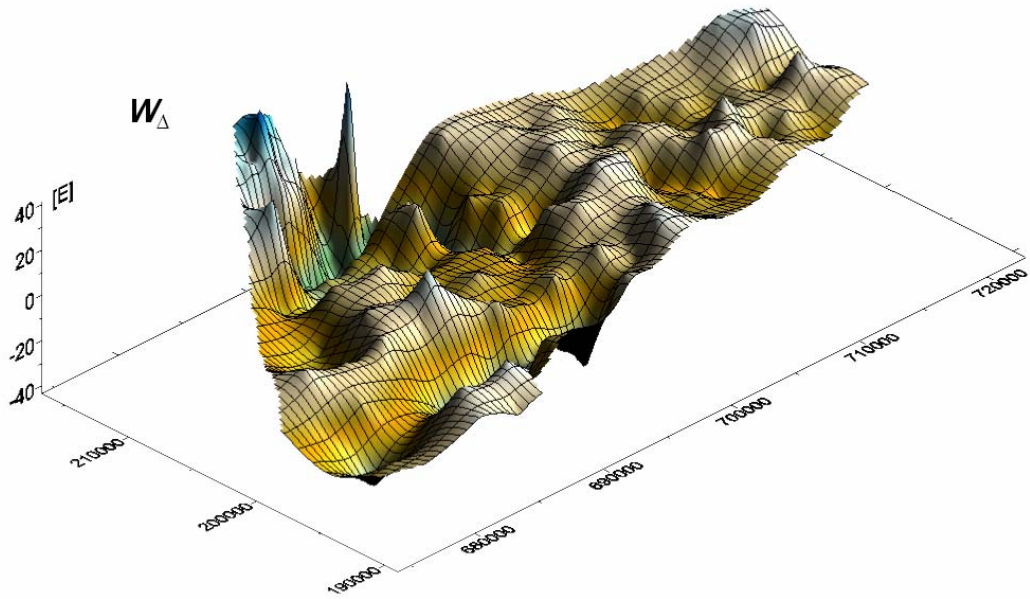
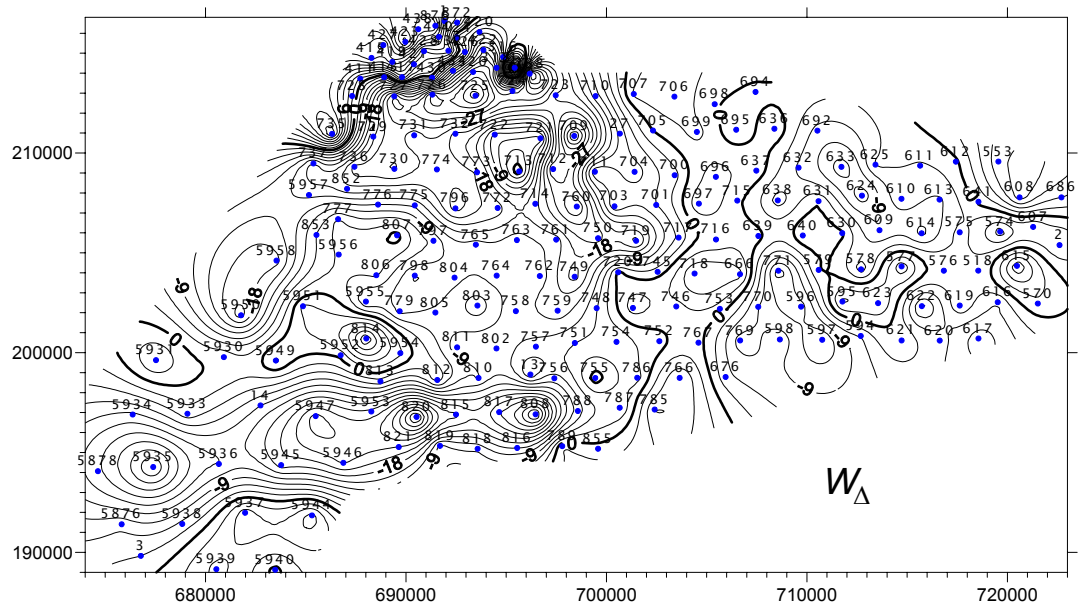
Magyarországon az 1967-ig terjedő időszakban a Magyar-Amerikai Olajipari Rt. (MAORT), az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI) valamint az Országos Kőolaj és Gázipari Tröszt (OKGT) összesen mintegy 60000 ingamérést végzett a sík- és az enyhén dombvidéki területeken (VÖLGYESI-TÓTH 2001, 2002, 2003). Ennyi méréssel a Kárpát-medence a Föld legjobban felmért területe. Mivel a méréseket elsősorban ásványi nyersanyagok kutatása céljából vé-

gezték, ezért nagy általánosságban csak a W_{zx} és W_{zy} horizontális gradiensek kerültek feldolgozásra, a geodézia szempontjából fontosabb W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek feldolgozatlanul maradtak. Sajnos ma már a mérési adatok egy része elveszett, viszont a jelentősebb részük a korábbi mérési jegyzőkönyvek alapján hozzáférhető. Jelenleg komoly erőfeszítések folynak a még meglévő adatok megmentésére, az egykori - esetenként alig olvasható - mérési jegyzőkönyvek adatait az ELGI munkatársai számítógépes adatbázisba rendezik. 2003 januárig 20132 Eötvös-inga mérési pont adatait sikerült számítógépen rögzíteni. Az eddig rögzített pontok területi eloszlása az 5-3. ábrán látható.

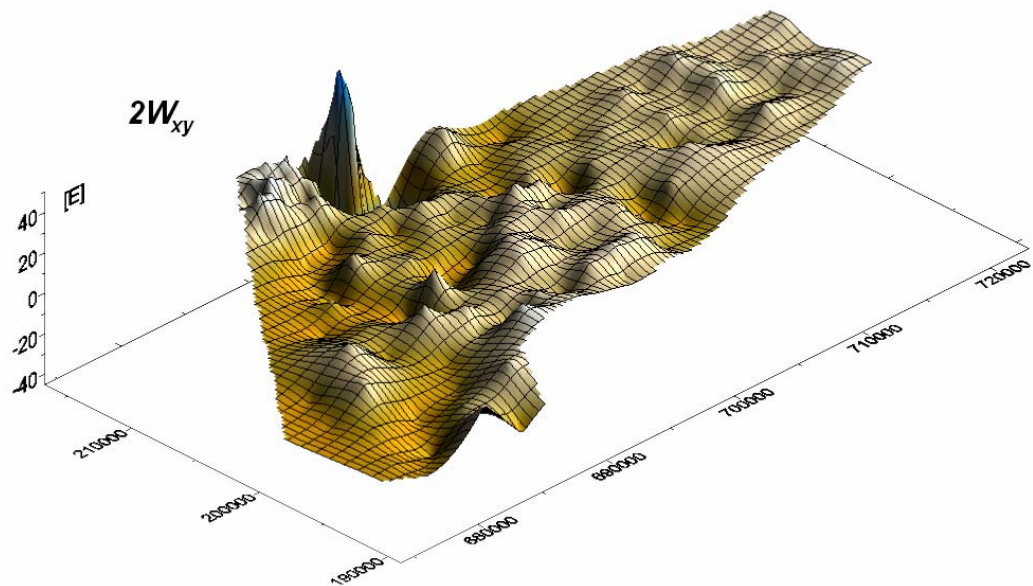
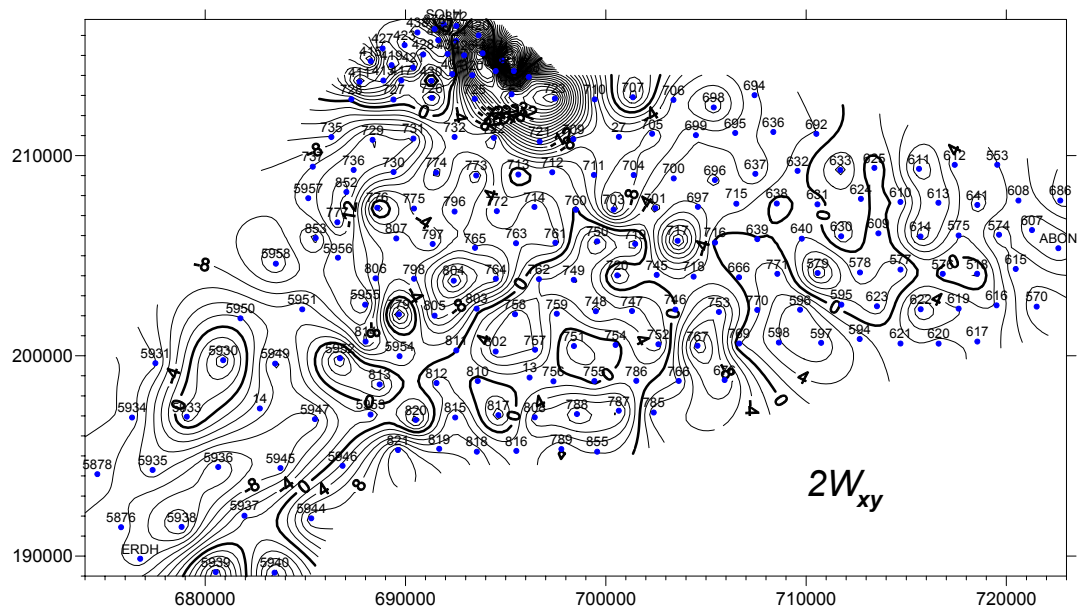


5-3. ábra. Számítógépes adatbázisban szereplő Eötvös-inga mérési pontok területi eloszlása 2003 januárjában.

A számítógépes adatbázisban az egyes pontokra vonatkozóan az alábbi adatok szerepelnek: a mérési állomás száma, a mérési év, az állomás φ és λ földrajzi koordinátája, a W_{zx} , W_{zy} , $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$, $2W_{xy}$ gradiensek, valamint ezen gradiensekhez tartozó topografikus hatások.



5-4. ábra. A W_{Δ} görbületi gradiensek területi eloszlása



5-5. ábra. A $2W_{xy}$ görbületi gradiensek területi eloszlása

A Cegléd környéki területen végzett Eötvös-inga mérési pontok telepítését az 5-1. ábrán láthatjuk. Az állomásokat nem egyforma pontsűrűséggel telepítették, - amint már említettük - az észlelések a tagoltabb topográfiájú, "zavartabb" területeken nagyobb pontsűrűséggel történtek.

Az 1. részben tárgyaltak alapján a függővonal-elhajlások kiértékeléséhez az ingamérések W_{Δ} és W_{xy} "nyers" görbületi értékei helyett a görbületi gradiensek

$$\Delta W_{\Delta} = W_{\Delta} - U_{\Delta} \quad (67)$$

$$\Delta W_{xy} = W_{xy} - U_{xy} \quad (68)$$

ún. anomália értékeit kell felhasználnunk, ahol az U_{Δ} és az U_{xy} a görbületi gradiensek (29a) és (29b) szerint számítható normális értékei.

A kísérleti számítások területén az ingamérések adataiból minden állomásra meghatároztuk a görbületi mennyiségek (67) és (68) által értelmezett ∇W_{Δ} és ∇W_{xy} anomália értékeit, amelyekből megszerkesztettük az 5-4. és az 5-5. ábrán látható izovonalas és felületmodell térképeket. Az izovonalakon feltüntetett számértékek $10^{-9} s^{-2}$, azaz 1E (1 Eötvös) egységben értendők.

Az ingamérések adataira a (BIRÓ - FÖLDVÁRÍNÉ - HAZAY - HOMORÓDI, 1956), valamint (BADEKAS, 1967) részletes vizsgálatai alapján – az eddigi jelöléseket alkalmazva – az alábbi pontossági mérőszámok jellemzők:

$$\mu_{W_{\Delta}}^2 \approx 1.7$$

$$\mu_{W_{xy}}^2 \approx 1.5$$

$$C_{W_{\Delta}, W_{xy}} = 0$$

vagyis a W_{Δ} mennyiségek középhibája: $\pm 1.3 E$, a W_{xy} mennyiségek középhibája: $\pm 1.2 E$ és a két mennyiség közötti korrelációs együttható zérusnak tekinthető.

5.2 Az Eötvös-inga mérések javítása

Az Eötvös-ingával mért nyers görbületi gradiens értékek mindenféle hatást magukban foglalnak. A további feldolgozás végett - attól függően, hogy milyen célra akarjuk az ingaméréseket felhasználni - különféle hatásokat kell figyelembe venni, és a W_{Δ} valamint a W_{xy} görbületi értékeket az ezeknek megfelelő javításokkal lehet ellátni.

Az ingamérések eredményeire elsősorban a környezet domborzata és sűrűség inhomogenitásai vannak jelentős hatással. A környezet hatását két, vagy három lépésben szokás számítani (*HEISKANEN - WENING MEINESZ, 1958*), (*BADEKAS - MUELLER, 1967, 1968*), (*HEINEKE, 1978*). A számítási határokból a megállapodás nem egységes, – mi az alábbi felosztás szerint tárgyaljuk a korrekciókat:

1. a mérési pont 100 m -ig terjedő közvetlen környezetének hatása - az ún. *térszínhatás* (δW^S),

2. a 100 m és az 5000 m közötti távolságban lévő tömegek hatása - az ún. *térképi (topografikus) hatás* (δW^t),

3. az 5000 m távolságon túl lévő tömegek hatása - az ún. *kartografikus hatás* (δW^k).

A térszínhatás meghatározásához szükség van a közvetlen környezet szintezéssel meghatározott magassági adataira. Az Eötvös-inga mérési pont körül általában két-három méter átmérőjű körben a talajt elegyengetik, és a

szintezést szimmetrikusan 8 irányban, a mérési ponttól 1,5, 2, 3, 5, 10, 20, 30, 40, 50 m távolságban szokás elvégezni. 50 m-en túl a szintezésre csak nagyobb terepi egyenetlenségek esetén kerül sor, maximálisan 100 m távolságig. A szintezések eredményeiből rendszerint diagramm, vagy táblázatok segítségével állapítják meg a térszínhatást.

A térszínhatás pontosságát alapvetően három tényező befolyásolja:

- a mért magasságkülönbségek megbízhatósága,
- a számításokban használt közelítő sűrűségérték hibája,
- a valóságos és a közelítésként használt modell - földfelszín eltérése egymástól.

Mindhárom hibaforrást figyelembe véve (BADEKAS - MUELLER, 1967) vizsgálatai szerint a térszínhatás középpontja mindkét görbületi gradiensre:

$$\mu_{\delta W_{\Delta}^s} \approx \mu_{\delta W_{xy}^s} \approx \pm 3E$$

A topografikus hatás számításához a szükséges magassági adatokat topográfiai térképekről olvashatjuk le. A magassági adatok ismeretében ugyanazzal a módszerrel számítjuk a korrekciókat, mint a térszínhatás esetében. Ugyancsak (BADEKAS - MUELLER, 1967) vizsgálatai szerint a topografikus javítások középpontja:

$$\mu_{\delta W_{\Delta}^t} \approx \mu_{\delta W_{xy}^t} \approx \pm 2E .$$

A kartografikus hatás számításához a szükséges magassági adatokat ugyancsak térképekről olvashatjuk le. A magassági adatok ismeretében ugyanazzal a módszerrel számítjuk a korrekciókat, mint a térszínhatás, vagy a topografikus hatás esetében. Ugyancsak (BADEKAS - MUELLER, 1967) vizsgálatai szerint a kartografikus javítások középpontja:

$$\mu_{\delta W_{\Delta}^c} \approx \mu_{\delta W_{xy}^c} \approx \pm 1E .$$

A Cegléd-környéki kísérleti területen minden mérési pontra rendelkezésünkre álltak a

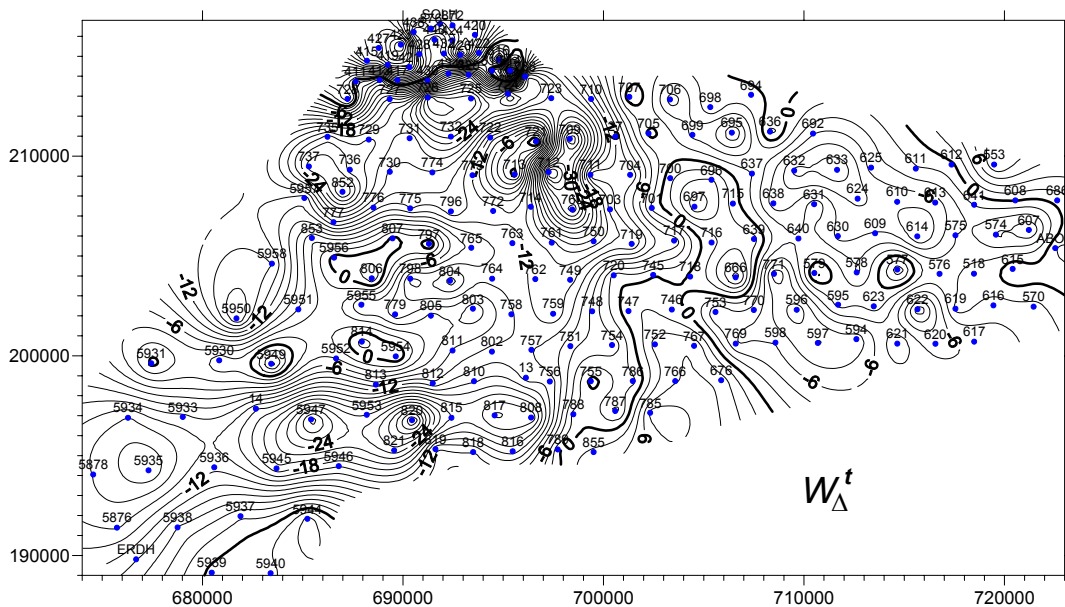
$$\Delta W_{\Delta}^t = W_{\Delta} - U_{\Delta} - \delta W_{\Delta}^s - \delta W_{\Delta}^t \quad (69)$$

és a

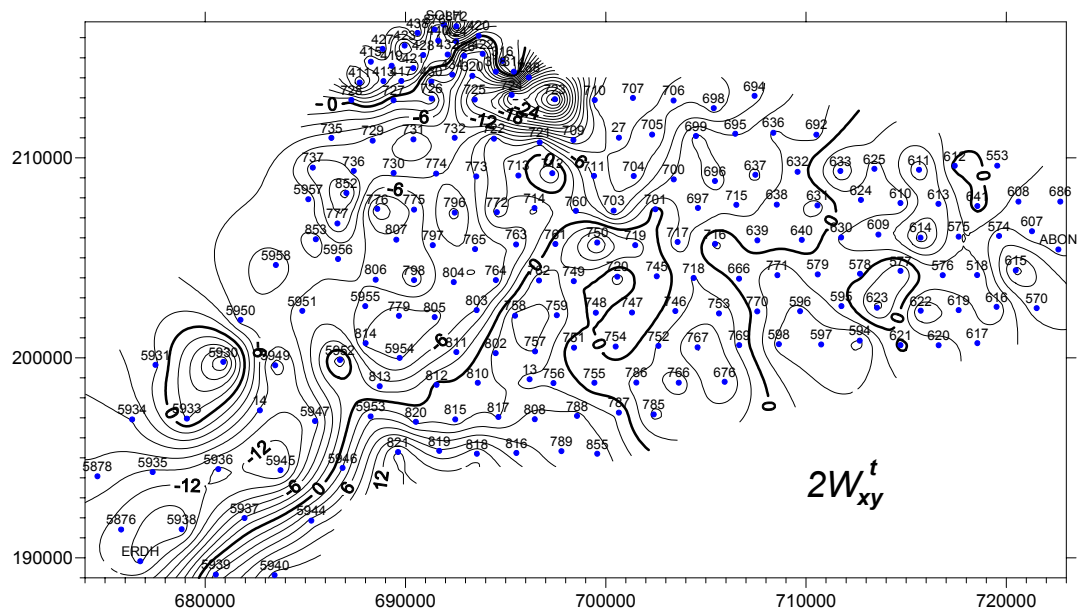
$$\Delta W_{xy}^t = W_{xy} - U_{xy} - \delta W_{xy}^s - \delta W_{xy}^t \quad (70)$$

mennyiségek is, amelyekből megszerkesztettük az 5-6. és az 5-7. ábrán látható izovonalas térképeket. Az izovonalakon feltüntetett számértékeket *Eötvös* egységben kell érteni. A Cegléd környéki területen a kartografikus hatás számításának az elhanyagolhatóan kicsiny javítások miatt nem volt értelme.

Mivel a Cegléd környéki kísérleti terület sík vidék, ezért gyakorlatilag a (69) és a (70) értékek - *Eötvös* elnevezését használva - a felszín alatti rendellenességeknek tekinthetők.



5-6. ábra. A topografikus javítással ellátott W_{Δ}^t görbületi gradiensek területi eloszlása



5-7. ábra. A topografikus javítással ellátott $2W_{xy}^t$ görbületi gradiensek területi eloszlása

A továbbiakban a ΔW_{Δ}^t és a ΔW_{xy}^t mennyiségeket egyszerűen *korrekcióval ellátott*, a ΔW_{Δ} és a ΔW_{xy} mennyiségeket pedig *korrekció nélküli görbületi mennyiségeknek* nevezzük.

Alkalmazva itt is a hibaterjedés (64) szerinti törvényét, a korrekcióval ellátott görbületi gradiensek középhibáira a:

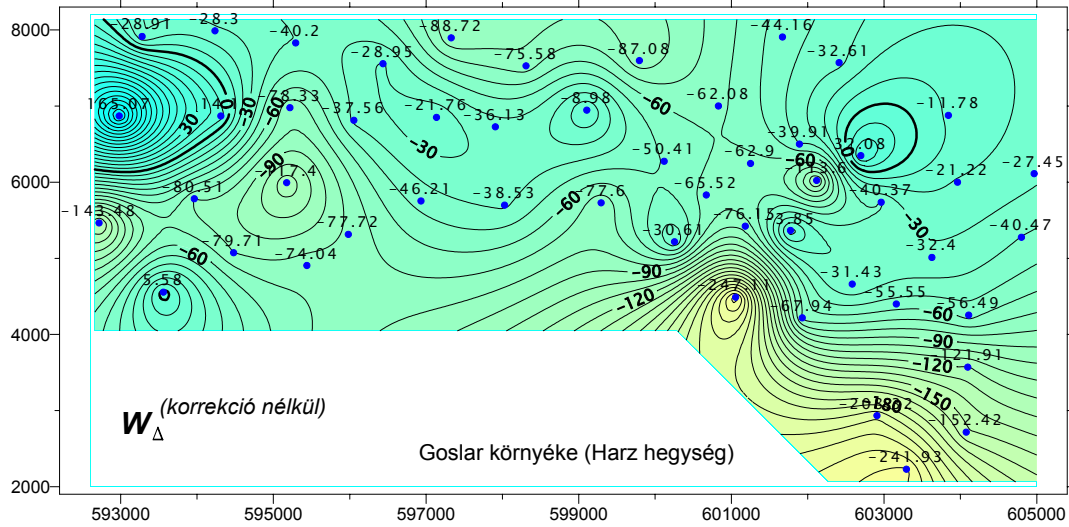
$$\mu_{\Delta W_{\Delta}^t} \approx \pm 4.3E$$

$$\mu_{\Delta W_{xy}^t} \approx \pm 4.2E$$

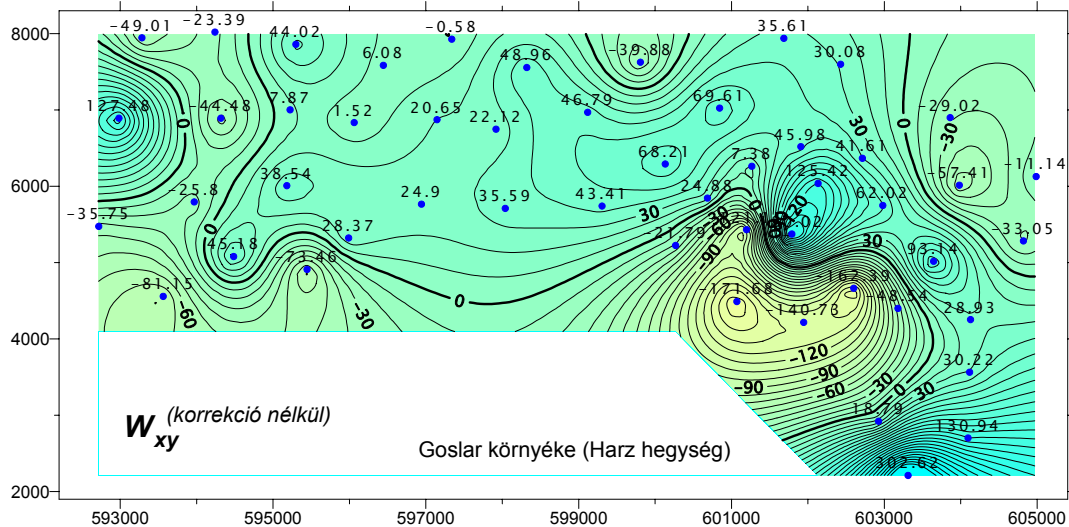
érték adódik.

Összehasonlítva a magyarországi Cegléd környéki teszt területünkön az 5-4. ábrán látható φW_{φ} és az 5-6. ábrán látható φW_{φ}^t , valamint az 5-5. ábrán bemutatott ΔW_{xy} és az 5-7. ábrán látható ΔW_{xy}^t izovonalas térképeket, láthatjuk, hogy a közel síkvidéki viszonyoknak megfelelő viszonylag kismértékű

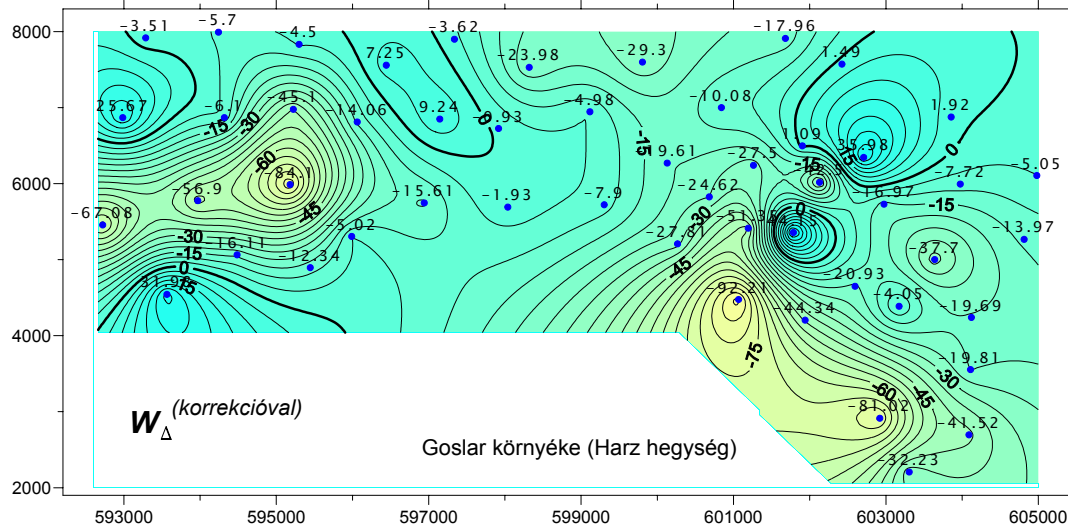
korrekciók nem befolyásolják döntő mértékben a ΔW_{Δ} és a ΔW_{xy} gradiensek eloszlását csupán kissé egyszerűsítik a képet. Jelentősebb változások csupán Pilis környékén láthatók, ahol a Gödöllői-dombvidék déli nyúlványa területén és ennek közvetlen közelében a tagoltabb topográfiának megfelelően nagyobbak a korrekciók.



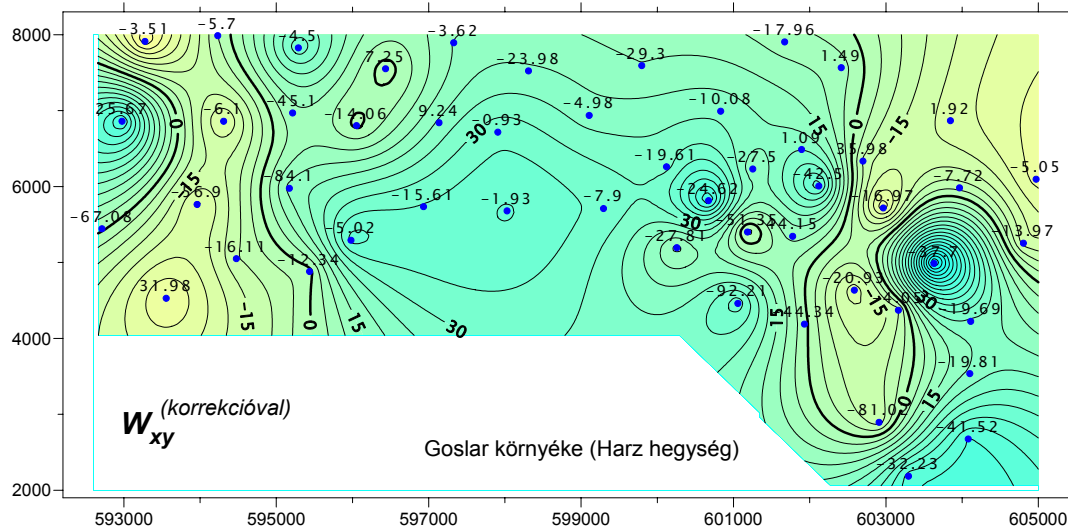
5-8. ábra. A W_{Δ} görbületi gradiensek területi eloszlása



5-9. ábra. A W_{xy} görbületi gradiensek területi eloszlása



5-10. ábra. A topografikus javítással ellátott W_{Δ}^t görbületi gradiensek területi eloszlása



5-11. ábra. A topografikus javítással ellátott W_{xy}^t görbületi gradiensek területi eloszlása

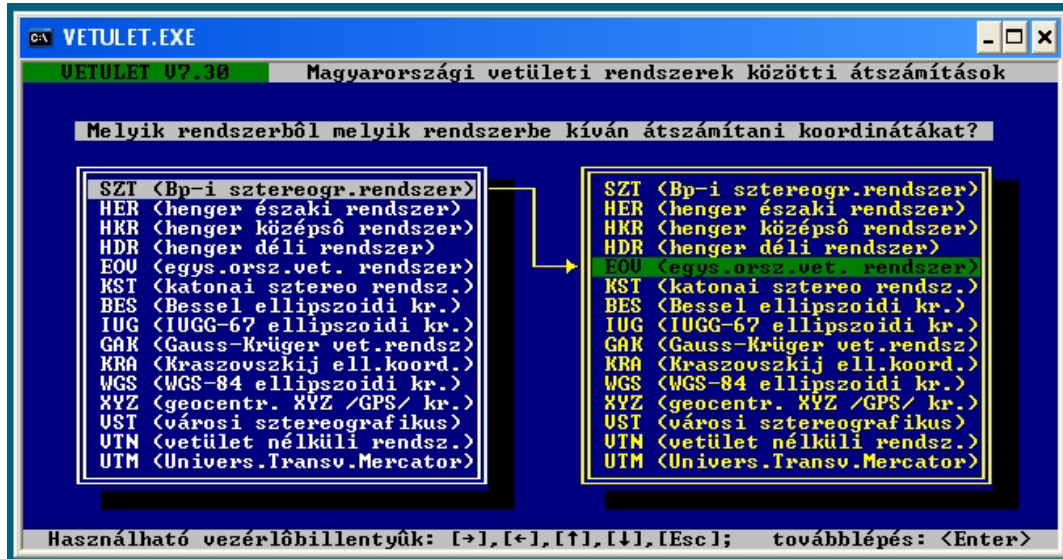
Ebben a vonatkozásban érdekes megtekinteni a németországi Harz hegység vidékén, a Goslar melletti tesz területen rendelkezésünkre álló korrekció nélküli és a korrekcióval ellátott W_{Δ} és W_{xy} adatokat. Ezen a területen, illetve a terület közvetlen környezetében igen változatos a topográfia, - nem ritka a több száz méter magasságú hegységek előfordulása. Az 5-8. és az 5.9.

ábrán a W_{Δ} és a W_{xy} korrekció nélküli -, az 5-10. és az 5-11. ábrán pedig a W_{Δ}^t és a W_{xy}^t korrekciókkal ellátott görbületi gradiensek izovonalas térképei láthatók. Itt a korrekciókat az Eötvös-inga mérési pontok 60 km-es környezetében vették figyelembe (HEINEKE, 1978). Összehasonlítva az 5-8. ábrán látható W_{Δ} és az 5-10. ábrán látható W_{Δ}^t valamint az 5-9. ábrán bemutatott W_{xy} és az 5-11. ábrán látható W_{xy}^t izovonalas térképeket, láthatjuk, hogy a hegyvidéki viszonyoknak megfelelő nagyobb mértékű korrekciók alapvetően befolyásolják a W_{Δ} és a W_{xy} gradiensek eloszlását.

5.3 Az interpolációs pontok koordinátái

A magyarországi Eötvös-inga mérési pontok síkkoordinátái elsősorban Budapesti Sztereografikus vagy Gauss-Krüger vetületi rendszerben adóttak, de előfordulnak más vetületi rendszerre vonatkozó koordináták is. Mivel a mai mérnöki gyakorlatban ugyanakkor az EOVS koordináták használata kötelező, ezért felmerült az igénye az alkalmazott rendszerek közötti minél pontosabb transzformáció megvalósításának. Ha bizonyos területen egyidejűleg többfajta geodéziai vetületi rendszert alkalmazunk (Magyarországon 15 különféle rendszerben ismerjük és használjuk a koordinátákat!), rendszeresen felmerül az átszámítás szükségessége. Több éves fejlesztő munkával sikerült a gyakorlatban felmerülő 212 különböző átszámítási kombinációra olyan algoritmust és szoftvert kifejleszteni, amely valamennyi transzformációs problémát a geodézia pontosságai követelményeinek megfelelően oldja meg (VÖLGYESI et al. 1994; VÖLGYESI et al. 1996, VÖLGYESI 1997, VÖLGYESI.-VARGA, 2001). Az eddigi nagy számú próbálkozások ellenére az átszámítási kombinációk magas száma miatt másoknak mind a mai napig nem sikerült ezt a problémát megoldani. Ez a mindennapi gyakorlatban óriási igényt elégít ki, és egyúttal lehetővé teszi az Eötvös-inga mérési pontok koordinátáinak szélső pontosságú transzformációját is. Az 5-12. ábrán a VETULET szoftver menü ablaka látható, melyen áttekinthető

mindazon Magyarországon használatos rendszerek listája, melyek között átszámítás lehetséges.



5-12. ábra. A VETULET szoftver menü ablaka.

Magyarországon az Eötvös-inga mérési állomások koordinátái általában néhány méteres pontossággal állnak rendelkezésre (a németországi kísérleti területen a pontok Gauss-Krüger koordinátáit dm pontossággal ismertük). Ez számunkra tökéletesen megfelel, mivel a függővonal-elhajlás interpolációhoz felhasznált koordinátákban még ± 50 m –es hiba is a függővonal-elhajlás összetevőkben mindössze század szögmásodperc nagyságrendű hibát okoz (BADEKAS - MUELLER, 1967).

Az 1. rész elején említett megfontolásból, kísérleti számításainkban a koordinátarendszer kezdőpontjaként az adott terület belsejében lévő tetszőleges pontot célszerű választani. Erre a helyi rendszerre az

$$x' = (x - x_0) \cos \mu + (y - y_0) \sin \mu$$

$$y' = -(x - x_0) \sin \mu + (y - y_0) \cos \mu$$

koordináta-transzformációval térhetünk át; - ahol μ a meridián-konvergencia értéke az új (helyi) rendszer kezdőpontjában, x_0 és y_0 pedig a helyi rendszer kezdőpontjának koordinátái az eredeti rendszerben.

5.4 Kiinduló és ellenőrző ξ, η értékek

Az 5-1. ábrán bemutatott magyarországi területen hat olyan pont található, ahol ismertek a ξ, η függővonal-elhajlás összetevő értékek. Ezek mindegyike olyan pont, ahol gravitációs adatok alapján rendelkezésre állnak a gravimetriai (jól közelítően abszolút) függővonal-elhajlás összetevők értékei; közülük négy pedig (eredetileg az 1, 2, és a 3, majd később a 27 jelű) asztrogeodéziai pont. Az 1, 2 és a 3 az interpolációs vonalak kezdő illetve végpontjai, a 13, 14 és a 27 pedig az interpolált értékek ellenőrzésére szolgáltak. Megjegyezzük, hogy korábban a 27 számú ponton csupán a gravimetriai függővonal-elhajlás összetevőket ismertük, azonban a kísérleti számításaink idején a Magyar Honvédség Térképészeti Intézete itt csillagászati földrajzi helymeghatározást végzett, és így időközben ez a pont is asztrogeodéziai pont lett. Az asztrogeodéziai pontokban a FÖMI adattára által megadott relatív függővonal-elhajlás értékek önkényes elhelyezésű ellipszoidra vonatkoznak.

Az 1, 2, 3 és a 27 jelű asztrogeodéziai pontokon a relatív függővonal-elhajlások pontossága a földrajzi helymeghatározások középhibájával jellemezhető, ami (BIRÓ - FÖLDVÁRINÉ - HAZAY - HOMORÓDI, 1965) szerint:

$$\mu_{\xi 0} \approx \mu_{\eta 0} \approx \pm 0.2'' .$$

A 13 és a 14 jelű asztrogravimetriai (összehasonlító) pontokban a relatív függővonal-elhajlás értékek pontosságának meghatározása több megfontolást igényel, ugyanis ezekben a pontokban a relatív függővonal-elhajlás értékek he-

lyett a gravimetriai függővonal-elhajlás értékek állnak közvetlenül rendelkezésre. Ahhoz, hogy ezekben a pontokban is kiszámíthassuk a relatív függővonal-elhajlásokat, legalább három környezeti pontban ismernünk kell mind a relatív, mind az abszolút függővonal-elhajlásokat, hogy meghatározhassuk a szóban forgó területen az abszolút és a relatív elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoid egymáshoz viszonyított helyzetét. Ennek birtokában tudjuk a kérdéses pontokban a gravimetriai függővonal-elhajlások ismerete alapján a megfelelő relatív (asztrogravimetriai) értékeket meghatározni.

Esetünkben az 1, 2, 3 és a 27 jelű asztrogeodéziai pontokban ismertük mind a relatív mind a gravimetriai függővonal-elhajlás értékeket, és ezek felhasználásával határoztuk meg a 13 és a 14 pontban a gravimetriai értékekből a relatív függővonal-elhajlás összetevőket. A 13 és a 14 pontokon így meghatározott (transzformált) relatív értékek pontossága elsősorban a gravimetriai függővonal-elhajlások pontosságától függ, amely (BÍRÓ - FÖLDVÁRINÉ - HAZAY - HOMORÓDI, 1965) szerint:

$$\mu_{\xi gr} \approx \mu_{\eta gr} \approx \pm 0.5'' .$$

Mivel a felsorolt pontokban ismert függővonal-elhajlás értékek a felszíni domborzat tömeghatását is magukban foglalják; és mivel a kísérleti számításaink egyik részében az Eötvös-ingával mért W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek topografikus korrekcióval ellátott értékeivel is végeztünk interpolációs számításokat, ezért szükséges volt az ismert függővonal-elhajlás összetevőket is a megfelelő topografikus korrekcióval ellátni. Ezt a korrekciót, amelyet a kérdéses pontok legközelebbi környezetét magában foglaló felszíni tagoltság figyelembe vételével határoztunk meg, (RENNER, 1952) módszerével végeztük.

Az 5-2. ábrán bemutatott németországi Harz hegység területén összesen tíz asztrogeodéziai pont található, ebből számunkra a 7, 16, 56, 68, 78 és a 93 számú pont relatív függővonal-elhajlás értékei álltak rendelkezésre. Magyarországon jelenleg Eötvös-ingával felmért területen ilyen pontsűrűségben asztrogeodéziai pontok nem találhatók.

6. VIZSGÁLATI EREDMÉNYEK, KÖVETKEZTETÉSEK

A kísérleti számítások során az első fontos feladat az interpoláció megoldási módszereinek tesztelése, illetve ezek összehasonlítása. A vizsgálat eredményeképpen kiválasztható a legalkalmasabb megoldási módszer. Ezt követően először a súlyozás kérdésével foglalkozunk, majd arra próbálunk fényt deríteni, hogy az interpolációs hálózatok geometriai felépítése mennyiben befolyásolja az interpoláció pontosságát, azaz milyen a hálózatok optimális geometriai elrendezése. Végül az interpoláció eddig legkevésbé tisztázott problémájával, a korrekciók kérdésével foglalkozunk.

6.1 A különböző megoldási módszerek összehasonlítása

A 2. részben leírtaknak megfelelően az interpoláció gyakorlati megoldásai két fő csoportba sorolhatók: az "A" esetben a függővonal-elhajlás összetevők két pont közötti $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ különbségét választjuk ismeretleneknek, a "B" esetben pedig maguk a pontbeli ξ , η függővonal-elhajlás összetevők a meghatározandó ismeretlenek.

Az "A" csoportba tartozó megoldások esetén (vagyis ha az egyes pontok közötti $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ különbségek az ismeretlenek) az interpoláció számítására három lehetőség kínálkozik:

A1: invertáljuk a (26), (34), (35), (36) és a (37) típusú egyenletek felhasználásával előállított $4n-6$ egyenlet együtthatóiból alkotott teljes együtthatómátrixot, azaz kiszámítjuk a $4n-6$ ismeretlen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ értéket,

A2: a $4n-6$ ismeretlen helyett csak a feltétlenül szükséges $2n-2$ ismeretlen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ értékkel foglalkozunk, és az ennek megfelelő kisebb méretű együtthatómátrixot invertáljuk,

A3: a $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ismeretleneket lépésenként (fokozatos kiküszöböléssel) határozzuk meg.

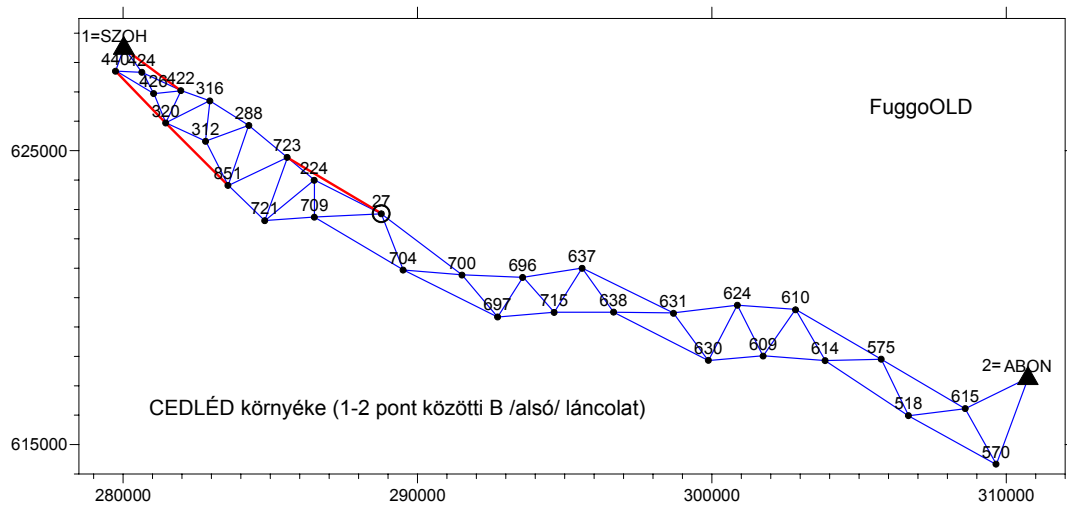
Nagyobb méretű kiegyenlítési feladatok megoldásakor - a számítások során mindenképpen fellépő kerekítési hibák halmozódása miatt - minden esetben olyan lehetőséget célszerű keresnünk, amely a minimális ismeretlenszámú egyenletrendszer megoldásához vezet. Ha nem akarunk fölösleges munkát végezni a szükségtelen ismeretlenek meghatározásával, és nem akarjuk kockáztatni a kerekítési hibák halmozódása miatt a megoldás pontosságát, akkor az A1 esettel a továbbiakban nem érdemes foglalkozni, hiszen az A2 esetben is végeredményben ugyanazokat a ξ , η függővonal-elhajlásokat határozzuk meg, csak lényegesen kevesebb $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ismeretlen érték képzésén és kiszámításán keresztül.

Az A1 csoportba tartozik a Renner által kidolgozott, és a 2.5 fejezetben tárgyalt interpolációs eljárás is (RENNER 1952, 1956, 1957), amely eredeti formájában a hálózati pontok közötti $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ különbségeket választotta ismeretlenként, és szintén megkívánta a teljes együttthatómátrix invertálását. A fentiek miatt ezzel a megoldási eljárással itt nem foglalkozunk. Kísérleti számításokat ugyan végeztem a Renner-féle eljárás átdolgozott formájával, – amelyben nem a $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ különbségek az ismeretlenek, hanem közvetlenül az interpolációs pontok ξ , η értékei, – ezekkel az eredményekkel azonban csak a későbbiekben, a hálózatok célszerű geometriai alakjával foglalkozó fejezetben tárgyaljuk.

Az A2 és az A3 eset megoldására külön szoftvert készítettem. Mindkét program két asztrogeodéziai pontot összekötő interpolációs láncolat pontjai között csak a feltétlenül szükséges $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ értékeket tekinti ismeretleneknek, amelyeket az FGVSUORT program mátrix-ortogonalizációs eljárással, a FUGGOSUC nevű program pedig fokozatos kiküszöböléssel határoz meg.

A B eset megoldására három különböző szoftvert készítettem; ezek a FUGGOVON, a FUGGOOLD és a FUGGOORT. Mindhárom program tetszőleges alakú interpolációs hálózatok számítására alkalmas úgy, hogy tetszőleges

számú és területi eloszlásban rögzített ξ , η érték figyelembevételével határozza meg a hálózat pontjaiban a függővonal-elhajlás összetevők közvetlen értékeit. A FUGGOVON és a FUGGOOLD a hagyományos kiegyenlítési eljárás alkalmazásával állítja elő az ismeretleneket, míg a FUGGOORT a numerikus-ara stabilabb mátrix-ortogonalizációs eljárással számol. A FUGGOOLD program a FUGGOVON praktikusabb változata, mely – a FUGGOVON programmal ellentétben – az interpolációs hálózatok oldalait automatikusan állítja elő.



6-1. ábra. Automatikusan kialakított interpolációs láncolat .

Az interpoláció gyakorlati megoldási módszereinek tesztelése, illetve ezek összehasonlítása céljából valamennyi fenti interpolációs programmal több próbaszámítást is készítettem. Ezek közül a Cegléd környéki terület 1 (SZOH = Szőlőhegy) és 2 (ABON = Abony) jelű asztrogeodéziai pontjait összekötő 6-1. ábrán látható interpolációs láncolatra vonatkozó számítások eredményeit tekintjük át részletesebben. A 6-1. ábrán látható "CEGLÉD 1-2/B" láncolatra a különböző interpolációs programok által szolgáltatott eredményeket táblázatos formában tudjuk összehasonlítani. Az 6-1. táblázatban a FUGGOSUC, az FGVSUORT, a FUGGOVON, a FUGGOOLD, és a FUGGOORT programok eredményei találhatóak. Láthatjuk, hogy a FUGGOVON és a FUGGOORT azonos eredményeket szolgáltatott, és az FGVSUORT által számított értékek is

csak század szögmásodpercben térnek el ezektől. A 27 jelű ellenőrző pontban a FUGGOVON és a FUGGOORT által interpolált értékek állnak legközelebb az ismert ξ , η értékhez (az eltérés a ξ esetében mindössze: $-0.22''$, az η esetében pedig: $+0.16''$), de az FGVSUORT esetében sem sokkal rosszabb a helyzet (itt az eltérés: $-0.23''$ és $+0.17''$). A 6-1. ábrán bemutatott interpolációs láncolat jó példa arra, hogy mely esetben nem szabad alkalmazni a FUGGOOLD programot. Látható, hogy a hálózat pontjai a 2 jelű végpont közelében lényegesen távolabb helyezkednek el egymástól, mint a másik végpont környékén. Ezért ha a hálózati oldalak automatikus előállításához akkora távolságkorlátot adunk meg, hogy ne maradjon ki egyetlen pont sem az egymástól nagyobb távolságra lévő pontok területén, akkor ezzel a távolságértékkel az egymáshoz közelebb eső pontok környezetében a program olyan nagyobb hosszúságú felesleges hálózati oldalakat is előállít, amelyek mentén a $\Delta\xi$ és a $\Delta\eta$ értékek megváltozása már nem lesz lineáris. Ilyen hálózati oldalakat láthatunk a 6-1. ábrán az 1 jelű asztrogeodéziai pont közelében, amelyeket piros vonalak jelölnek. Ezért - a várakozásnak megfelelően - a FUGGOOLD által interpolált értékek a 27 jelű ellenőrző pontban jobban eltérnek az ismert értékektől (az eltérés: $-0.27''$ és $+0.89''$).

Az eddigi számítási eredményektől, és a 27 jelű pontban ismert függővonal-elhajlás összetevőktől legmarkánsabban a FUGGOSUC program által interpolált értékek térnek el. A 27 jelű pontban a ξ eltérése: $-1.06''$, az η eltérése pedig: $+1.42''$.

Az eredményeket a 6-2. ábrán hasonlíthatjuk össze, ahol a folytonos piros vonal a fokozatos kiküszöböléssel meghatározott értékeket köti össze, a szaggatott kék vonal pedig a FUGGOORT és FUGGOVON (illetve az ábrázolási pontosságán belül ezekkel megegyező értékeket szolgáltató FGVSUORT) programmal interpolált értékeket jelöli. Látható, hogy a fokozatos kiküszöböléssel számított függővonal-elhajlás értékek a hálózat minden pontjában alapvetően eltérnek a többi módszer által szolgáltatott értékektől. A 6-2. ábrán a fokozatos kiküszöböléssel végzett számítások során a (65) és a (66) összefüggések

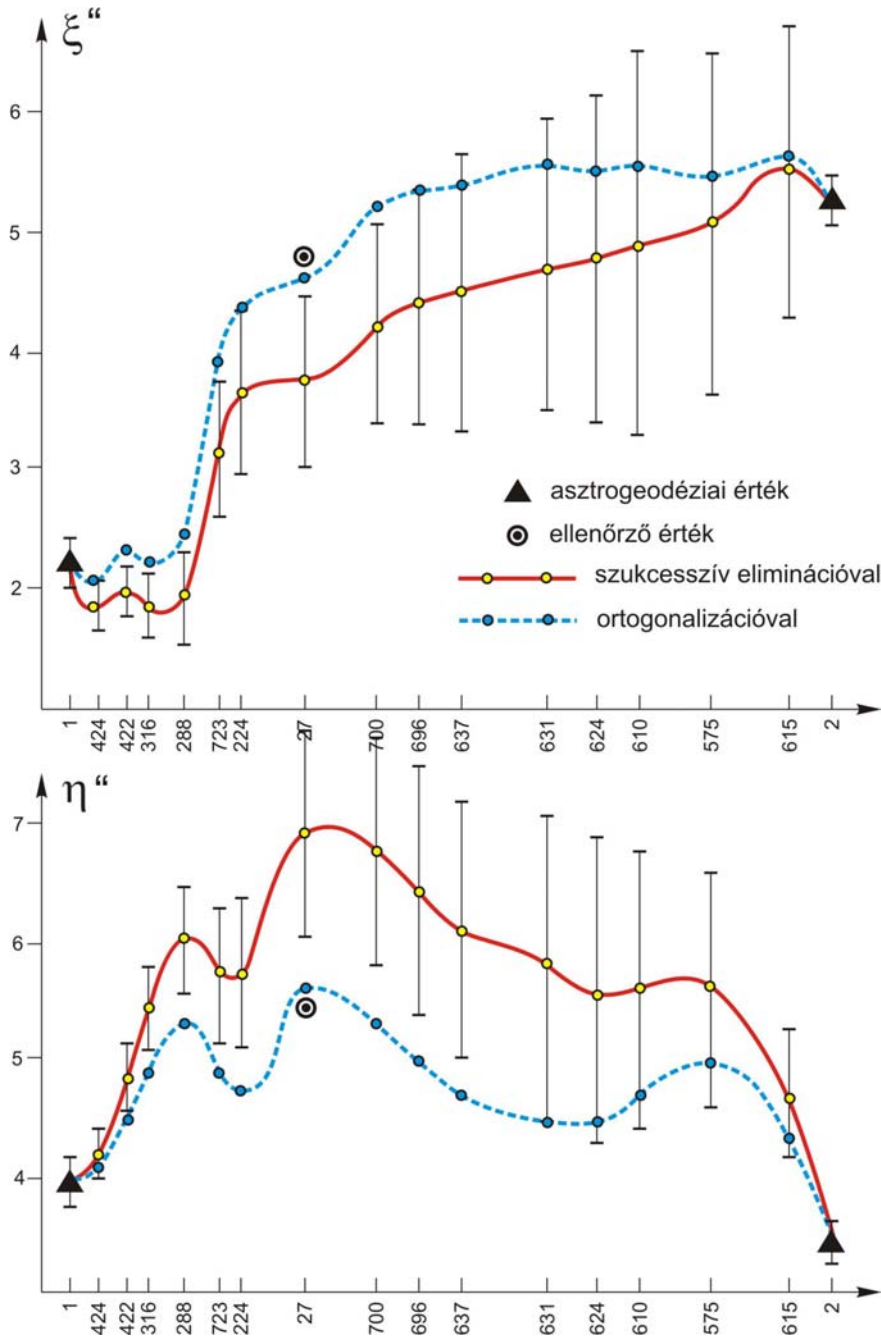
alapján az egyes hálózati pontokban meghatározott függővonal-elhajlás össze-
tevők középhibái is láthatók. Ezek értelmezésére a későbbiekben térünk vissza.

6-1. táblázat. A különböző számítási módszerek eredményeinek összehasonlítása.

pont szám	FUGGOSUC		FGVSUORT		FUGGOVON		FUGGOOLD		FUGGOORT	
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
SZOH	2.20	4.00	2.20	4.00	2.20	4.00	2.20	4.00	2.20	4.00
440	1.85	3.98	2.04	4.04	2.05	4.04	1.76	3.98	2.05	4.04
424	1.80	4.19	2.01	4.04	2.01	4.04	1.67	4.24	2.01	4.04
426	1.56	4.29	1.91	4.05	1.92	4.05	1.47	4.31	1.92	4.05
422	1.92	4.94	2.26	4.55	2.26	4.55	1.82	4.75	2.26	4.55
320	1.68	4.18	2.18	3.88	2.19	3.88	1.91	4.08	2.19	3.88
316	1.83	5.48	2.22	4.95	2.22	4.95	1.74	4.49	2.22	4.95
312	1.83	5.57	2.41	5.07	2.41	5.06	2.30	4.60	2.41	5.06
288	1.91	6.01	2.41	5.30	2.42	5.29	2.15	4.58	2.42	5.29
851	2.73	5.20	3.49	4.58	3.50	4.58	3.38	3.96	3.50	4.58
723	3.15	5.71	3.78	4.82	3.78	4.81	3.59	4.03	3.78	4.81
721	3.35	4.97	4.24	4.17	4.24	4.16	4.22	3.44	4.24	4.16
224	3.65	5.73	4.36	4.71	4.37	4.70	4.23	3.84	4.37	4.70
709	3.57	5.58	4.41	4.55	4.42	4.55	4.38	3.68	4.42	4.55
27	3.74	6.84	4.57	5.59	4.58	5.58	4.53	5.53	4.58	5.58
704	4.10	6.75	5.06	5.43	5.07	5.42	5.17	4.31	5.07	5.42
700	4.24	6.75	5.23	5.27	5.24	5.26	5.36	4.02	5.24	5.26
697	4.49	6.54	5.46	5.07	5.47	5.06	5.60	3.83	5.47	5.06
696	4.35	6.38	5.31	4.91	5.32	4.90	5.45	3.67	5.32	4.90
715	4.58	6.13	5.50	4.68	5.51	4.67	5.63	3.46	5.51	4.67
637	4.45	6.04	5.37	4.62	5.38	4.61	5.54	3.42	5.38	4.61
638	4.67	5.96	5.51	4.56	5.52	4.55	5.64	3.38	5.52	4.55
631	4.67	5.77	5.51	4.47	5.53	4.47	5.64	3.38	5.53	4.47
630	4.98	5.60	5.63	4.41	5.64	4.40	5.66	3.40	5.64	4.40
624	4.73	5.55	5.49	4.44	5.50	4.44	5.65	3.51	5.50	4.44
609	5.07	5.61	5.61	4.59	5.62	4.58	5.64	3.72	5.62	4.58
610	4.85	5.58	5.50	4.66	5.51	4.66	5.65	3.88	5.51	4.66
614	5.12	5.67	5.53	4.84	5.54	4.84	5.55	4.14	5.54	4.84
575	5.00	5.59	5.41	4.95	5.42	4.95	5.44	4.41	5.42	4.95
518	5.60	5.39	5.70	4.85	5.71	4.85	5.55	4.40	5.71	4.85
615	5.46	4.52	5.59	4.20	5.60	4.20	5.47	3.94	5.60	4.20
570	6.40	4.03	6.16	3.86	6.17	3.87	5.82	3.73	6.17	3.87
ABON	5.20	3.40	5.20	3.40	5.20	3.40	5.20	3.40	5.20	3.40

SZOH és ABON = rögzített pontok;

27 = ellenőrző pont: (= 4.80", = 5.42")



6-2. ábra. A fokozatos kiküszöböléssel kapott eredmények összehasonlítása az egyéb számítások eredményeivel.

Természetesen a különböző interpolációs módszerek tesztelése nem csupán az 1-2/A jelű-, hanem több más láncolat számításán keresztül is meg-

történt. Ezeknek a számításoknak az eredményei láthatók összefoglalva a 6-2. táblázatban.

6-2. táblázat. Különböző számítási módszerek eredményeinek összehasonlítása.

Hálózat jele	Ell. pont	FUGGOSUC " "	FGVSUORT " "	FUGGOVON " "	FUGGOORT " "
1-2/A	27	-0.53 -0.75	-0.54 -0.74	-0.54 -0.74	-0.54 -0.74
1-2/B	27	-1.06 +1.72	-0.23 +0.17	-0.22 +0.16	-0.22 +0.16
2-3/A	13	-0.57 -2.34	-0.62 -2.51	-0.63 -2.54	-0.63 -2.54
2-3/B	13	+1.75 +4.70	+0.71 +0.93	+0.70 +0.89	+0.70 +0.89
2-3/B	14	+2.50 +2.07	+1.31 +0.38	+1.26 +0.27	+1.26 +0.27
3-1/A	14	-0.31 -0.68	-0.10 -0.48	-0.09 -0.58	-0.09 -0.58
3-1/B	14	+0.31 -0.10	+0.65 +0.15	+0.71 +0.26	+0.71 +0.26
<i>Gauss-féle középhiba:</i>		1.27 2.23 1.81	0.70 1.08 0.91	0.69 1.08 0.91	0.69 1.08 0.91

A táblázatban látható, hogy a különböző interpolációs láncolatok ellenőrző pontjaiban mekkora eltérések adódtak a fokozatos kiküszöböléssel (FUGGOSUC), továbbá az FGVSUORT, a FUGGOVON és a FUGGOORT programmal számított, illetve az ugyanott ismert ξ , η értékek között. Ezen eltérések alapján meghatározhatók az egyes interpolációs módszerek pontosságát jellemző középhibák.

A különböző interpolációs módszerek tesztelésére és összehasonlítására vonatkozó vizsgálatoknak az 6-1. és 6-2. táblázatban összefoglalt eredményei alapján megállapíthatjuk, hogy a fokozatos kiküszöböléssel számított függővonal-elhajlás értékek a legtöbb esetben jelentősen eltértek a többi más módszer által szolgáltatott értékektől, és sok esetben alapvetően eltértek az ellenőrző pontokban ismert értékektől is. A 6-2. táblázat adatai alapján a fokozatos kiküszöböléssel számított függővonal-elhajlás értékeket az egyéb módszerekkel interpolált értékekhez képest közel kétszeres nagyságú hiba terheli.

Az FGVSUORT, a FUGGOVON és a FUGGOORT által szolgáltatott értékek pontossága gyakorlatilag azonosnak tekinthető, sajnos azonban az FGVSUORT alkalmazási lehetőségei bizonyos mértékig korlátozottak, mivel – hasonlóan a FUGGOSUC programhoz – ez a program is kizárólag olyan inter-

polációs *láncolatok* esetében használható, melyek kezdő és végpontja asztrogeodéziai pont. Ezen két asztrogeodéziai ponton kívül a láncolat más egyéb kényszerpontot nem tartalmazhat. A két végponton kívül a láncolat belsőjében ismert további függővonal-elhajlás értékek csak ellenőrzésre használhatók.

A 6-2. táblázatban nem láthatók a FUGGOOLD program eredményei, mert a különböző láncolatok esetében a pontok eloszlásának függvényében más-más távolságkorláttal célszerű számolni, és így a közös összehasonlításban nem adódott volna reális, egységes kép. A vizsgálatok szerint a FUGGOOLD program csak az interpolációs pontok homogén eloszlása, és megfelelő kis távolságkorlát esetén biztosítja azt a pontosságot, amit a FUGGOVON és a FUGGOORT program. Ezért – bármennyire kényelmes is – csak homogén ponteloszlás esetén érdemes a FUGGOOLD program alkalmazásával a számítógépre bízni a hálózati oldalak kialakítását.

A kísérleti számítások során nem merült fel olyan feladat, amely megoldása esetén az interpolált értékek pontossága alapján előnyben, vagy hátrányban lehetett volna részesíteni a FUGGOVON és a FUGGOORT program valamelyikét. Ugyanakkor a két program közül a FUGGOORT használata mellett szól az a döntő érv, hogy – ellentétben a FUGGOVON programmal – *tetszőlegesen nagy méretű* interpolációs hálózatok számítására is alkalmas.

Összefoglalva a függővonal-elhajlás interpoláció különböző gyakorlati megoldásaira vonatkozó összehasonlító vizsgálatok eredményeit megállapítható, hogy a fokozatos kiküszöböléssel számított függővonal-elhajlás értékeket közel kétszeres nagyságú hiba terheli, ezért a fokozatos kiküszöböléses módszerének alkalmazása (a FUGGOSUC program használata) nem célszerű. Interpolációs *láncolatok* esetében a vizsgálati területünkön az FGVSUORT, a FUGGOVON és a FUGGOORT gyakorlatilag azonos pontosságú eredményeket szolgáltatott, azonban az FGVSUORT alkalmazási lehetősége abban a tekintetben korlátozott, hogy csak olyan interpolációs *láncolatok* esetében használható, melyek kezdő és végpontja asztrogeodéziai pont. A vizsgálatok során

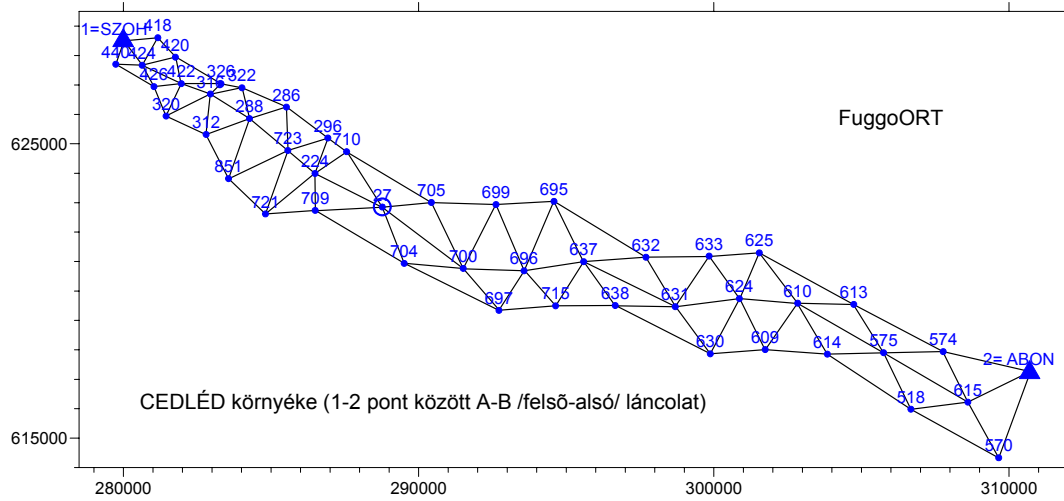
a FUGGOVON és a FUGGOORT a viszonylag kevés pontot tartalmazó láncolatok számításakor minden tekintetben azonos eredményt adott, azonban más vizsgálataim szerint nagyobb méretű hálózatok esetében a FUGGOORT numerikusan stabilabb, és tetszőlegesen nagy ismeretlenség esetén is működőképes. Végül megállapíthatjuk, hogy a FUGGOVON helyettesítésére alkalmas FUGGOOLD program használata rendkívül kényelmes, azonban csak homogén ponteloszlás esetén érdemes az alkalmazásával a számítógépre bízni a hálózati oldalak kialakítását.

6.2 A súlyozás kérdése

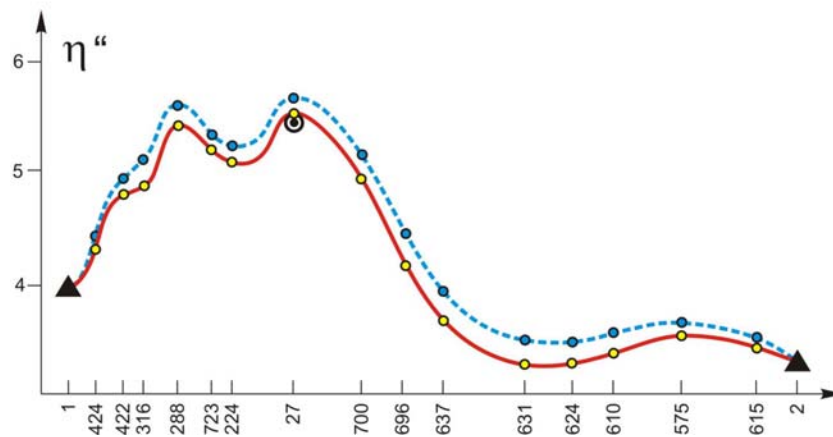
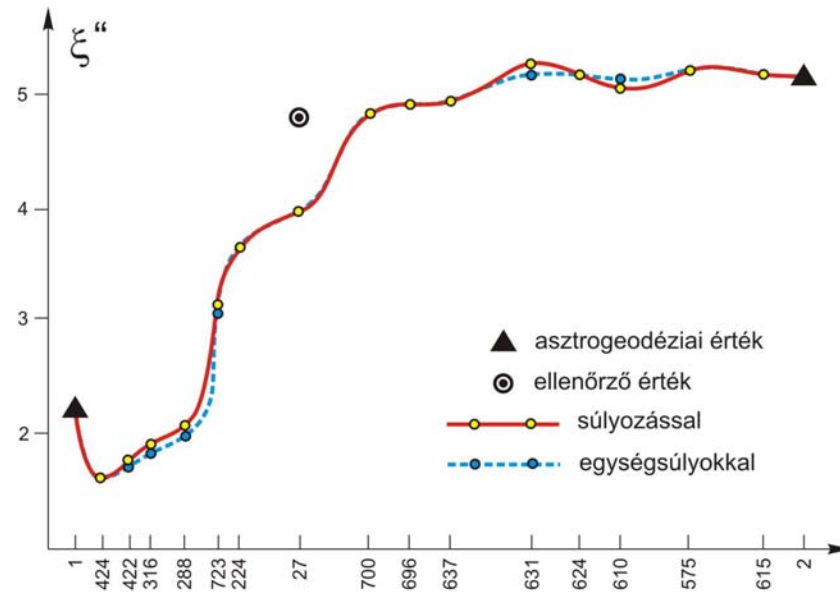
Korábban, a 2.4 fejezetben felmerült a kiegyenlítés során a súlyozás kérdése. Az ottani elméleti megfontolásoknak megfelelően két egyszerű közelítéssel élhetünk: egyrészt mivel az (58) összefüggéssel meghatározott T fiktív mérési eredményeket egymástól függetleneknek tekinthetjük, ezért a súlymátrixunk diagonálmátrix; másrészt mivel a súlykoefficiens mátrix főátlójában az oldalhosszak négyzetével arányos tagok állnak, ezért ennek invertálásából adódóan a fiktív mérési eredményeink súlyát a távolság négyzetével fordított arányban vehetjük fel.

A kísérleti számítások során arra próbáltam választ keresni, hogy ezzel a súlyozással növelhető-e az interpolált értékek pontossága. Ennek érdekében a 6-3. , 6-5. és a 6-7. ábrán látható hálózatokban mind súlyozás nélkül (egység-súlyokkal), mind a fenti súlyozással elvégeztem a függővonal-elhajlás számításokat.

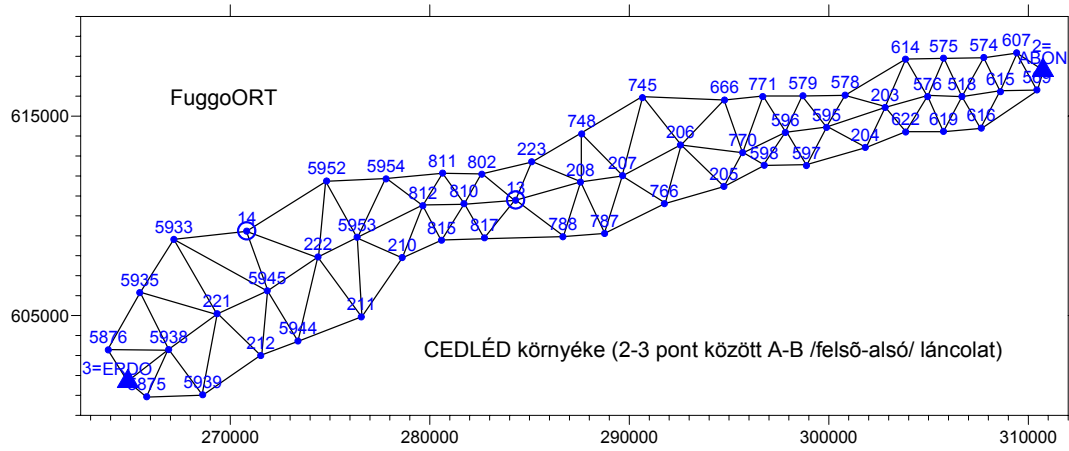
A számítások eredményeit a 6-4., 6-6. és a 6-8. ábrán láthatjuk, ahol a szaggatott kék vonalak az egység-súlyokkal interpolált, a folytonos piros vonalak pedig a súlyozással számított függővonal-elhajlás értékeket kötik össze. Az ábrákon látható, hogy egyetlen kivételtől eltekintve a folytonos vonallal összekötött görbék közelítik meg jobban az ellenőrző pontokban megadott értékeket.



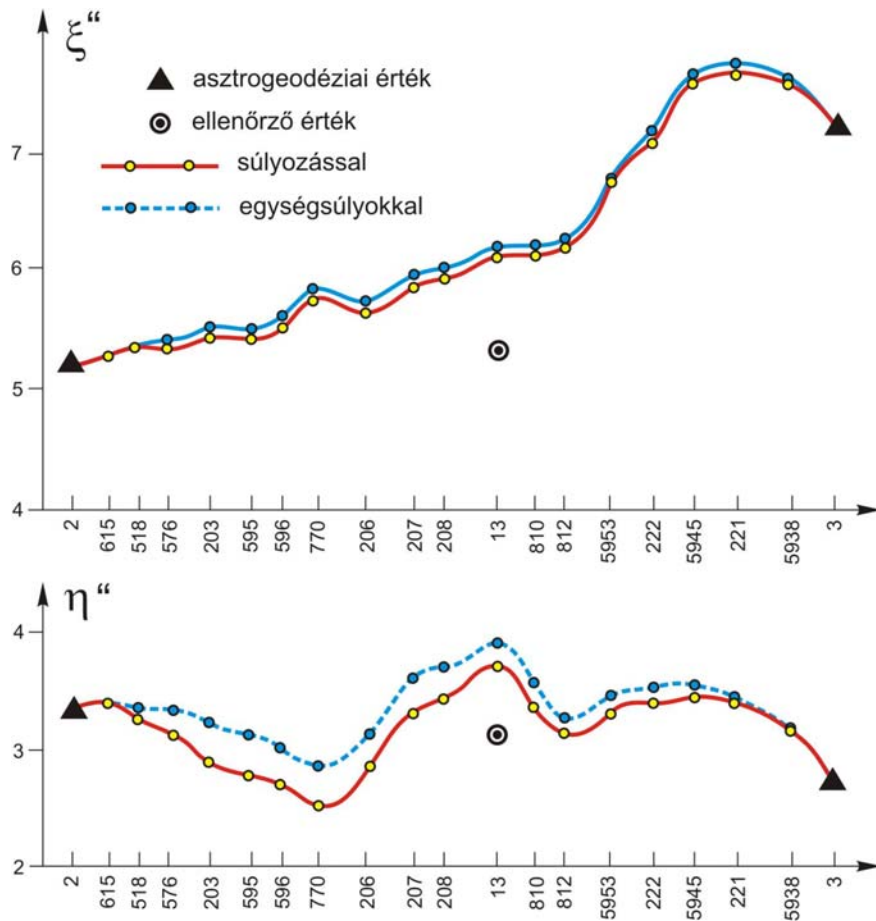
6-3. ábra. A Cegléd melletti 1-2/A-B kettős teszt láncolat elrendezése.



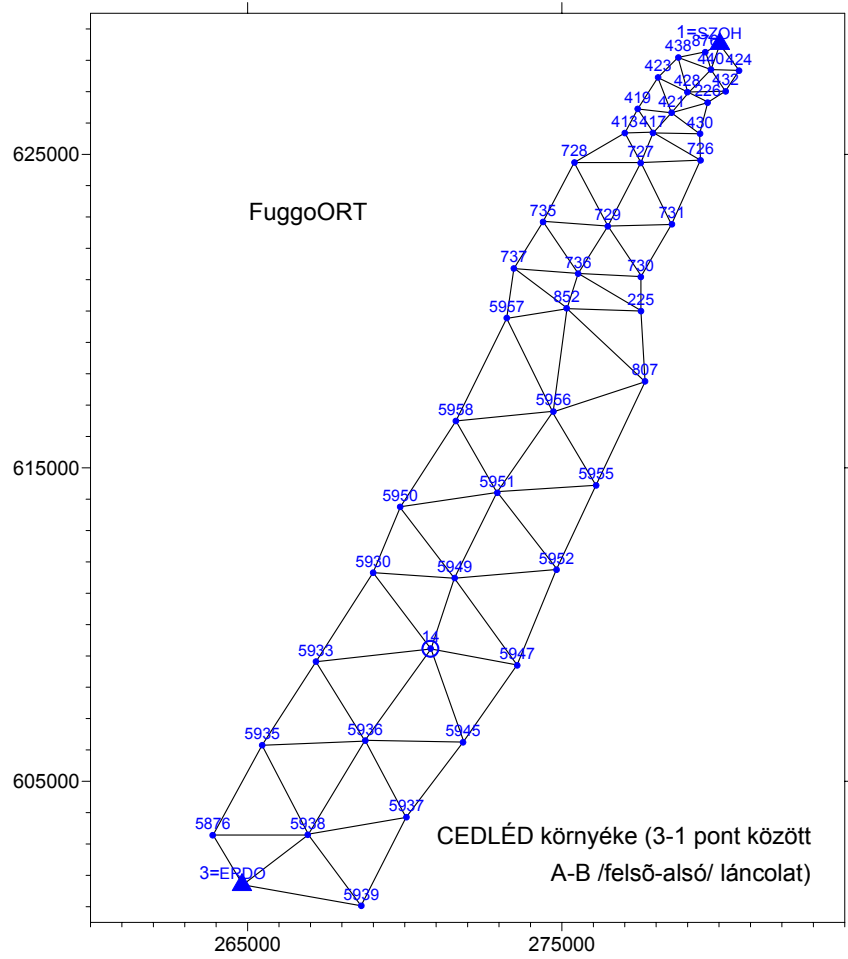
6-4. ábra. Az 1-2/A-B láncolatra egységsúlyokkal és súlyozással számított értékek.



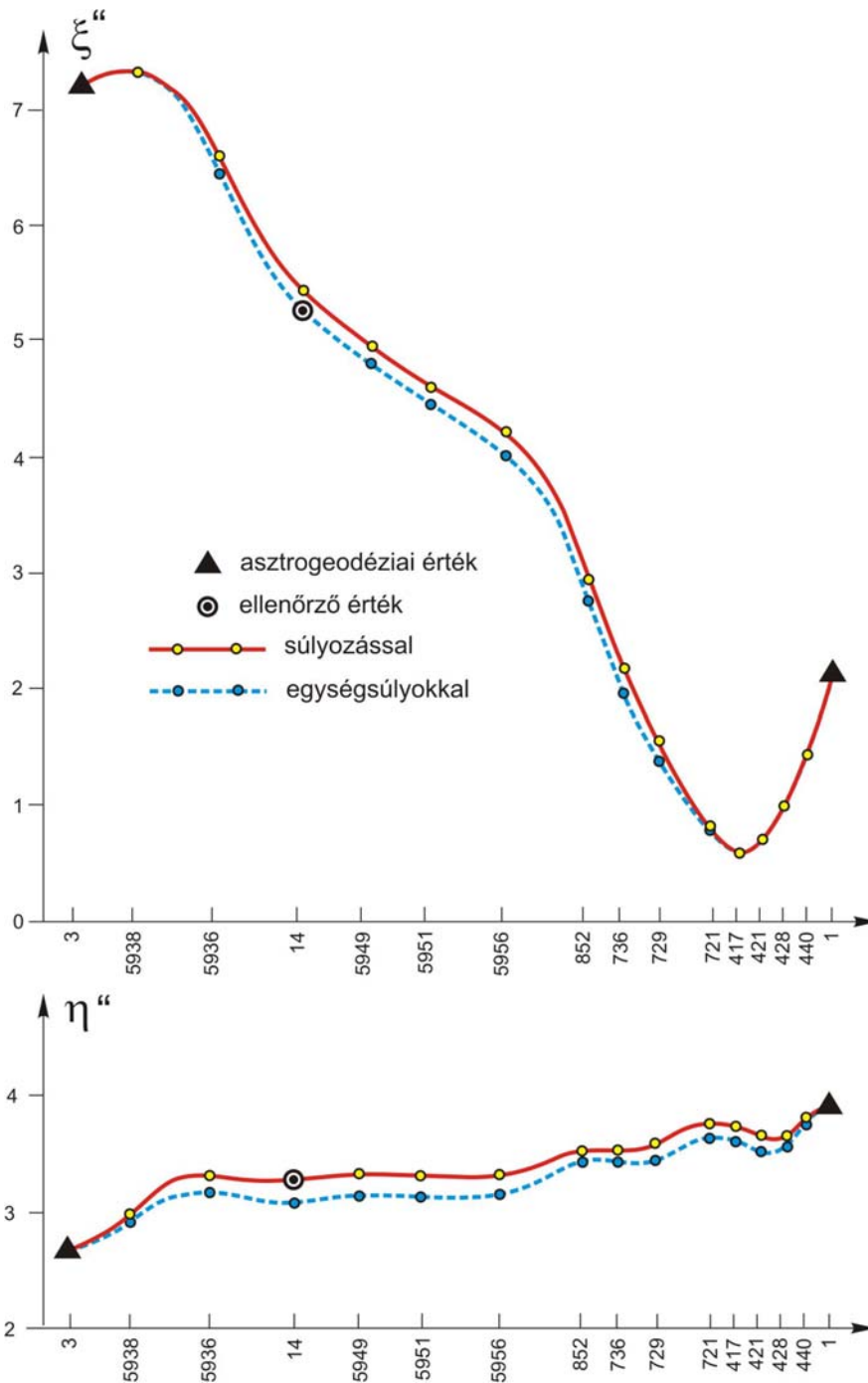
6-5. ábra. A Cegléd melletti 2-3/A-B kettős teszt láncolat elrendezése.



6-6. ábra. A 2-3/A-B láncolatra egységsúlyokkal és súlyozással számított értékek.



6-7. ábra. A Cegléd melletti 3-1/A-B kettős teszt láncolat elrendezése.



6-8. ábra. A 3-1/A-B láncolatra egységsúlyokkal és súlyozással számított értékek.

A számítások eredményeit a 6-3. táblázatban is összefoglaltam. A táblázatban látható, hogy a különböző interpolációs hálózatok ellenőrző pontjaiban mekkora eltérések adódtak az egységsúlyokkal, és a súlyozással számított, illetve az ugyanott ismert ξ , η értékek között. Ezen eltérések alapján meghatároztam a két módszer pontosságát jellemző középhibákat is.

6-3. táblázat. A súlyozás hatása az interpolációra.

Hálózat jele	Ell. pont	egységsúlyokkal		súlyozással	
1-2/AB	27	-0.85	+0.30	-0.81	+0.11
2-3/AB	13	+0.88	+0.79	+0.80	+0.58
3-1/AB	14	+0.09	-0.21	+0.22	-0.03
Gauss-féle középhiba:		0.71	0.50	0.67	0.34
		0.61		0.53	

A táblázat adatai alapján megállapítható, hogy a szóban forgó súlyozás bevezetésével kismértékben javítható az interpolált értékek pontossága. A Cegléd környéki teszt területünkön ez a javulás mintegy $0.08''$ (13%).

6.3 Az interpolációs hálózatok célszerű geometriája

Korábban, a fokozatos kiküszöbölés eljárásának ismertetése során a 2.3 fejezetben láthattuk, hogy a (45), (46), valamint az (50) és az (51) összefüggésekkel meghatározott a_i és c_i együtthatók kizárólag a hálózat geometriájának, míg a b_i és a d_i együtthatók részben a hálózat geometriai elrendezésének, részben a ΔW_{Δ} és a ΔW_{xy} mennyiségek függvényei. Most először nézzük meg, hogyan alakulnak a (65), (66) összefüggéssel számítható középhibák az interpolációs láncolatok különböző geometriai elrendezése esetén.

Ennek érdekében megvizsgáltam, hogy mekkora záróhibák várhatók a kiküszöböléses módszerrel az alábbi három változatban meghatározott függővonal-elhajlás értékekre:

♦ az első változatban: rögzített ξ értékek esetén, amikor mindkét végpontban megadjuk a ξ összetevő és csak az egyik végpontban az η összetevő értékét (ekkor az u paraméter értékét az (54) összefüggésből határozhatjuk meg),

♦ a második változatban: rögzített η értékek esetén, amikor mindkét végpontban megadjuk az η összetevő és csak az egyik végpontban a ξ összetevő értékét (ekkor az u paraméter értékét az (55) összefüggésből határozhatjuk meg),

♦ végül a harmadik változatban: rögzített ξ és η értékek esetén, amikor mindkét végpontban megadjuk mind a ξ , mind az η összetevő értékét, az u paraméter értékét pedig az (56) összefüggés alapján kiegyenlítéssel határozhatjuk meg.

A fenti esetekben a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevőkre vonatkozó w_ξ és w_η záróhibákat az alábbi összefüggésekkel értelmezzük:

$$w_\xi = \Delta\xi_{nm} - \Delta\xi'_{nm} \quad (71)$$

$$w_\eta = \Delta\eta_{nm} - \Delta\eta'_{nm} \quad (72)$$

ahol $\Delta\xi_{nm}$ és $\Delta\eta_{nm}$ az n és m jelű asztrogeodéziai pontokon ismert függővonal-elhajlás összetevők különbsége, a $\Delta\eta'_{nm}$ a rögzített ξ értékek esetén az (55) alapján számított -, a $\Delta\xi'_{nm}$ pedig a rögzített η értékek esetén az (54) alapján számított összeg.

Legyen az (54), (55)-ben a $\sum b_i$ hibája ε_b , és a $\sum d_i$ hibája ε_d . Ekkor az (54)-ből számítható elméletileg hibátlan u_0 érték a

$$\sum_{i=m}^n a_i u_0 + \sum_{i=m}^n b_i + \varepsilon_b = \xi_{nm}$$

összefüggésből:

$$u_0 = \frac{\xi_{nm} - \sum_{i=m}^n b_i}{\sum_{i=m}^n a_i} - \frac{\varepsilon_b}{\sum_{i=m}^n a_i} = u - \frac{\varepsilon_b}{\sum_{i=m}^n a_i} . \quad (73)$$

Másrésről az (54) alapján:

$$\sum_{i=m}^n c_i u_0 + \sum_{i=m}^n d_i + \varepsilon_d = \eta_{nm} ,$$

amelybe a (73) összefüggést beírva, a (72) értelmében:

$$w_\eta = \frac{\sum_{i=m}^n c_i}{\sum_{i=m}^n a_i} \varepsilon_b - \varepsilon_d .$$

Bizonyítható (BADEKAS - MUELLER 1967), hogy:

$$\frac{\sum_{i=m}^n c_i}{\sum_{i=m}^n a_i} \varepsilon_b = \tan \alpha_{nm}$$

ahol α_{nm} a két szélső asztrogeodéziai pontot összekötő egyenes azimutja, így:

$$w_\eta = \varepsilon_b \tan \alpha_{nm} - \varepsilon_d . \quad (74)$$

Hasonlóképpen:

$$w_\xi = \varepsilon_d \cot \alpha_{nm} - \varepsilon_b . \quad (75)$$

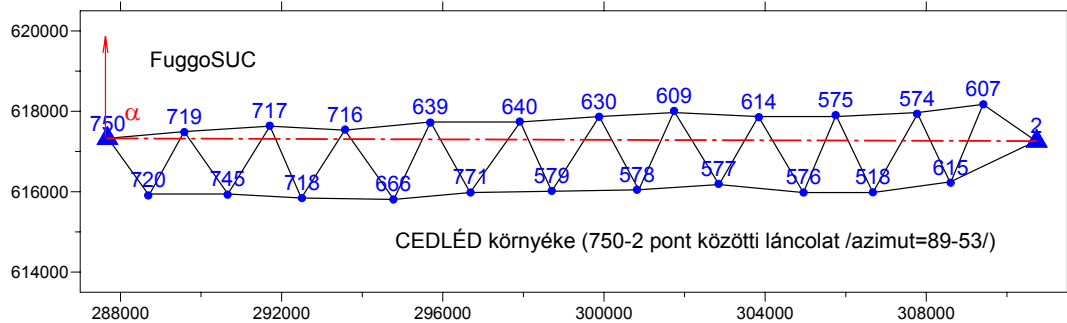
A (74) és a (75) összefüggésekből következik, hogy:

$$\alpha_{nm} \xrightarrow{\lim} 0^0 (180^0) \begin{cases} w_\xi = \infty \\ w_\eta = -\varepsilon_d \end{cases}$$

és

$$\alpha_{nm} \xrightarrow{\text{lim}} 90^0 (270^0) \left\{ \begin{array}{l} w_{\xi} = -\varepsilon_d \\ w_{\eta} = \infty \end{array} \right.$$

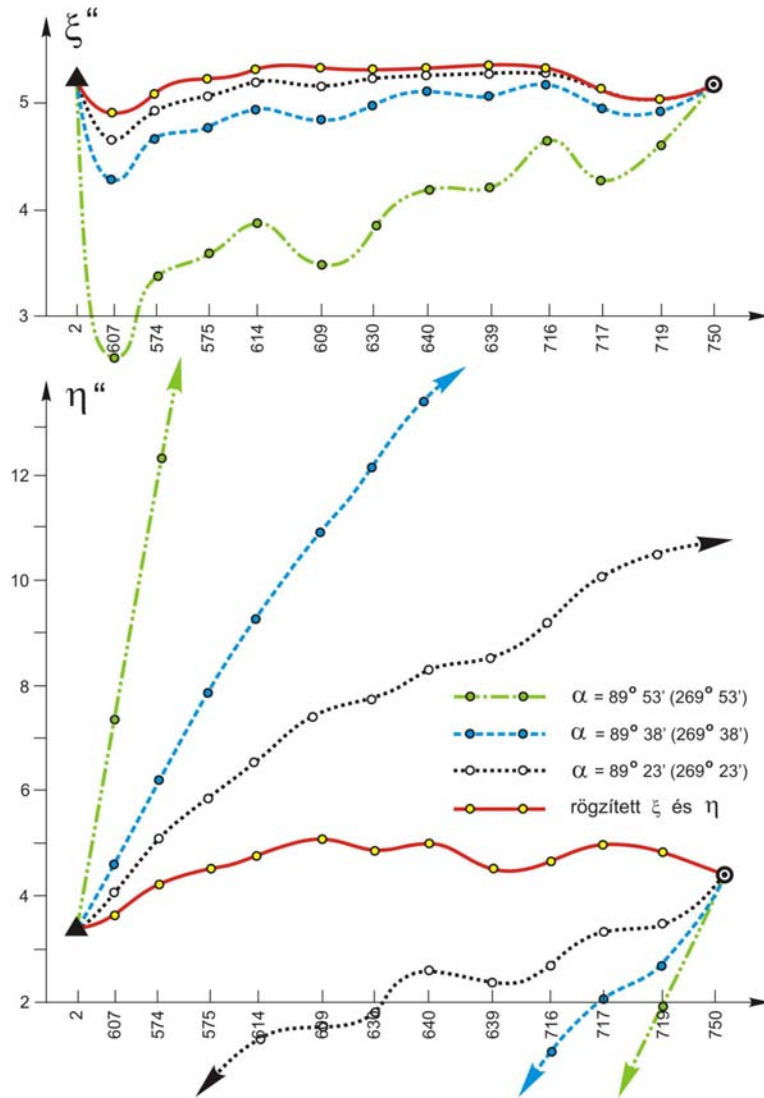
azaz a ξ összetevők w_{ξ} záróhibája kedvezően csökken, amikor az interpolációs hálózat végpontjait összekötő egyenes α_{nm} azimutja 90° vagy 270° felé közeledik, de minden határon túl megnő, amikor az α_{nm} azimut 0° vagy 180° felé közeledik. Az utóbbi esetben a ξ összetevőnek még az (56) szerinti kiegyenlítéssel számított értékei is rendkívül megbízhatatlanok. (Teljesen hasonló, de fordított esettel állunk szemben a w_{η} értékre és az η összetevőkre vonatkozóan.)



6-9. ábra. $\alpha \approx 90^\circ$ azimut értékhez közeli teszt-láncolat.

A fenti megállapítások vizsgálatára számításokat végeztem a 6-9. ábrán látható 750 és a 2 jelű pont között létesített láncolat mentén, - ahol a 750 jelű pont néhányszor 10 m-es x irányú elmozdításával a láncolat kezdő és végpontját összekötő egyenes azimutját (igen közel a 90° -hoz) az $\alpha_{750-2} = 89^\circ 23'$, $89^\circ 38'$ és $89^\circ 53'$ értékek között változtattam. A számításokat mindkét irányban (a $750 \rightarrow 2$ és a $2 \rightarrow 750$ értelemben is) elvégeztem, rögzített ξ_{nm} , rögzített η_{nm} értékek esetén; illetve együttesen rögzített ξ_{nm} és η_{nm} értékek mellett az (56) szerinti kiegyenlítéssel. Az elméleti megfontolásoknak megfelelően a rögzített ξ_{nm} értékek esetén számított η összetevők záróhibája igen nagy ($w_{\eta} = 15.15''$) és az interpolált értékek középhibái is rendkívül magasak. A számítási eredményeket a 6-10. ábrán is tanulmányozhatjuk, ahol jól látható,

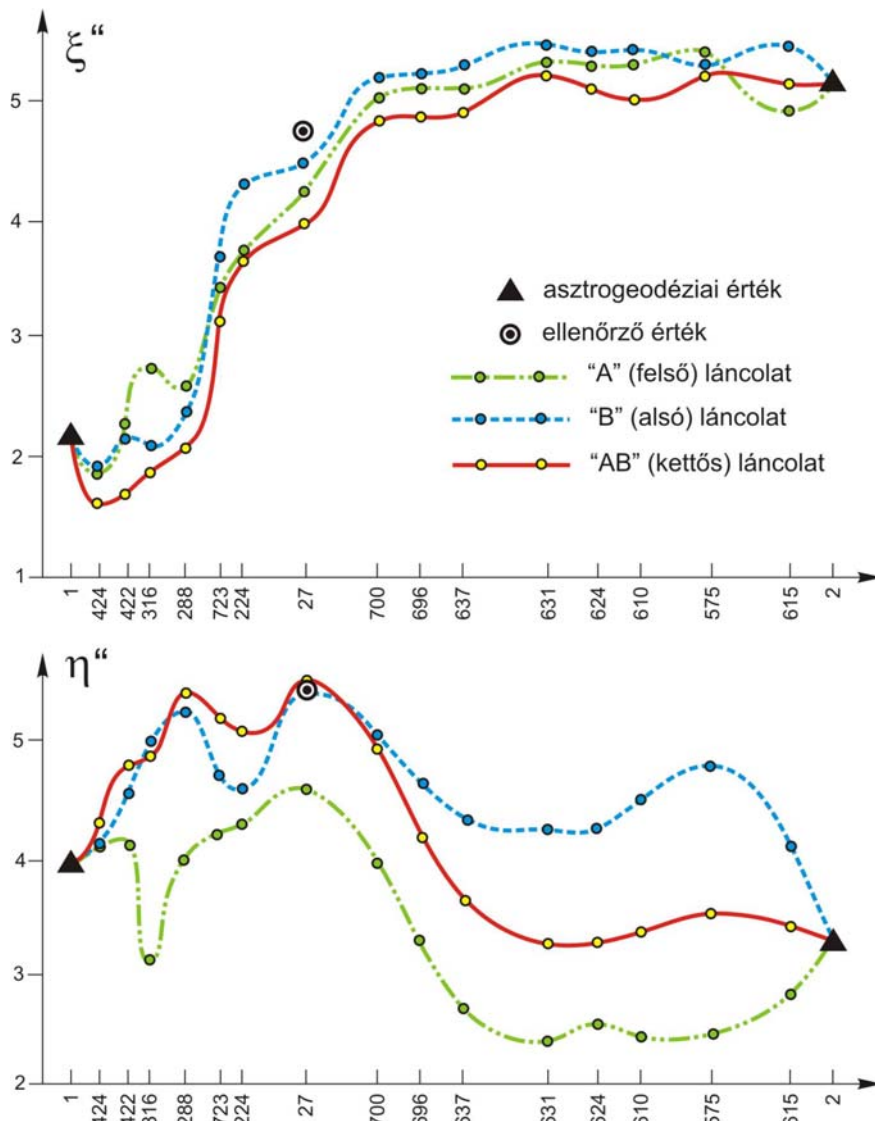
amint a kezdő és a végpontot összekötő képzeletbeli vonal azimutja közeledik a 90° felé, (a mindkét végpontban megadott ξ és csak az egyik végpontban megadott η összetevő esetében) jelentősen romlik az interpoláció megbízhatósága.



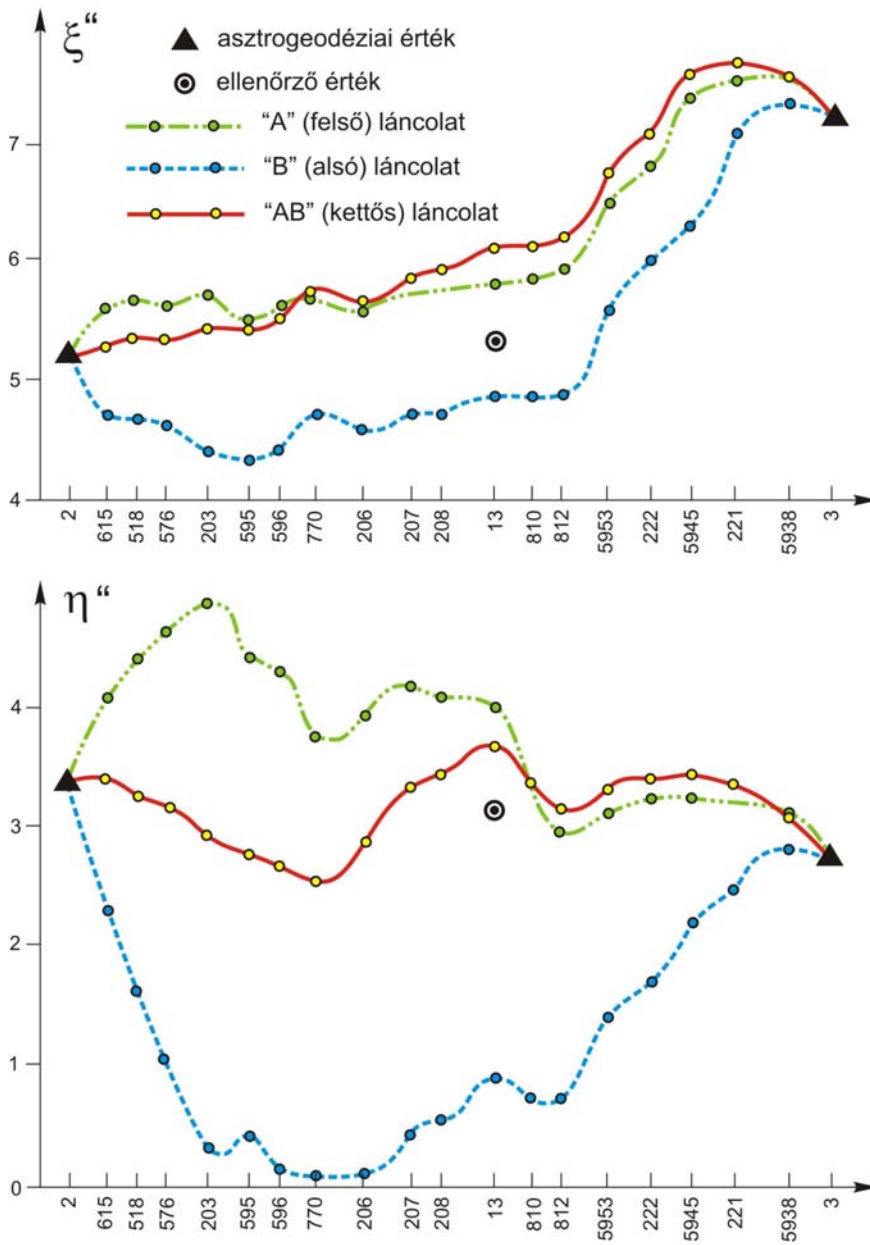
6-10. ábra. Az ξ értékek romlása a hálózat geometriájának függvényében.

Teljesen hasonló probléma adódik az $\alpha_{nm} = 0^\circ (180^\circ)$ esetben, így az erre vonatkozó kísérleti számításaimat nem is részletezzük.

További vizsgálataim során arra próbáltam választ keresni, hogy milyen az interpolációs hálózatok pontjainak optimális geometriai elrendezése, amely esetén a legnagyobb pontosságú függővonal-elhajlás értékek számíthatók. Ezzel kapcsolatosan összehasonlítottam az egyszerű és a kettős láncolatok mentén, valamint a tetszőleges területre és a *Renner*-féle ponteloszlás esetére az interpolált értékek pontosságát. Az egyértelmű összehasonlíthatóság érdekében ezeket a számításokat minden esetben a FUGGOORT programmal végeztem, az előző fejezetben tárgyalt súlyozás alkalmazásával.



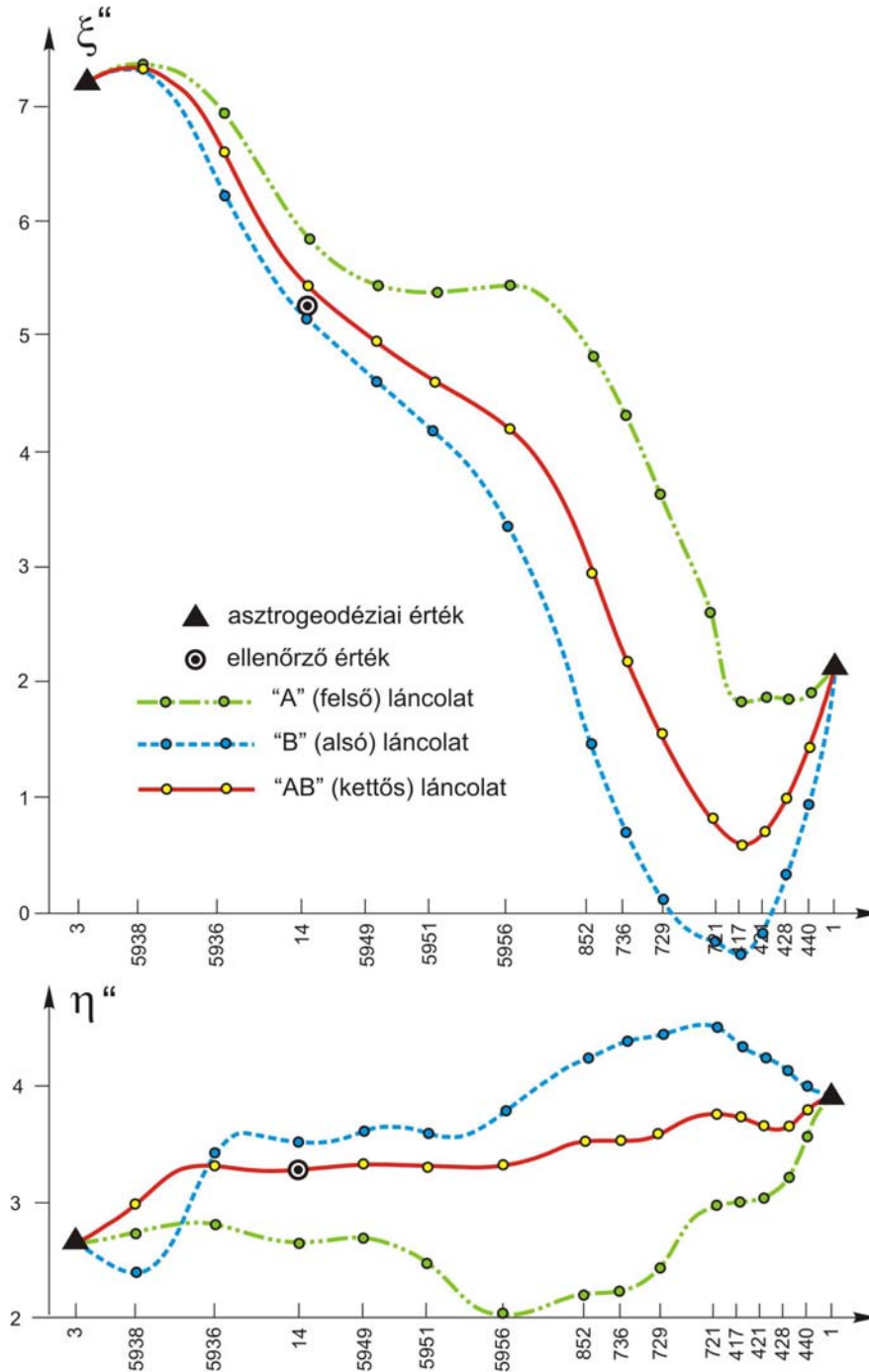
6-11. ábra. Az 1-2/A-B láncolat különböző geometriai elrendezésére számított értékek.



6-12. ábra. A 2-3/A-B láncolat különböző geometriai elrendezésére számított értékek.

Először a 6-3., 6-5. és a 6-7. ábrán látható egyszerű és kettős láncolatok mentén végeztem számításokat. Az egyszerű láncolatok: a 6-3. ábrán az 1-2 asztrigeodéziai pontok közötti felső "A" és az alsó "B" láncolat, a 6-5. ábrán a 2-3 pontok közötti alsó "A" és a felső "B" láncolat, és a 6-7. ábrán a 3-1

pontok közötti bal oldali "A" és a jobb oldali "B" láncolat. A kettős "AB" láncolatok: a 6-3., 6-5 és a 6-7. ábrán látható teljes hálózatok.



6-13. ábra. A 3-1/AB láncolat különböző geometriai elrendezésére számított értékek.

Az egyszerű "A" és "B" láncolatok mentén, valamint a kettő egyesítéséből keletkező kettős "AB" hálózat mentén interpolált eredményeket a 6-11. , 6-12. és a 6-13. ábrán hasonlíthatjuk össze. Az "A" és a "B" egymás melletti láncolatok azonos interpolációs pontokat tartalmaznak, amelyekre akár az "A" akár a "B" láncolat mentén számolva, elvileg ugyanazokat a ξ , η értékeket kellene kapnunk. A 6-11. 6-12. és a 6-13. ábrán a szomszédos láncolatok azonos pontjaira interpolált értékeket zöld és kék szaggatott vonalak kötik össze. Látható, hogy az egymás melletti láncolatokból a közös pontokra interpolált értékek (a szaggatott zöld és kék vonalakkal rajzolt görbék) általában jelentősen eltérnek egymástól, az eltérés helyenként a 3" értéket is meghaladja. Azt is megfigyelhetjük, hogy amikor a két különböző szomszédos ("A" és "B") láncolat közös pontjaiban nagyobb eltéréseket kapunk, akkor a két láncolatból alkotott együttes ("AB") hálózat pontjaira interpolálva jóval kedvezőbb kép adódik, ugyanis ez utóbbi (az ábrákon folytonos piros vonallal jelölt) görbék többnyire a két egymástól jelentősen eltérő szélső eset között futnak, és általában jobban megközelítik az ellenőrző pontokban megadott ξ , η értékeket is. A számítások eredményeit a 6-4. táblázatban is összefoglaltuk.

6-4. táblázat. Különböző geometriai elrendezésekre számított ξ , η értékek eltérése az ellenőrző pontokon

Hálózat jele	Ell. pont	"A" láncolat " "		"B" láncolat " "		"A-B" együttes " "	
1-2	27	-0.54	-0.74	-0.22	+0.16	-0.81	+0.11
2-3	13	-0.63	-2.54	+0.70	+0.89	+0.80	+0.58
3-1	14	-0.09	-0.58	+0.71	+0.26	+0.22	-0.03
Gauss-féle középhiba:		0.48	1.56	0.59	0.54	0.67	0.34
		0.91				0.53	

A táblázatban összehasonlíthatjuk, hogy az ellenőrző pontokban a különböző láncolatok mentén számolva mekkora eltérések adódtak a *számított*, illetve az ugyanott *ismert* ξ , η értékek között. Ezen eltérések alapján meg-

tározta a különböző típusú láncolatok esetén az interpoláció pontosságát jellemző középhibákat.

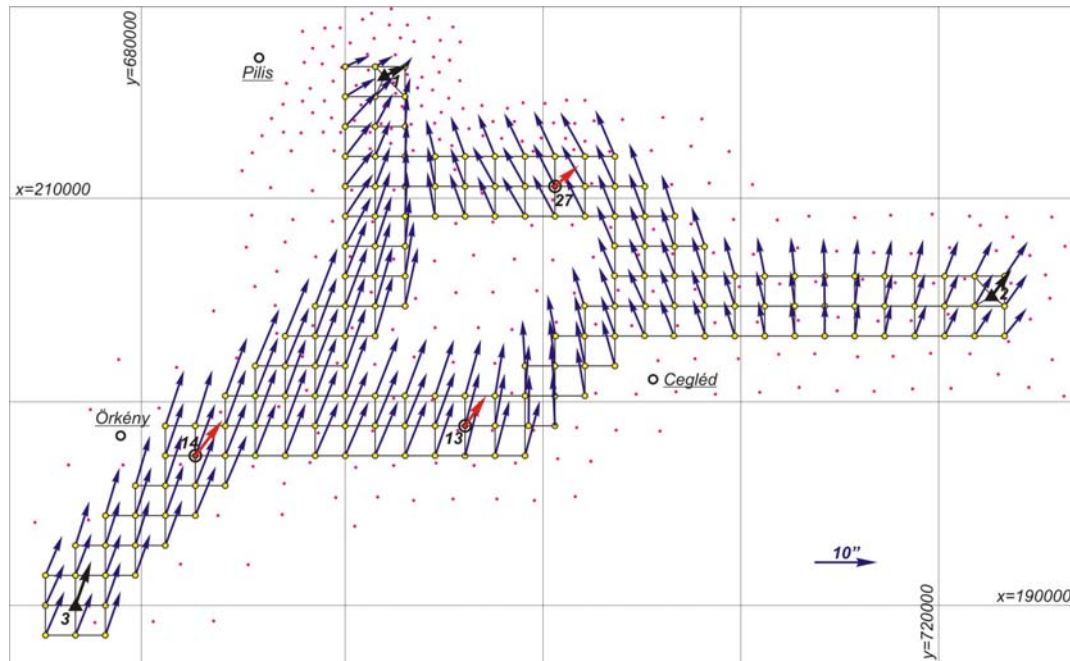
A táblázat adatai, valamint a 6-11., 6-12. és a 6-13. ábrák alapján megállapítható, hogy két asztrogeodéziai pont között *kettős láncolat* mentén interpolálva pontosabb ξ , η értékek nyerhetők, mint az *egyszerű láncolatok* mentén számolva.

Korábban már szóba került, hogy kísérleti számításokat végeztem a *Renner-féle* interpolációs módszer alkalmazásával is. Ennek eredményeiről szintén itt tartottam célszerűnek beszámolni, mivel az ezzel kapcsolatos megállapításaim is alapvetően a hálózatok geometriájával kapcsolatosak. A *Renner-féle* módszer alapelveinek megfelelően a kísérleti területet a 6-14. ábrán látható módon 1.5 km oldalhosszúságú négyzetes hálózattal borítottam be. Mivel a hálózat sarokpontjaiban nincsenek közvetlen Eötvös-inga mérések, ezért az illető helyek ΔW_{Δ} és a ΔW_{xy} görbületi gradienseit a 9. - 12. ábrákon bemutatott izovonalas térképekről olvastam le. Így tulajdonképpen a négyzetes hálózat sarokpontjaira a második differenciálhányadosokat a közvetlen ingamérések eredményeiből lineáris interpolációval határoztam meg. (A 6-14. ábrán sárga körökkel jelöltem azon hálózati pontokat, ahol nem történtek közvetlen ingamérések és a görbületi gradienseket a fenti módon állapítottam meg.) Amint a 6-14. ábrán látható, a négyzetes hálózatot úgy helyeztem el, hogy a 3 jelű asztrogeodéziai pont ennek egyik szögpontja legyen, az 1 és a 2 jelű pontokat pedig általános háromszögekkel csatlakoztattam a hálózathoz. A 13, 14 és a 27 jelű ellenőrző pontok a négyzetes hálózat sarokpontjai, így az interpolált függővonal-elhajlás értékek közvetlenül ellenőrizhetők.

A szóban forgó hálózatnak összesen 177 pontja van, ebből 174 ismeretlen pont. A pontonként két ismeretlen függővonal-elhajlás összetevő összesen 348 ismeretlent jelent, amelyre összesen 542 egyenlet írható fel.

A feladat megoldásaként nyert függővonal-elhajlás értékeket a 6-14. ábrán vektor-formában is ábrázoltam. Ezek a vektorok felfoghatók akár mint víz-

szintes erősszetevők, akár mint a közvetlen $\rightarrow \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ függővonal-elhajlás értékek. Az előbbieket mindössze a g vektorral való szorzással térnek el az utóbbiaktól. (Az értelmezésünk szerint a függővonal-elhajlás értékek is felfoghatók mint vektorok, amennyiben a vektorok pozitív irányának az ellipszoidi zenit-től a csillagászati zenit felé mutató irányt tekintjük, a vektor hosszának pedig az illető pontban a θ abszolút értékét választjuk. Így megfelelő lépték alkalmazásával ugyanarról az ábráról akár a függővonal-elhajlás értékek, akár a vízszintes erősszetevők leolvashatók.)



6-14. ábra. Interpoláció a Renner-féle geometriai elrendezés pontjaira.

A 6-14. ábrán látható, hogy a Renner-féle módszerrel interpolált függővonal-elhajlás értékek jelentősen eltérnek az ellenőrző pontokban vastagabb piros színű vektorokkal jelölt ismert értékektől. A számítások eredményeit a 6-5. táblázatban összefoglalva is láthatjuk.

6-5. táblázat. A Renner-féle módszer vizsgálatának eredményei.

Ellenőrző pont	Renner-féle módsz.		FUGGOORT program	
	"	"	"	"
27	+2.89	-9.62	-0.69	-0.51
13	+3.84	-1.24	+0.54	+0.96
14	+3.95	-0.26	+0.55	+0.29
Gauss-féle középhiba:	3.59	5.60	0.60	0.65
	4.70		0.62	

Egyelőre csak a táblázat első részével foglalkozunk, amelyben összehasonlíthatjuk, hogy az ellenőrző pontokban mekkora eltérések adódtak a Renner-féle módszerrel számított, illetve az ugyanott ismert ξ , η értékek között. Az $m_\xi = \pm 3.59''$ és az $m_\eta = \pm 5.60''$ nagyságú középhiba sajnos azt bizonyítja, hogy ez a módszer – legalább is a teszt területen – nem alkalmazható. Vizsgálataim szerint a nagy középhibákat és a Cegléd környéki teszt területen a szóban forgó módszer alkalmazhatatlanságát az alábbi két lényeges hibaforrás okozza:

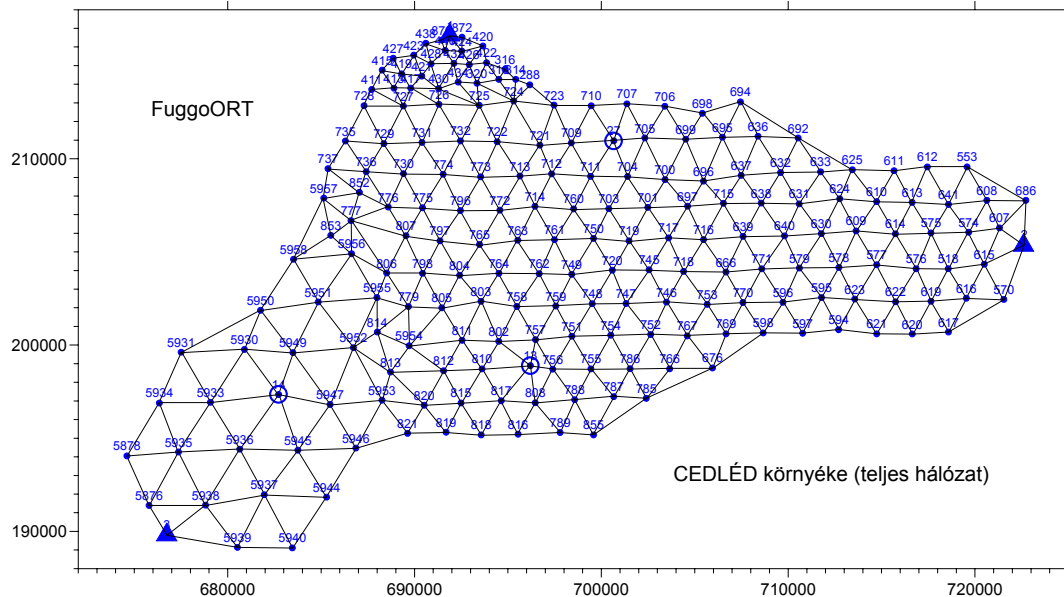
1. A Renner-féle négyzetes interpolációs hálózat rácsállandója a vizsgált területre állandó érték. Ez alapvető problémát olyan területrészekben okozhat, ahol a rácsállandó értéke nagyobb annál a távolságnál, amelynél a szomszédos pontok között a ΔW_Δ és ΔW_{xy} értékek megváltozása még lineárisnak tekinthető. A ΔW_Δ és ΔW_{xy} értékek két pont közötti megváltozásának linearitása pedig a legfontosabb feltétel, amelyet a (31) alapösszefüggés levezetésekor a (22) integrálközelítés során tettünk. A Cegléd környéki teszt mezőnkön ilyen területrész az 1 jelű asztrogeodéziai pont környezete, ahol az 5.4. és az 5.5. ábra tanúsága szerint ez a feltétel nyilvánvalóan nem teljesült. A problémát nehéz megoldani, mert ha adott területen csökkentjük a rácstávolságot, akkor jelentősen növekszik az ismeretlenek száma.

2. A másik lehetséges hibaforrás abból adódik, hogy a négyzetes hálózat sarokpontjaiban nincsenek közvetlen Eötvös-inga mérések, ezért a sarokpon-

tokra a ΔW_{Δ} és a ΔW_{xy} értékeket a szomszédos pontok mérési adatai alapján interpolálni kell. Az így meghatározott görbületi gradiensek - különösen az olyan "zavartabb" területrészekben mint pl. az 1 pont környezete – jelentősen eltérhetnek a tényleges értékektől.

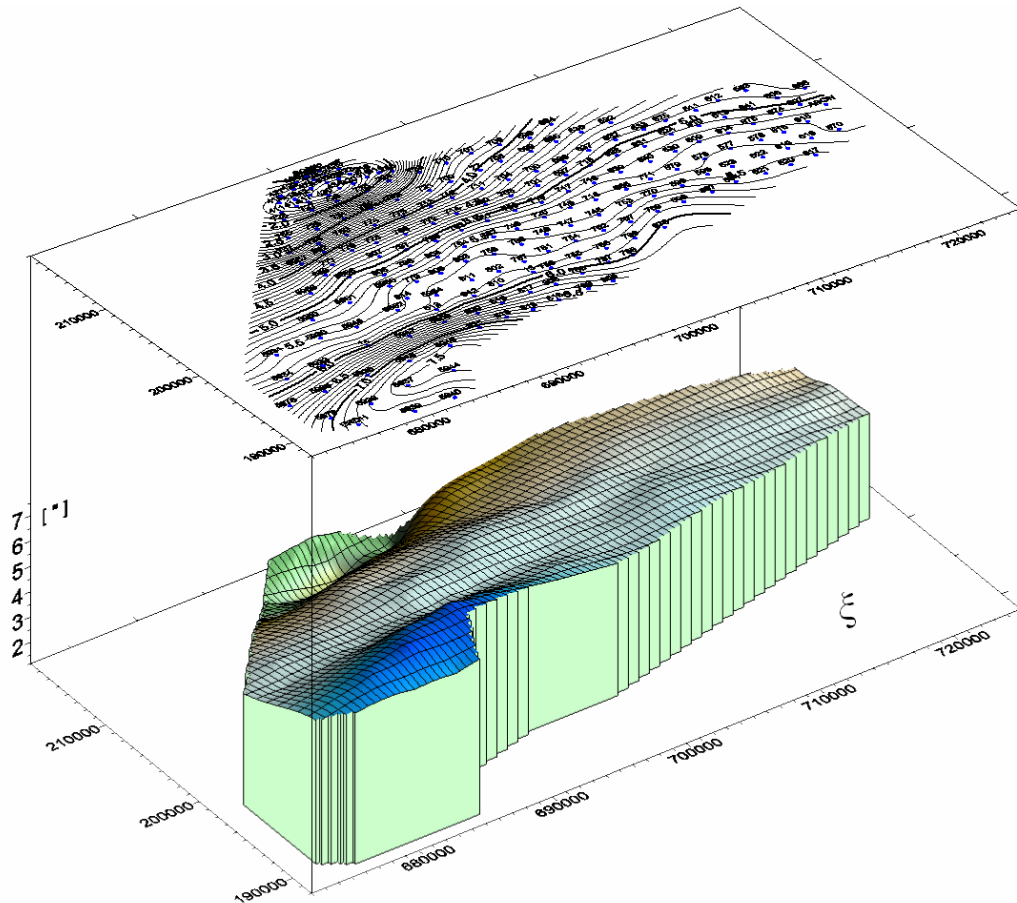
A fenti két hibaforrás kiküszöböléséhez célszerű az interpolációs hálózat pontjait az Eötvös-inga mérési állomások helyén (zavartabb területrészekben az ingamérések pontsűrűségének megfelelően) nagyobb pontsűrűséggel felvenni, és az interpolációt a szabályos négyzetes rácshálózat helyett tetszőleges hálózatra elvégezni. Egyébként ma már a modern számítástechnika alkalmazásával nincs is különösebb szükségünk a szabályos négyzetes rácshálózat által nyújtott egyszerűbb számítási lehetőségek kihasználására.

A szóban lévő hibaforrások kiküszöbölésére létesítettem a 6-15. ábrán látható interpolációs hálózatot. Ennek a hálózatnak összesen 206 pontja van, ebből 203 ismeretlen pont. A pontonként két ismeretlen függővonal-elhajlás összetevő összesen 406 ismeretlent jelent, amelyre 558 egyenlet írható fel.

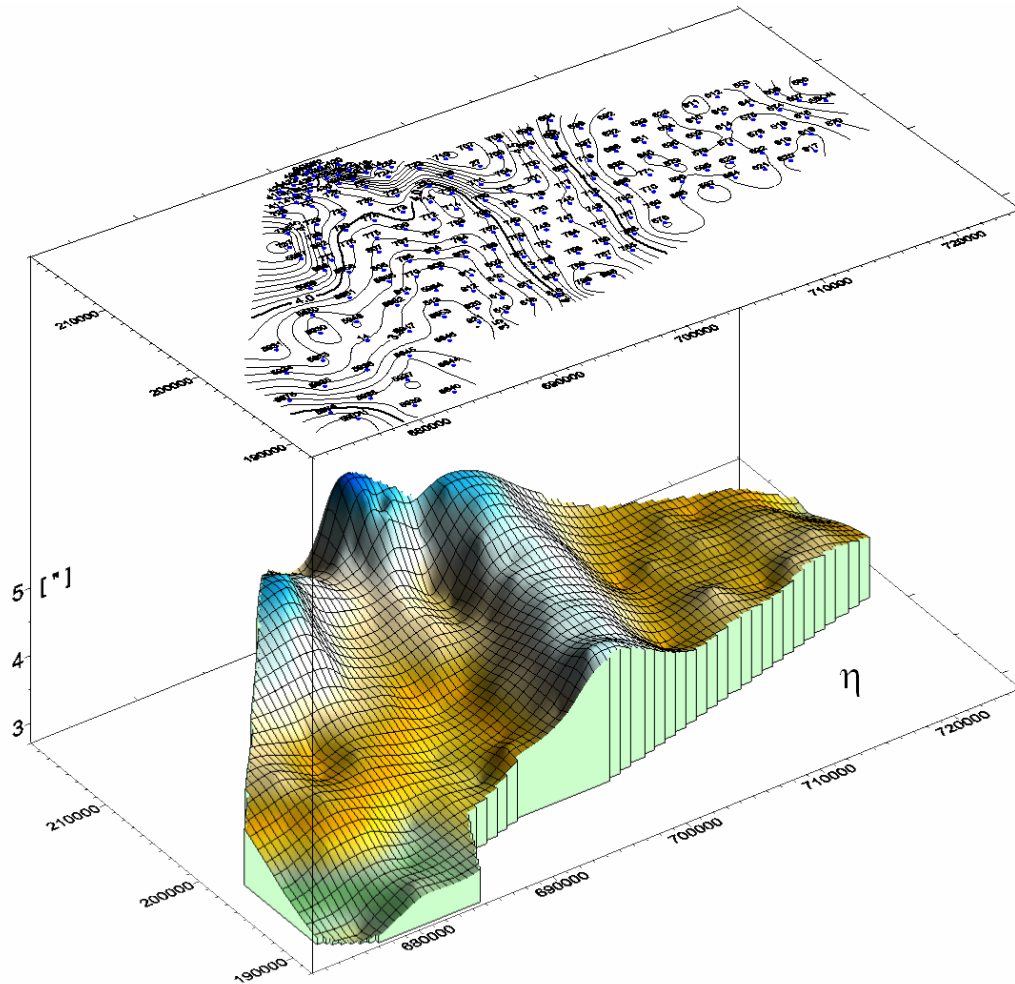


6-15. ábra. A Cegléd környéki teljes teszt hálózat elrendezése.

A feladat megoldásaként nyert ξ , η függővonal-elhajlás értékek eloszlását a 6-16. és a 6-17. ábrán láthatjuk. Emellett az 6-5. táblázat második részében megadtam, hogy az ellenőrző pontokban mekkora eltérések adódtak a FUGGOORT programmal számított, illetve az ugyanott *ismert* ξ , η értékek között. Az ellenőrző pontokban adódó eltérések alapján számított $m_{\xi} = \pm 0.60''$ illetve az $m_{\eta} = \pm 0.65''$ nagyságú középhiba azt igazolja, hogy megfelelő interpolációs hálózat esetén nagyobb összefüggő területre is számíthatók elfogadható pontosságú ξ , η értékek.

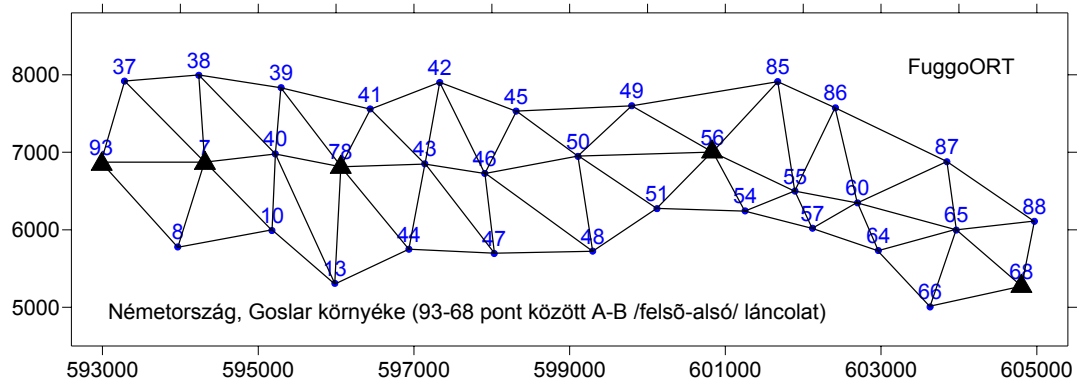


6-16. ábra. Interpolált ξ értékek a Cegléd környéki teljes teszt hálózat területén.



6-17. ábra. Interpolált η értékek a Cegléd környéki teljes teszt hálózat területén.

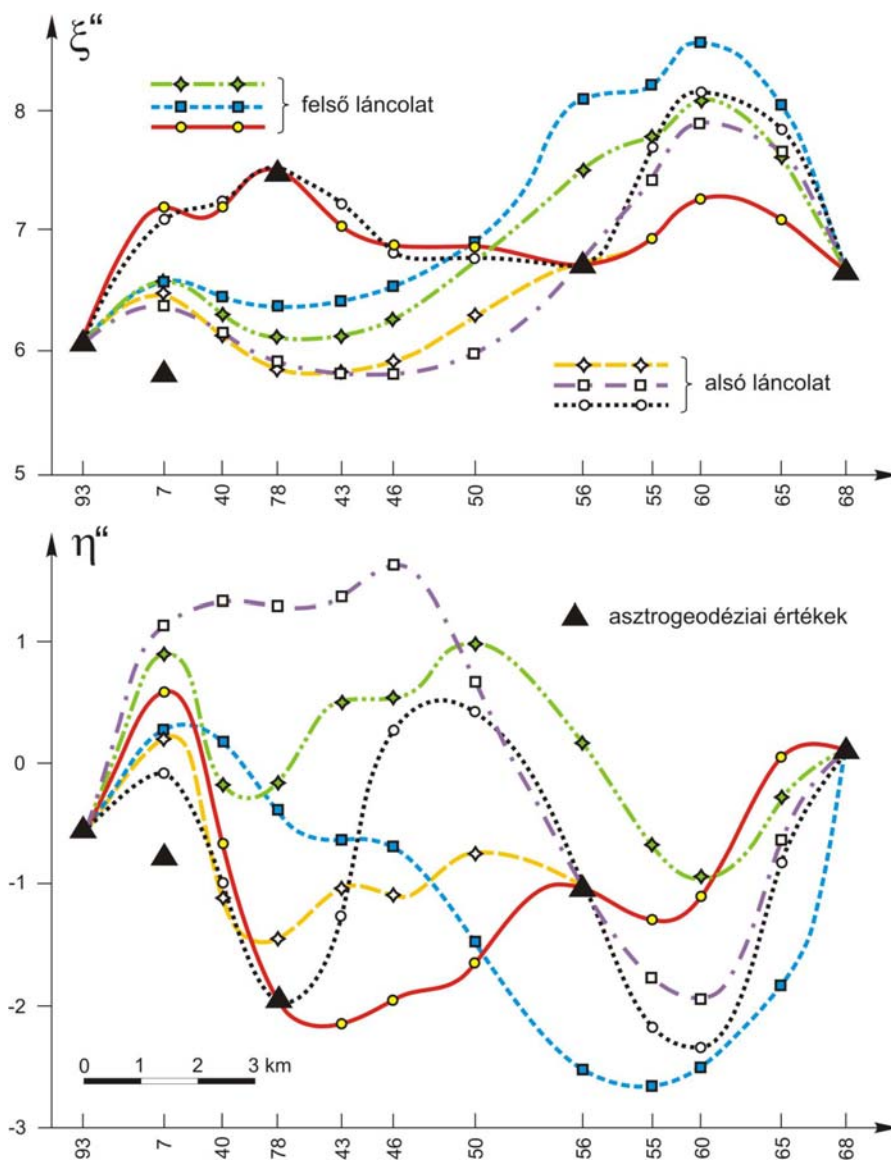
Végül arra vonatkozóan is végeztem vizsgálatokat, hogy valamely adott interpolációs hálózat esetén a kényszerek számának emelésével, – vagyis az ismert ξ , η értékekkel rendelkező asztrogeodéziai pontok számának növelésével – lehetséges-e az interpolált függővonal-elhajlás értékek hibájának csökkentése. Ezekhez a vizsgálatokhoz valamely Eötvös-ingával részletesen felmért területen az asztrogeodéziai pontok viszonylag sűrűbb hálózatára van szükség; amely sajnos Magyarországon nem állt rendelkezésemre. Ezért az erre vonatkozó kísérleti számításaimat a már korábban leírt németországi teszt területen végeztem.



6-18. ábra. A németországi teszt terület.

A szóban lévő területen a 6-18. ábrán látható kettős interpolációs láncolatot létesítettem, amely középső pontsorában a 12 db. Eötvös-inga mérési állomás közül öt egyben asztrogeodéziai pont is. Az első lépésben a két szélső (93 és 68 jelű) pontot rögzítettem és a fennmaradó három (56, 78, és 7 jelű) pontot használtam fel ellenőrzésre; a második lépésben a két szélső pont mellett az 56 jelű pontot is rögzítettem és a fennmaradó két (78, és 7 jelű) pontot használtam fel ellenőrzésre; végül a harmadik lépésben a két szélső asztrogeodéziai pont mellett az 56 és a 78 jelű pontot tekintettem kényszerpontnak és a 7 jelű pontot használtam fel ellenőrzésre. A számításokat több különféle hálózat és láncolat mentén is elvégeztem, sajnos a helyszűke miatt itt nem tudunk mindegyikkel foglalkozni. A 6-19. ábrán nyomon követhetjük, hogy a fent megadott lépésekben – a kényszerpontok számának növelésével – hogyan változnak az "A" és a "B" láncolat közös pontjaiban az interpolált függővonal-elhajlás értékek. Az ábráról egyértelműen megállapítható, hogy - a várakozással ellentétben - a kényszerpontok számának növelésével egyáltalán nem közeledtek egymáshoz a két szomszédos láncolat közös pontjaiban meghatározott ξ , η értékek, sőt helyenként még nagyobbak is lettek az eltérések. Ezzel a megállapítással jó összhangban vannak a 6-6. táblázatban összefoglalt eredmények, amelyek azt mutatják, hogy a 7 jelű ellenőrző pontban *számított*, illetve az ugyanitt *ismert* értékek közötti eltérések igen nagyok, és ezek az eltérések a kényszerként fel-

használt asztrogeodéziai pontok számának növelésével gyakorlatilag változatlanok.



6-19. ábra. Az asztrogeodéziai pontok számának hatása az interpolációra.

Közelebről megvizsgálva a németországi teszt terület viszonyait, a fenti jelenségre egyszerű magyarázat adható. Korábban már említettem, hogy ez hegyvidéki terület, ahol a W_{Δ} és a W_{xy} értékek egészen kis távolságokon belül is jelentősen megváltozhatnak. Mindez jól látható az 5.8. és az 5.9. ábrán, ahol például a két egymástól 1470 m távolságra lévő szomszédos 93 és 8 jelű pont között a W_{Δ} megváltozása: 245.58 E ; vagy például az egymástól mindössze 595 m távolságra lévő 58 és 59 jelű pont között a W_{xy} megváltozása 301.13 E ! Teljesen elképzelhetetlen, hogy az adott terepviszonyok estén a két említett pontpár között a gradiensek megváltozása lineáris lenne, márpedig ez - a korábbi megállapításaimnak megfelelően - a függővonal-elhajlás interpoláció alkalmazhatóságának alapfeltétele.

6-6. táblázat. Kényszerpontok számának hatása az interpolációra.

Hálózat- rész	Ell. pont	2 db. rögzített " "		3 db. rögzített " "		4 db. rögzített " "	
A (felső)	7	+0.78	+1.68	+0.66	+1.04	+1.37	+1.36
B (alsó)	7	+0.75	+1.12	+0.56	+1.92	+1.26	-0.09
<i>Gauss-féle középhiba:</i>		0.76	1.43	0.61	1.54	1.32	0.96
		1.14		1.17		1.15	

A témával kapcsolatos teljes szakirodalom szerint a gradiens értékek linearizálásának legalapvetőbb módszere az Eötvös-inga mérések terepi korrekciókkal történő ellátása az 5.3 fejezetben leírtaknak megfelelően. (A korrekciók kérdésével egyébként a következő fejezetben foglalkozunk részletesen.) Mivel a németországi teszt területen rendelkezésre álltak a korrekciókkal ellátott gradiens értékek is, ezért megpróbáltam ezek felhasználásával is elvégezni az előbbi vizsgálatokat. Számításaimat most a 6-18. ábrán látható közös "AB" hálózat mentén végeztem és meghatároztam, hogy a kényszerpontok számának növelésével hogyan változnak az ellenőrző pontokban az eltérések a *számított*, és az *ismert* asztrogeodéziai ξ , η értékek között. Számításaim eredményeit a 6-7. táblázatban láthatjuk összefoglalva.

6-7. táblázat

Hálózat jele	Ell. pont	2 db. rögzített " "		3 db. rögzített " "		4 db. rögzített " "	
AB	7	+0.37	+0.18	+0.30	+0.13	+1.06	-0.05
	78	-1.46	+0.94	-1.59	-0.01	-	-
	56	+0.28	+0.14	-	-	-	-

A táblázat adatai szerint az ellenőrző pontokban az eltérések az általam számított, és az ismert asztrogeodéziai értékek között a korrekciókkal ellátott gradiens értékek felhasználásával lényegesen kisebbek, mint a korrekciók nélküli értékek esetén. Az első lépésben, a hálózat két végpontjában rögzített függővonal-elhajlások mellett interpolált ξ , η értékek a 7 és az 56 jelű ellenőrző pontban igen jól megközelítik az ellenőrző értékeket, a 78 pontban azonban így is túl nagy eltérés adódott. A második lépésben a két szélső pont mellett az 56 jelű pontot is rögzítettem és a fennmaradó két (78, és 7 jelű) pontot használtam fel ellenőrzésre. Ekkor a 7 jelű ellenőrző pontban az interpolált ξ , η továbbá a 78 jelű pontban az η értéke tovább javult, de meglepetésre a 78 -as pont ξ értéke romlott. A harmadik lépésben a két szélső asztrogeodéziai pont mellett az 56 és a 78 jelű pontot is rögzítettem, de ekkor már csak a 7 jelű pontot tudtam felhasználni ellenőrzésre. Ez váratlan fordulatot hozott, hiszen a korábbi lépésekben a 7 jelű pontra igen kis eltérések adódtak, azonban a 78 jelű pont rögzítésével a 7 -es pont ξ összetevője most mégis jelentősen elromlott.

Ilyen jellegű gond többek között akkor fordulhat elő, ha valamelyik rögzített asztrogeodéziai érték (például esetünkben a 78 -as pont ξ értéke) hibás. Részletesen áttanulmányozva a németországi teszt terület adatait tartalmazó (HEINEKE 1978) tanulmányt megállapítható, hogy a szerző a vizsgálatait során csak az Eötvös-inga méréseket látta el terepi korrekciókkal, az asztrogeodéziai ξ , η értékeket változatlanul hagyta. A következő fejezet részben leírt megfontolásoknak megfelelően ez alapvető hiba, és valószínű, hogy a fenti számításoknál adódó problémát ez okozta.

Összefoglalva, a németországi interpolációs hálózaton belül az asztrogeodéziai kényszerpontok számának növelése nem csökkentette az interpolált értékek hibáját. Ebből azonban semmiféle általános következtetés nem vonható le, mivel a szóban lévő területen a rendelkezésünkre álló adatok nem felelnek meg minden tekintetben a követelményeknek. Hiába állnak rendelkezésünkre szokatlan pontsűrűségben asztrogeodéziai pontok, ha az Eötvös-inga mérési állomások sűrűsége a gradiens értékek durva változása miatt nem felel meg a függővonal-elhajlás interpoláció céljaira (a hálózaton belül a W_{Δ} és a W_{xy} értékek megváltozása több szomszédos pont között sem lineáris). Ráadásul, mivel az asztrogeodéziai ξ , η értékeket nem látták el terepi javításokkal, így a korrekciókkal ellátott gradiens értékek felhasználásával sem kaphattunk megfelelő eredményeket. Ezért ezeket a vizsgálatokat nem tekinthetjük lezártnak. Ha a későbbiekben Magyarország valamely Eötvös-ingával felmért területén nagyobb pontsűrűséggel is rendelkezésünkre fognak állni asztrogeodéziai pontok, ezt a vizsgálatot célszerű lenne elvégezni, hogy megtudjuk, milyen az interpoláció szempontjából az asztrogeodéziai kényszerpontok optimális sűrűsége.

6.4 A korrekciók kérdése

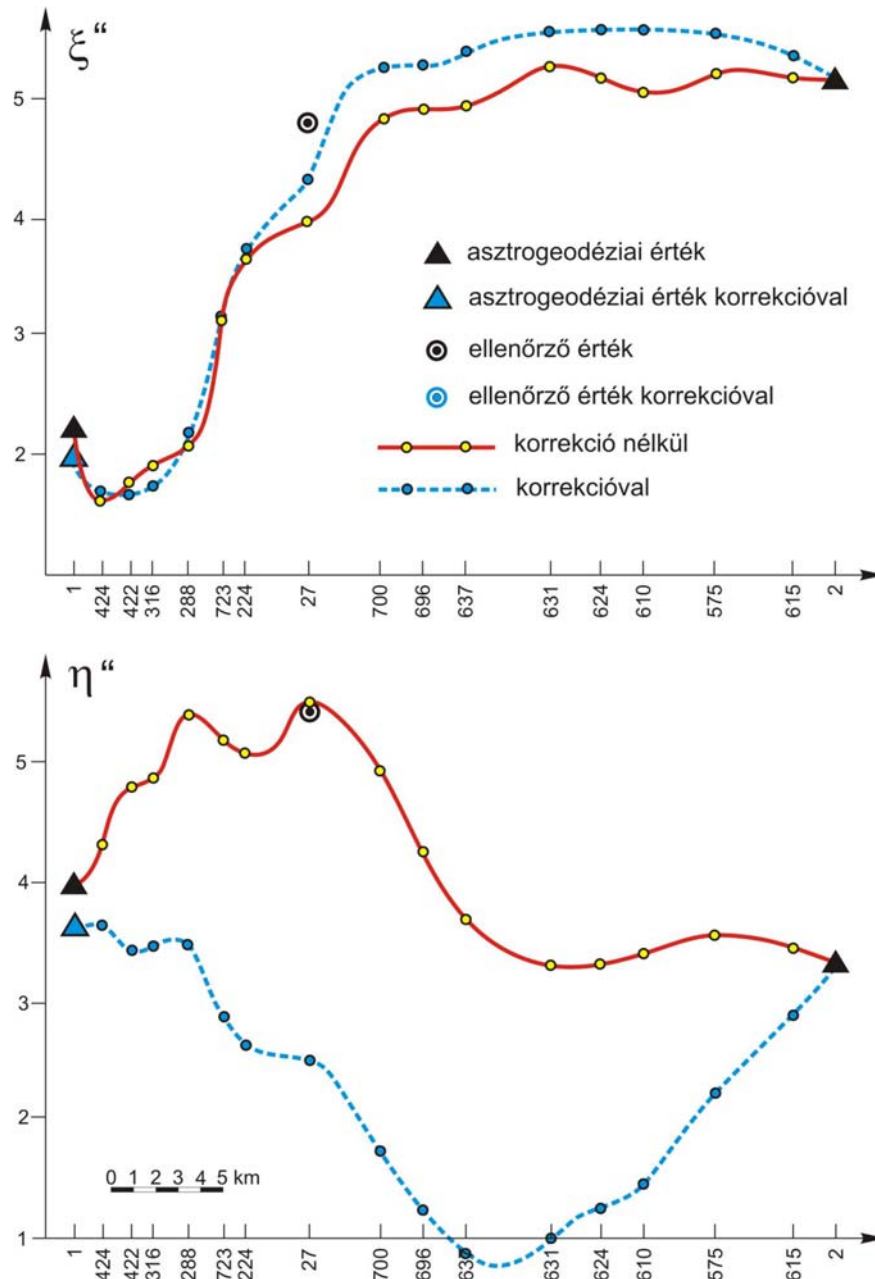
A szakirodalomban eddig ismertett számítások minden esetben az 5.3 fejezetben leírt korrekciók alkalmazásával előállított görbületi gradiensekből (a felszín alatti rendellenességekből) indultak ki. Ennek az oka, hogy az eddigi nézetek szerint a mérési pontok közvetlen környezetének domborzati hatását minden esetben korrekcióba kell venni, mivel ezzel a görbületi adatoknak az egyes pontok közötti megváltozása "simábbá" válik és ez jobban megfelel a (22) integrálközelítő formulában alkalmazott feltételezésnek, miszerint a második differenciálhányadosok két pont közötti megváltozásának lineárisnak kell lennie. Szerintem a korrekciók alkalmazásának ez az eddigi felfogása a geodéziában felülvizsgálatra szorul.

Mivel a függővonal-elhajlások – a vonatkozási ellipszoid megfelelő elhelyezése esetén – részben a felszínen látható topográfiai tömegektől, részben pedig a felszín alatt eltakart tömeg-egyenetlenségekből (sűrűség inhomogenitásoktól) származnak, ezért nyilvánvalóan attól függően célszerű az Eötvös-ingával mért görbületi gradienseket az 5.3 fejezetben ismertetett korrekciókkal ellátni, hogy az ezekből számított függővonal-elhajlás értékeket milyen célra kívánjuk felhasználni.

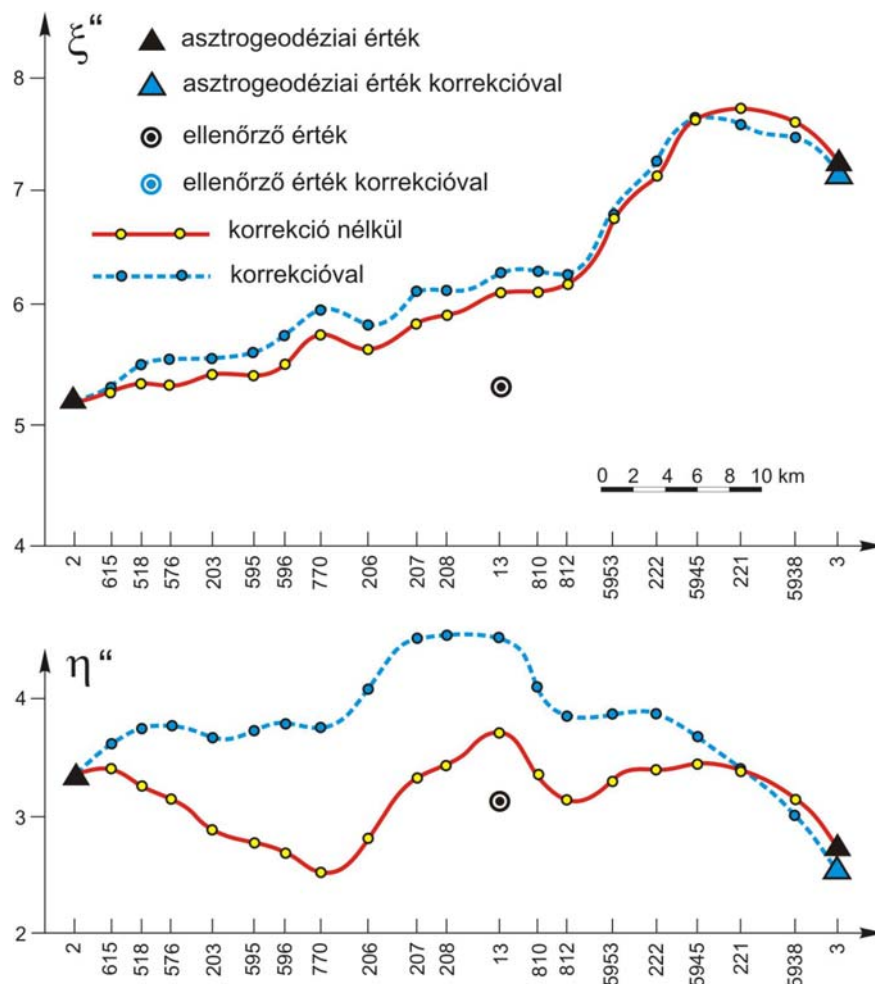
Ha például a függővonal-elhajlásokat bizonyos geofizikai (például szerkezetkutató) célokra szeretnénk használni, akkor nyilvánvalóan a görbületi adatoknak a (69), és a (70) összefüggéssel számítható értékeiből – azaz *Eötvös* elnevezésével a felszín alatti rendellenességekből – célszerű kiindulni, mivel a topográfiai tömegek úgyis csak feleslegesen zavarnák az általunk vizsgálni kívánt felszín alatti szerkezetek hatását. Ebben az esetben természetesen azt is figyelembe kell venni, hogy a felszíni domborzat hatása nem csupán az Eötvös-ingával mért görbületi adatokban, hanem az asztrogeodéziai pontokban meghatározott függővonal-elhajlás értékekben is tükröződik, ezért az Eötvös-inga mérési adatok mellett a függővonal-elhajlás összetevőket is el kell látni a megfelelő terepi korrekcióval.

Abban az esetben, amikor a függővonal-elhajlásokat geodéziai célokra kívánjuk felhasználni, a görbületi adatoknak a (67) és a (68) szerinti ún. topográfiai rendellenességeiből (a korrekció nélküli értékekből) kell kiindulni, mert csak így juthatunk a *földfelszíni* függővonal-elhajlás értékekre, amelyek megfelelnek a földrajzi helymeghatározás közvetlen eredményeiből nyert relatív függővonal-elhajlásoknak. – Amikor ugyanis geodéziai műszerekkel végzünk méréseket, a mérések minden esetben a műszerállásponton áthaladó szintfelülethez vannak kötve, mivel a helyes felállításkor a műszerek állótengelyét a helyi függőleges irányába állítjuk be. A helyi függőleges irány kialakításában viszont a felszínen látható tömegek éppen úgy szerepet játszanak, mint a felszín alatti tömegegyenetlenségek. Ezért, ha korrekcióval eltávolítjuk a felszíni domborzat hatását, akkor olyan "simított" ξ, η összetevőket nyerünk a számításokból, amelyek

nem a *valódi földfelszíni* függővonal-elhajlás összetevők, tehát általában geodéziai célokra (például a geoid részletes meghatározására) nem alkalmasak.

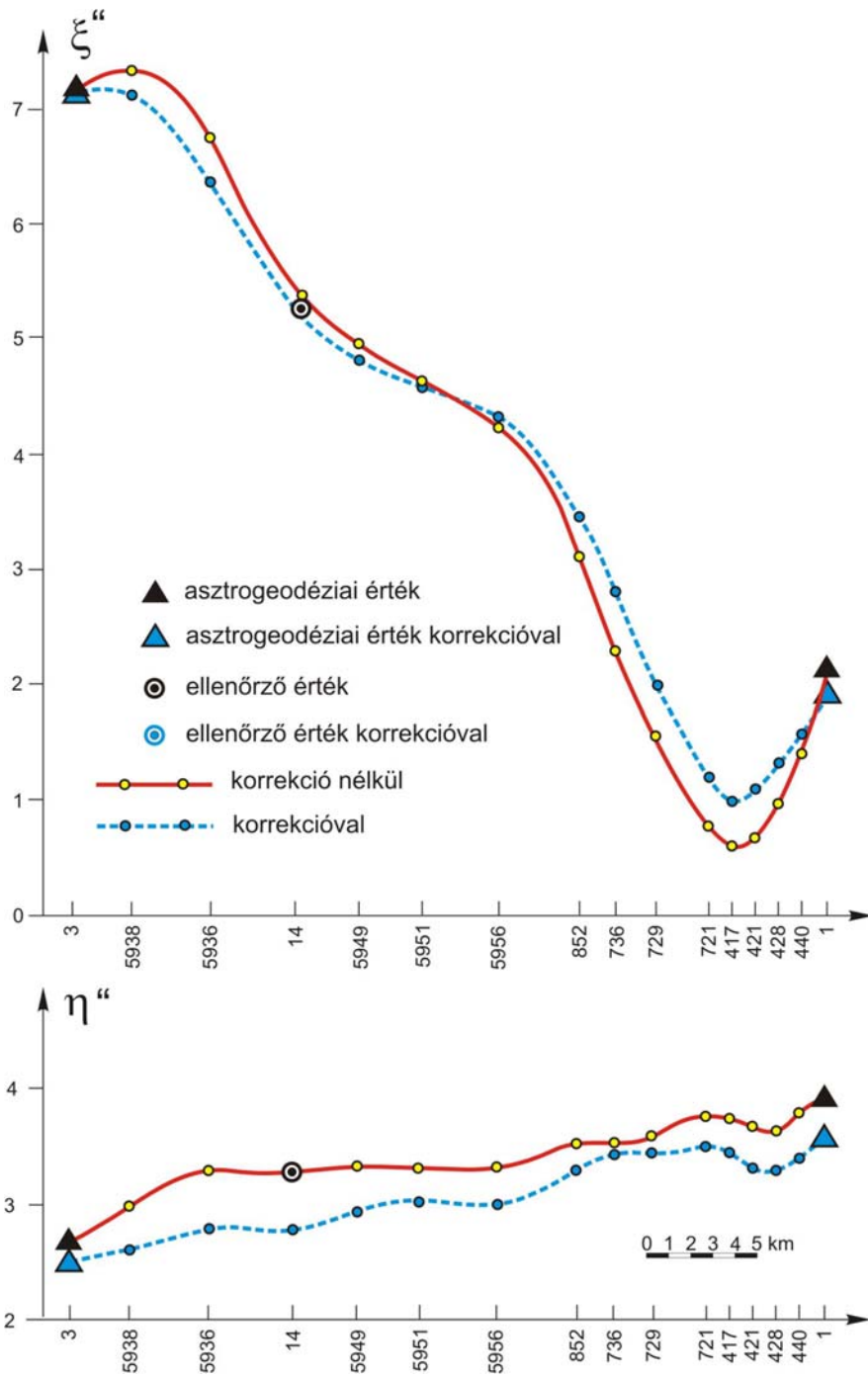


6-20. ábra. Az 1-2/AB láncolatra korrekcióval és korrekció nélkül számított értékek.



6-21. ábra. A 2-3/AB láncolatra korrekcióval és korrekció nélkül számított értékek.

A korrekciók kérdésének tisztázása céljából kísérleti számításokat is végeztem a Cegléd környéki teszt területen. A 6-3., 6-5. és a 6-7. ábrán korábban látható hálózatokban mind a korrekció nélküli, mind a topografikus korrekcióval ellátott Eötvös-inga mérések felhasználásával elvégeztem a függővonal-elhajlás számításokat. Természetesen az Eötvös-inga mérések adatai mellett az asztrigeodéziai és az ellenőrző pontokban ismert függővonal-elhajlás értékeket is ellátam a megfelelő terepi korrekciókkal.



6-22. ábra. A 3-1/AB láncolatra korrekcióval és korrekció nélkül számított értékek.

A számítások eredményeit a 6-20., 6-21. és a 6-22. ábrán láthatjuk, ahol a folytonos piros vonalak a korrekció nélküli, a szaggatott kék vonalak pedig a korrekcióval ellátott görbületi adatok felhasználásával interpolált függővonal-elhajlás összetevőket kötik össze. Az ábrákon sötét háromszögek a korrekció nélküli, a kék háromszögek pedig a terepi korrekcióval ellátott asztrogeodéziai ξ , η értékeket jelölik. Némely pontban (például az ellenőrző pontokban) a korrekció olyan kis mértékű volt, hogy a két érték az ábrázolási pontosságon belül egybeesett.

A 6-20., 6-21. és a 6-22. ábrán látható, hogy alapvetően a folytonos piros vonallal összekötött görbék közelítik meg jobban az ellenőrző pontokban megadott értékeket.

A számítások eredményeit a 6-8. táblázatban is összefoglaltam. A táblázatban feltüntettem, hogy a különböző hálózatok ellenőrző pontjaiban mekkora eltérések adódtak a korrekció nélküli, és a korrekcióval ellátott görbületi adatok felhasználásával számított, és az ismert ξ , η értékek között.

6-8. táblázat. A korrekcióval és a korrekció nélkül számított értékek összehasonlítása.

Hálózat jele	Ellenőrző pont	korrekció nélkül		korrekcióval	
		"	"	"	"
1-2/AB	27	-0.81	+0.11	-0.50	-2.92
2-3/AB	13	+0.80	+0.58	+0.99	+1.44
3-1/AB	14	+0.22	-0.03	+0.01	-0.50
Gauss-féle középhiba:		0.67	0.34	0.64	1.90
		0.53		1.42	

A táblázat adatai, valamint a 6-20., 6-21. és a 6-22. ábrákon szemléltetett eredmények alapján megállapítható, hogy a topografikus korrekcióval ellátott Eötvös-inga mérési eredmények felhasználásával két kivételtől eltekintve nem csökkent, hanem inkább jelentősen megnőtt az interpolált értékek hibája. Ebből arra következtethetünk, hogy a Cegléd környéki teszt területünkhöz hasonló jellegű síkvidéki vagy enyhén dombvidéki területeken célszerűbb a korrekció nélküli Eötvös-inga mérési adatokat felhasználni az interpoláció céljára.

A kapott eredmények alapján tehát kijelenthetjük, hogy az interpolációs hálózatok pontjai között a görbületi adatok linearitását – és ezen keresztül a kevésbé sík (de nem hegyvidéki) területeken az interpoláció megfelelő pontosságát – nem elsősorban a görbületi gradiensek topográfiai korrekciójával, hanem inkább az interpolációs hálózatokon belül az *alkalmas pontsűrűség biztosításával* lehet elérni.

Egészen más a helyzet hegyvidéki területeken, ahol nem állnak rendelkezésre megfelelő pontsűrűséggel Eötvös-inga mérési eredmények. Ha ebben az esetben is a görbületi adatok alapján kívánunk geodéziai céllal függővonal-elhajlás értékeket interpolálni, akkor kevés más lehetőségünk marad a megfelelő pontosság elérésére, mint a korrekciók alkalmazása. A korrekciók számítását azonban az eddigi gyakorlattal ellentétben más logikával, több lépésben célszerű elvégezni.

Az első lépés természetesen az Eötvös-inga mérések ellátása a megfelelő terepi korrekciókkal abból a célból, hogy a görbületi gradiensek megváltozása az interpolációs hálózat szomszédos pontjai között lehetőleg lineáris legyen. A második lépés az asztrogeodéziai pontok ismert függővonal-elhajlás értékeinek javítása. Ebben a lépésben ki kell számítani, hogy a ξ , η összetevők értékében mekkora részt tesz ki az asztrogeodéziai pontok környezetében a látható felszíni domborzat hatása. Azaz a felszín alatt homogén sűrűségeloszlást feltételezve ki kell számítani a függővonal-elhajlás összetevők nagyságát a felszíni látható tömegek alapján, és ezeket az értékeket ki kell vonni az asztrogeodéziai úton meghatározott ξ , η értékekből. A harmadik lépés a függővonal-elhajlás interpoláció a fent előkészített adatokkal. Ekkor olyan ξ , η értékeket kapunk eredményül, amelyek nem tartalmazzák a felszíni látható tömegek hatását; tehát az így interpolált értékek nem a geodéziában szükséges valódi földfelszíni függővonal-elhajlások lesznek, – amelyek például a részletes geoid-meghatározás céljára szükségesek – hanem csupán a valódi értékeknek többé-kevésbé jobb vagy rosszabb közelítései. (Mellesleg ezek az interpolált értékek

is használhatók más egyéb célokra, például a geofizikában a felszín alatt eltakart szerkezetek kutatására.)

Ha a *valódi földfelszíni* függővonal-elhajlás értékekre van szükségünk, akkor egy további - eddig senki által nem alkalmazott - negyedik lépést is el kell végeznünk: meg kell minden pontra határoznunk a pont környezetében a látható felszíni tömegek által okozott függővonal-elhajlás összetevők értékét, és ezt hozzá kell adni az Eötvös-inga mérések alapján interpolált értékekhez. Függővonal-elhajlások a felszíni látható tömegekből egyszerűen számíthatók (BIRÓ 1975), ráadásul ennek a lépésnek a végrehajtása alig jelent többlet munkát, hiszen az Eötvös-inga mérések terepi korrekciójának számításával egyidőben, ugyanazon terepmodell felhasználásával végezhető el.

Ez utóbbi lépéssel kapcsolatosan az elkövetkező időkben próbaszámítások elvégzését tartom szükségesnek.

7. A GEOID MEGHATÁROZÁSA

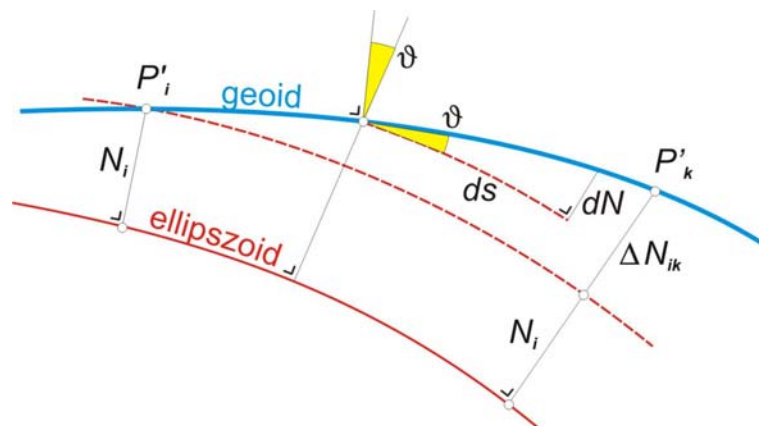
Napjainkban a korszerű földfelszíni és kozmikus geodéziai mérések lehetővé teszik a Föld elméleti alakjának, a geoidnak az egész földi kiterjedésben néhány méteres megbízhatóságú meghatározását. Ezek a globális geoidformák azonban nem tartalmazzák a geoid "finomszerkezetét", pedig különböző gyakorlati geodéziai célokra – például a GPS technika alkalmazása területén – igen nagy szükségünk van a geoidmagasságok minél pontosabb ismeretére. Az Eötvös-inga mérések alapján interpolált függővonal-elhajlások sűrű hálózata kiváló lehetőséget nyújt a geoid formáinak igen részletes meghatározására.

7.1 A csillagászati szintezés alapelve

A geoidundulációk és a függővonal-elhajlás értékek két pont közötti megváltozásának kapcsolatára egyszerű matematikai összefüggés írható fel. A 7-1. ábra jelöléseinek megfelelően

$$dN = \vartheta ds$$

ahol ϑ a *Pizetti*-féle függővonal-elhajlás valamely tetszőleges α azimutban.



7-1. ábra. A csillagászati szintezés alapelve

Valamely két tetszőleges P_i és P_k pont között a geoidmagasság megváltozása:

$$\Delta N_{ik} = \int_{P_i}^{P_k} \mathcal{G}(s) ds .$$

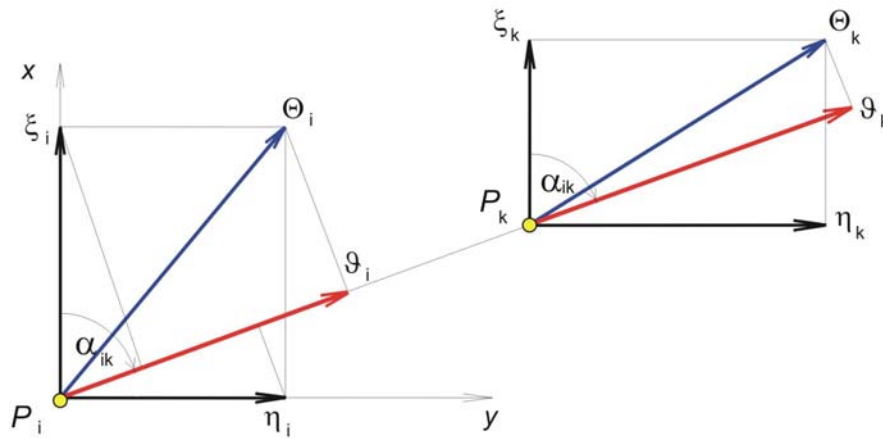
Mivel a 7-2. ábra jelöléseinek megfelelően

$$\mathcal{G} = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

ezért

$$\Delta N_{i,i+1} = \int_{P_i}^{P_k} (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) ds , \quad (76)$$

ahol α a két pontot összekötő s hosszúságú vonal azimutja.



7-2 ábra. Függővonal-elhajlás meghatározása tetszőleges α azimutban

A (76)-ban szereplő vonalintegrál analitikus kiszámításához ismerni kellene a függővonal-elhajlás összetevők két pont közötti *függvényét*. Ennek hiányában a feladatot numerikus integrálással oldhatjuk meg, vagyis a (76) integrált a

$$\Delta N_{ik} = \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin \alpha_{ik} \right) s_{ik} \quad (77)$$

közelítő képlettel helyettesíthetjük. A (77) összefüggés alkalmazhatóságának feltétele, hogy két pont között a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők megváltozása lineárisnak tekinthető legyen. Ehhez viszont a függővonal-elhajlás értékek megfelelően sűrű hálózata szükséges, ami az Eötvös-inga mérések alapján interpolációval előállítható.

7.2 A csillagászati szintezés hagyományos számítási módszere

Az eddigi gyakorlat szerint csillagászati szintezéssel nagyobb területre geoidképet úgy határozunk meg, hogy először megfelelő sűrűségű hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjaiban (gyakorlatilag négyzethálózat sarokpontjaiban) meghatározzuk a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők értékét. Ezt követően a szélességi vonalak mentén a η összetevők-, a hosszúsági vonalak mentén pedig a ξ összetevők felhasználásával geoid metszeteket számolunk. A (77) összefüggés alapján É-D irányban $\alpha_{ik} = 0^\circ$ azimuth esetén a

$$\Delta N_{ik}^{\acute{E}-D} = \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \right) s_{ik} \quad ,$$

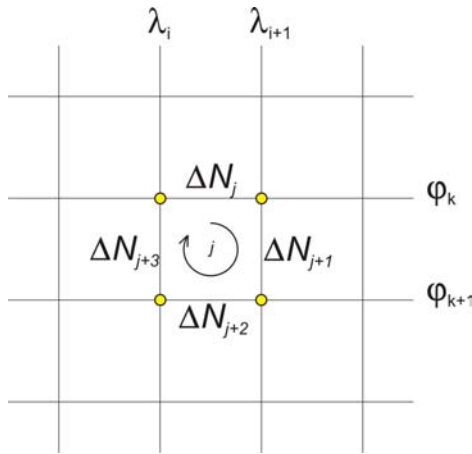
K-Ny irányú metszetben $\alpha_{ik} = 90^\circ$ azimut esetén pedig a

$$\Delta N_{ik}^{K-Ny} = \left(\frac{\eta_i + \eta_k}{2} \right) s_{ik}$$

összefüggés felhasználásával határozzuk meg a szomszédos pontok közötti geoid-ellipszoid távolság változásokat. Miután kiszámítottuk az É-D és a K-Ny irányú geoid-metszeteket, a ΔN értékeket az egyes négyszögeken körbe haladva és összegezve zérust kellene kapnunk, vagyis a 7-3. ábra jelöléseinek megfelelően valamely tetszőleges j –edik négyszög oldalaira teljesülni kellene a

$$\Delta N_j^{Ny \rightarrow K} + \Delta N_{j+1}^{\acute{E} \rightarrow D} + \Delta N_{j+2}^{K \rightarrow Ny} + \Delta N_{j+3}^{D \rightarrow \acute{E}} = 0 \quad (78)$$

összefüggésnek.



7-3. ábra. A ΔN értékek összegezése tetszőleges négyszögre

Mivel a valóságban a (78) feltétel nem teljesül, az adódó záróhibákat a szintezési hálózatokhoz hasonló módon kezelni kell. Ennek megfelelően a következő lépésben a közvetlen mérések kiegyenlítési módszerét alkalmazva kiegyenlítjük a „magassági hálózatunkat”, majd az így meghatározott ΔN értékeket valamely előzetesen kiválasztott P_0 kezdőponttól összegezve megkapjuk a rácspontok végleges geoid-ellipszoid távolságait a kiindulópont N_0 értékéhez viszonyítva. Természetesen a kiindulópont N_0 értékét csillagászati szintezéssel meghatározni nem lehet, ezt önkényesen fel kell venni, vagy más módszerrel, pl. a *Stokes-integrállal* kell meghatározni.

7.3 A geoidmagasságok közvetlen számítása.

Esetünkben az Eötvös-inga mérések alapján interpolált függővonal-elhajlásokat felhasználva a csillagászati szintezés hagyományos módszerének alkalmazása során két alapvető probléma is jelentősen leronthatja a számított geoidmagasságok pontosságát.

Egyrészt a 6.3 fejezetben láthattuk, hogy a nagyobb összefüggő területekre akkor adódnak a legpontosabb ξ és η függővonal-elhajlás összetevő értékek, amikor az interpolációt közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontokra végezzük, és igen kedvezőtlen eredmények adódtak a *Renner*-féle módszer esetében, amikor a ξ , η értékeket szabályos négyzetháló sarokpontjaiban számítottuk. Pontosán ugyanezen okok miatt várható jelentős pontosságcsökkenés abban az esetben is, amikor a csillagászati szintezés hagyományos számításához négyzetháló sarokpontjaira interpoláljuk az eredetileg az Eötvös-inga mérési állomásokra meghatározott függővonal-elhajlás összetevőket. A másik probléma a csillagászati szintezés hagyományos számítása esetében abból adódik, hogy közvetlenül az N értékek alkalmazása helyett a ΔN különbségek választásával főlegesen sok ismeretlent kell kezelnünk a kiegyenlítés során (VÖLGYESI 1998).

Mindkét probléma egyszerűen kiküszöbölhető, ha szakítva az eddigi hagyománnyal a csillagászati szintezést nem a szokásos úton végezzük, azaz nem négyzetháló sarokpontjai között számolunk É-D és K-Ny irányú metszetek mentén ΔN változásokat, hanem *magukon az Eötvös-inga mérési állomásokon határozzuk meg közvetlenül az N értékeket.*

Alakítsuk át ehhez a (77) összefüggést a

$$\Delta N_{ik} = N_k - N_i$$

helyettesítéssel:

$$N_k - N_i = \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin \alpha_{ik} \right) s_{ik} . \quad (79)$$

Ezzel jelentősen le tudjuk csökkenteni az ismeretlenek számát, ugyanis az oldalanként egy ismeretlen ΔN helyett pontonként lesz egy N ismeretlenünk. (Tetszőleges hálózatban a pontok száma jóval kisebb az oldalak számánál, mivel a klasszikus háromszögelési elv szerint a meglévő hálózathoz minden új pont két oldallal csatlakozik.) További előnye ennek a megoldásnak, hogy a négyszögekre (itt most háromszögekre) nem kell a (78) kényszerfeltételt

felírni, mivel a felállított közvetítőegyenletek már tartalmazzák ezt. Amennyiben az interpolációs hálózat m számú pontot tartalmaz ismert geoidmagasság értékkel, akkor az ezekre felírható kényszerfeltételekkel tovább csökkenthető az ismeretlenek száma, és a normálegyenletek mátrixának mérete.

Vizsgáljuk meg ezek után, hogyan oldható meg a csillagászati szintezés olyan tetszőleges hálózat esetében, amelyben az egyértelmű megoldáshoz szükséges egyetlen pontnál több pont adott, ahol ismerjük a geoid-ellipszoid távolság értékét. Ekkor az ismeretlen N értékeket kiegyenlítéssel határozzuk meg. Az Eötvös-inga mérésekből számított ismert ξ, η értékek, valamint az ismeretlen N geoidmagasságok közötti kapcsolatot a (79) összefüggés adja meg, amelyben vezessük be a

$$C_{ik} = \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin \alpha_{ik} \right) s_{ik} \quad (80)$$

jelölést. Hasonlóan a 2.4 fejezetben tárgyalt esethez itt is felmerül a kérdés, hogy a kiegyenlítés szempontjából mely adatokat tekintjük mérési eredményeknek: a tényleges ξ, η függővonal-elhajlásokat, vagy a tetszőleges $P_i P_k$ háromszögoldalra (80) szerint előállítható C_{ik} állandó értékeket? Mivel olyan egyszerű függvénykapcsolat (közvetítőegyenlet) itt sem írható fel, amelynek egyik oldalán egy mérési eredmény, a másikon pedig az ismeretlenek szerepelnek, ezért a számítást most is a közvetlen mérések kiegyenlítése feltételekkel és nem mért ismeretlenekkel (V. kiegyenlítési csoport) szerint kellene elvégezni. A 2.4 fejezetben átgondolt okok miatt most is a mérési eredmények tekintetében két közelítéssel élünk: egyrészt *az adott geoid-ellipszoid távolságokat hibátlanoknak tekintjük és nem látjuk el javítással* - tehát ezeket kényszerként visszük a kiegyenlítésbe - másrészt pedig a (79) alapegyenletünk bal oldalán szereplő C_{ik} mennyiségeket *tekintjük fiktív mérési eredményeknek és látjuk el v_{ik} javítással*. Így a (79) közvetítőegyenlet a

$$C_{ik} + v_{ik} = N_k - N_i \quad (81)$$

formában írható, és ezzel a számítást a közvetett mérések kiegyenlítése az ismeretlenek között megadott feltételekkel (IV. kiegyenlítési csoport) szerint végezhetjük.

Így minden egyes háromszögoldalra felírható a (80) alapján képzett

$$v_{ik} = N_k - N_i - C_{ik} \quad (82)$$

javítási egyenlet. Mátrixos írásmódban:

$$\underset{(m,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(m,n)}{\mathbf{A}} \underset{(n,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(m,1)}{\mathbf{I}}$$

ahol \mathbf{A} a javítási egyenletek együtthatómátrixa, \mathbf{x} az N ismeretleneket tartalmazó vektor, \mathbf{I} a tisztatagok vektora, m a hálózat oldalainak száma, n pedig a pontok száma. Az \mathbf{A} mátrix tetszőleges i -edik sora rendkívül egyszerűen alakul:

$$\left[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ +1 \ \dots \ -1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \right], \quad (83)$$

az \mathbf{I} tisztatag vektor elemei pedig a C_{ik} értékek.

A kiegyenlítés során most is felmerül a súlyozás kérdése. Fentebb azzal a közelítéssel éltünk, hogy a közvetlen függővonal-elhajlás összetevők helyett az ezekből előállított fiktív mérési eredményeket választottunk kiindulásul. Fiktív mérési eredményeket azonban csak bizonyos feltételek teljesülése esetén alkalmazhatunk. A legfontosabb feltétel, hogy a fiktív mérési eredmények kovariancia mátrixa a hibaterjedés törvényéből levezethető legyen. Ehhez viszont szükséges a fiktív mérési eredményeket előállító összefüggés, - amit a mi esetünkben a (80) egyenlet ad meg. A (80) jobb oldalán álló mennyiségek közül a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők tekinthetők hibásaknak. Ezek megbízhatósága viszont közel egyenlő ($\pm 0.6''$), továbbá egymástól független mennyiségeknek tekinthetők, tehát a $\mathbf{Q}_{\xi\eta}$ súlykoefficiens mátrixuk egységmátrix lesz. A $\mathbf{Q}_{\xi\eta}$ ismeretében a fiktív C_{ik} mérések \mathbf{Q}_{CC} súlykoefficiens mátrixa (DETREKŐI 1991) szerint:

$$\mathbf{Q}_{CC} = \mathbf{F}^* \mathbf{Q}_{\xi\eta} \mathbf{F} = \mathbf{F}^* \mathbf{F}$$

mivel $\mathbf{Q}_{\xi\eta} = \mathbf{E}$ egységmátrix. Az \mathbf{F}^* mátrix tetszőleges i -edik sorának elemei:

$$\left[\left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial \xi} \right)_1 \left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial \xi} \right)_2, \dots, \left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial \xi} \right)_n \left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial \eta} \right)_1 \left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial \eta} \right)_2, \dots, \left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial \eta} \right)_n \right]$$

A további vizsgálatokhoz állítsuk elő az \mathbf{F}^* mátrix első (a P_1P_2 pontok közötti oldalra vonatkozó) \mathbf{f}_1^* és második (a P_1P_3 pontok közötti oldalra vonatkozó) \mathbf{f}_2^* sorát:

$$\mathbf{f}_1^* = \left[\frac{s_{12}}{2} (\cos \alpha_{12}, \cos \alpha_{12}, 0, 0, \dots, 0, \sin \alpha_{12}, \sin \alpha_{12}, 0, 0, \dots, 0,) \right]$$

és

$$\mathbf{f}_2^* = \left[\frac{s_{13}}{2} (\cos \alpha_{13}, 0, \cos \alpha_{13}, 0, \dots, 0, \sin \alpha_{13}, 0, \sin \alpha_{13}, 0, \dots, 0,) \right].$$

Az \mathbf{f}_1^* segítségével a P_1P_2 oldalra vonatkozó C érték varianciája:

$$m^2 = \frac{s_{12}^2}{4} (2 \sin^2 \alpha_{12} + 2 \cos^2 \alpha_{12}) = \frac{s_{12}^2}{2}$$

valamint az \mathbf{f}_1^* és az \mathbf{f}_2^* segítségével a P_1P_2 és a P_1P_3 oldalakra vonatkozó C értékek kovarianciája:

$$\text{cov} = \frac{s_{12}s_{13}}{4} (\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{13} + \cos \alpha_{12} \cos \alpha_{13}) .$$

Megállapítható tehát, hogy a fiktív mérési eredmények korreláltak, és a súlykoefficiens mátrix ott tartalmaz kovariancia elemeket, ahol két oldal közös pontban csatlakozik.

Szükség esetén a súlymátrix ezen súlykoefficiens mátrix invertálásával állítható elő. A gyakorlatban azonban két közelítéssel élhetünk: egyrészt a C

fiktív mérési eredményeket függetleneknek tekintjük egymástól, ezért a súlymátrix diagonálmátrix; másrészt a fiktív mérési eredmények súlyát a távolság négyzetével fordított arányban vesszük fel.

Független méréseket feltételezve a második közelítés az invertálásból is adódik, mivel a súlykoefficiens mátrix főátlójában az oldalhosszak négyzetével arányos tagok állnak. Az elhanyagolást azonban a számítási egyszerűsítésen kívül az is indokolja, hogy az ellentmondásokat nem annyira a mérési hibák, mint inkább a funkcionális modell számítási hibái okozzák.

7.4 A kísérleti számítások eredményei.

A Cegléd környéki teszt területen az interpolált függővonal-elhajlások felhasználásával a geoidképet is meghatároztam. A kísérleti számítások célja annak tisztázása volt, hogy a csillagászati szintezés négyzethálózat sarokpontjaira alkalmazott hagyományos számítási módszere, vagy az általam javasolt közvetlen számítási módszer szolgáltatja-e a pontosabb megoldást. A teszt terület három-három kiinduló és ellenőrző pontjában álltak rendelkezésre a geoid-ellipszoid távolság értékek. Ezek közül az 1, 2 és a 3 pontban adott értékek rögzített kényszerként, a 13, 14 és a 27 pontok pedig a számított értékek ellenőrzésére szolgáltak. A számítási eredmények a 7-1. táblázatban láthatók összefoglalva. A táblázat második oszlopában az ellenőrző N geoidmagasságok láthatók, a harmadik-negyedik oszlopban a hagyományos módszerrel hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjaiban számított N_h értékek és ezek eltérése az adott N értékektől, az ötödik-hatodik oszlopban pedig magukon az Eötvös-inga mérési állomásokon közvetlenül meghatározott N_k értékek és ezek eltérése látható az ellenőrző pontokon ismert N értékektől.

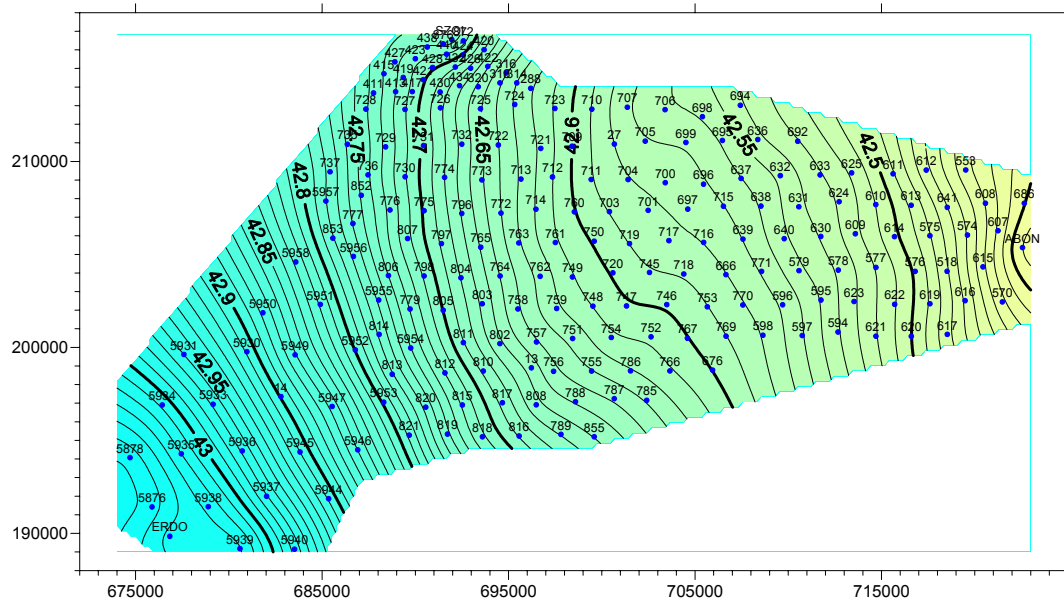
A táblázat adatai alapján megállapítható, hogy az adott teszt területen az általam javasolt módszerrel közvetlenül az Eötvös-inga mérési állomásokon a

csillagászati szintezéssel számított geoidmagasságok lényegesen jobban megközelítették az ellenőrző értékeket, mint a hagyományos módszerrel hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjaiban számított N értékek. A hagyományos módszerrel ± 13 cm-es, a közvetlenül a mérési pontokon számított módszerrel viszont mindössze ± 4 cm-es középhiba adódott.

7-1. táblázat. A hagyományos és a közvetlen számítás összehasonlítása.

Ellenőrző pontok	Ellenőrző érték N [m]	Hagyományos módszer N_h [m]	Eltérés $(N_h - N)$ [m]	Közvetlen számítás N_k [m]	Eltérés $(N_k - N)$ [m]
13	42.72	42.80	0.08	42.66	-0.06
14	42.85	43.00	0.15	42.90	0.05
27	42.58	42.74	0.16	42.58	0.00
			± 0.13		± 0.04

A 7-4. ábrán a teszt területen közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontokra csillagászati szintezéssel meghatározott geoid képét láthatjuk.



7-4. ábra. A Cegléd környéki teszt terület geoid képe.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az Eötvös-inga mérések alapján sűrített függővonal-elhajlások felhasználásával igen pontos geoidtérképek készíthetők. Ez a geoidkép azonban *relatív*, mivel a geoidformák alakulása függ az alapfelületként használt ellipszoid méretétől, alakjától és elhelyezésétől (a kezdőpontban felvett N_0 értéktől). Ezért az így meghatározott geoid csak abban az esetben illeszthető más geoidtérképekhez, ha a geoidmagasságok és a függővonal-elhajlások ugyanarra az alapfelületre és ugyanarra az elhelyezésre vonatkoznak. Az egymástól függetlenül (önálló rendszerben) készült, de egymást részben átfedő geoidtérképek összedolgozására megfelelő gyakorlati módszerek állnak rendelkezésre. Ezt azonban nem vizsgáltam, mivel a geoid meghatározásával csak olyan mértékig kívántam foglalkozni, hogy megmutassam az általam interpolált függővonal-elhajlások egy lehetséges gyakorlati alkalmazását. A geoid ilyen módon történő meghatározása természetesen további részletes vizsgálatokat igényel, azonban az már az eddigiek alapján is megállapítható, hogy a geoid helyi részleteinek ilyen gazdaságos és ilyen pontosságú meghatározására egyelőre nincs más lehetőségünk.

ÖSSZEFOGLALÁS

Az értekezés első részében az Eötvös-inga mérések felhasználásával végezhető függővonal-elhajlás interpoláció alapelvét ismerttettem, majd az ezt követő részben az interpolációs eljárás lehetséges gyakorlati megoldási módszereit tekintettük át.

Az interpoláció gyakorlati megoldásai két fő csoportba sorolhatók: az egyik csoportban a függővonal-elhajlás összetevők két pont közötti $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ különbségét választjuk ismeretleneknek, a másik csoportban maguk a pontbeli ξ , η értékek a meghatározandó ismeretlenek. Az első csoportba tartoznak Eötvös eredeti módszere, a Renner-féle módszer és a fokozatos kiküszöböléssel végezhető megoldási eljárás; míg a második csoportba a korszerű számítástechnika igényeinek jobban megfelelő ortogonalizációs megoldási eljárás tartozik.

A gyakorlati számítások céljára olyan szoftvert fejlesztettem ki, mely Eötvös-inga mérések felhasználásával akár láncolat mentén, akár tetszőleges területet beborító hálózatokra, bármely interpolációs módszerrel képes meghatározni a függővonal-elhajlás értékeket, ki tudja rajzolni az interpolációs hálózatot és az interpolált függővonal-elhajlások vektorábráját, csillagászati szintezéssel ki tudja számítani a geoid-ellipszoid távolságokat, és meg tudja rajzolni a kérdéses területre a geoid akár perspektív, akár szintvonalas térképét.

Kísérleti számításaimat főként a Cegléd környéki, mintegy 1200 km² kiterjedésű, Eötvös-ingával részletesen felmért területen hajtottam végre, de végeztem teszt számításokat a németországi Harz-hegység északi szélén található hegyvidéki területen is. A Cegléd környéki teszt területen mind a terepviszonyok, mind az Eötvös-inga mérési állomások és mind az asztrogeodéziai pontok sűrűsége megfelelnek az átlagos magyarországi síkvidéki viszonyoknak; ráadásul a számítások ellenőrzésére is lehetőségem volt, mivel az ellenőrzés

céljából a rendelkezésekre álltak asztrogeodéziai, illetve asztrogravimetriai adatok.

Kísérleti számításaim során először az interpoláció különböző gyakorlati megoldási módszereit hasonlítottam össze. Először is megállapítottam, hogy a hagyományos *Eötvös*-, és *Renner*-féle megoldási eljárás alkalmazása nem célszerű, mivel a használatuk során jelentős többletmunkát végzünk azzal, hogy valamely a pontból álló interpolációs hálózat esetén a feltétlenül szükséges $2n-2$ számú meghatározandó $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ismeretlen függővonal-elhajlás összetevő helyett $4n-6$ ismeretlen értékkel dolgozunk. Ez pedig nagyobb méretű hálózatok esetén, a számítások során mindenképpen fellépő kerekítési hibák halmozódása következtében rontja a megoldás pontosságát. Ugyancsak kedvezőtlen tapasztalatokat szereztem a fokozatos kiküszöbölés módszerének alkalmazása terén is, ugyanis összehasonlítva a módszert más interpolációs módszerekkel, a számítások során bebizonyosodott, hogy a fokozatos kiküszöböléssel meghatározott függővonal-elhajlás értékeket közel kétszeres nagyságú hiba terheli. Az interpoláció gyakorlati megoldásai közül legelőnyösebb azoknak a megoldási eljárásoknak a használata, amelyek a függővonal-elhajlás összetevők két pont közötti $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ különbsége helyett közvetlenül a pontbeli ξ , η értékeket választják ismeretleneknek, és számítják ki. Kísérleti számításaimban a legkedvezőbb tapasztalatokat a mátrix-ortogonalizációs eljárás gyakorlati alkalmazása során szereztem.

Vizsgálataim során arra is megpróbáltam választ kapni, hogy megfelelő súlyozás bevezetésével növelhető-e az interpolált függővonal-elhajlás értékek pontossága. Számításaimat elemezve megállapítható, hogy ha az *Eötvös*-inga mérések alapján levezetett fiktív mérési eredményeket az interpolációs pontok közötti távolság négyzetével fordított arányú súlyokkal látjuk el, akkor kismértékben javítható az interpolált értékek pontossága. A Cegléd környéki teszt területen a fenti súlyozás alkalmazásával az interpolált értékek pontossága $0.08''$ értékkel (13%-kal) javult.

Vizsgálataim egyik fontos célja többek között az interpolációs hálózatok optimális geometriai elrendezésének meghatározása volt. Kísérleti számításaim eredményei azt mutatják, hogy az interpolációs pontok legkedvezőtlenebb geometriai elrendezése az asztrogeodéziai pontok közötti egyedüli láncolatok kialakítása. Különösképpen kedvezőtlen a fokozatos közelítés módszere esetében az olyan egyszeres láncolatok kialakítása, melyek kezdő és végpontját összekötő egyenes azimutja 0° (180°), vagy 90° (270°) közelében van. Az ellenőrző pontokban ismert függővonal-elhajlás értékekhez legközelebb álló interpolált értékeket a kettős (dupla) láncolatok mentén számolva kaptam. Ekkor az interpolált függővonal-elhajlások középhibája az ellenőrző pontokban ismert értékek alapján $\pm 0.53''$ értéknek adódott. A Cegléd környéki teszt területen a legrosszabb eredményeket az interpolációs pontok *Renner*-féle geometriai elrendezése szolgáltatta. Vizsgálataim szerint ennek két fő oka volt: egyrészt a terület minden részére nem használható ugyanaz a rácstávolság, mivel így a "zavartabb" területrészekben a szomszédos pontok között a ΔW_Δ és a ΔW_{xy} gradiensek megváltozása közelítőleg sem lesz lineáris; másrészt mivel a négyzetes rácsháló pontjaira az Eötvös-inga mérési eredményeket interpolálni kell, ezért az így meghatározott görbületi gradiensek – különösen a "zavartabb" területrészekben – jelentősen eltérhetnek a tényleges értékektől. A két hibaforrás kiküszöböléséhez célszerű az interpolációs hálózat pontjait az Eötvös-inga mérési állomások helyén (zavartabb területrészekben az ingamérések pontsűrűségének megfelelően) nagyobb pontsűrűséggel felvenni, és az interpolációt a szabályos négyzetes rácshálózat helyett tetszőleges hálózatra elvégezni. A Cegléd környéki területen ilyen interpolációs hálózat kialakításával az ellenőrző pontokban adódó eltérések alapján számított $m = \pm 0.60''$ illetve az $m = \pm 0.65''$ nagyságú középhibák azt igazolják, hogy az interpolációs hálózat megfelelő geometriai kialakítása esetén nagyobb összefüggő területre is számíthatók elfogadható pontosságú ξ , η értékek.

Természetesen arra vonatkozóan is végeztem vizsgálatokat, hogy valamely adott interpolációs hálózat esetén az ismert ξ , η értékekkel rendelkező asztrogeodéziai kényszerpontok számának növelésével lehetséges-e az inter-

polált függővonal-elhajlás értékek hibájának csökkentése. Ezzel kapcsolatosan az asztrogeodéziai pontok kellően sűrű hálózata miatt az említett németországi teszt területen próbálkoztam kísérleti számításokkal. Sajnos azonban ezekből az eredményekből általánosítható következtetéseket nem tudtam levonni, mivel a szóban lévő területen a rendelkezésemre álló adatok nem feleltek meg minden tekintetben a követelményeknek.

Végül az interpolációs célokra felhasznált ingamérések terepi korrekciójának kérdését próbáltam tisztázni. Az eddigi felfogás szerint az Eötvös-inga méréseket minden esetben terepi korrekcióval kell ellátni abból a célból, hogy az interpolációban felhasznált görbületi gradiensek két pont közötti megváltozását a lehetőségekhez képest minél jobban kisimítsuk (linearizáljuk). Mivel a függővonal-elhajlások – a vonatkozási ellipszoid megfelelő elhelyezése esetén – részben a felszíni látható topográfiai tömegektől, részben pedig a felszín alatt eltakart tömegegyenetlenségektől származnak, ezért az Eötvös-inga méréseket annak függvényében célszerű terepi korrekciókkal ellátni, hogy az ezekből számított függővonal-elhajlás értékeket milyen célokra kívánjuk felhasználni. A függővonal-elhajlások geodéziai alkalmazása esetén a topográfiai korrekció nélküli görbületi gradiensekből célszerű kiindulni, mert csak így juthatunk a *földfelszíni* függővonal-elhajlás értékekre, melyek megfelelnek a földrajzi helymeghatározások közvetlen eredményeiből nyert relatív függővonal-elhajlásoknak. A kísérleti számításaim is ezt támasztják alá, hiszen a Cegléd környéki teszt területen a topografikus korrekcióval ellátott Eötvös-inga mérési eredmények felhasználásával interpolált értékek $\pm 1.42''$ nagyságú középhibája lényegesen magasabb, mint a korrekció nélkül számított értékek $\pm 0.53''$ középhibája. A kapott eredmények alapján kijelenthetjük, hogy a Cegléd környéki teszt területéhez hasonló jellegű síkvidéki, vagy enyhén dombvidéki területeken az interpolációs hálózatok pontjai között a görbületi adatok linearitását – és ezen keresztül az interpoláció megfelelő pontosságát – nem elsősorban a görbületi adatok topográfiai korrekciójával, hanem inkább az interpolációs hálózaton belül az alkalmas pontsűrűség biztosításával lehet elérni. Természetesen tagoltabb topográfijú területeken alkalmazhatjuk a topográfiai korrekciót a görbületi adatok simítására, azonban ebben az esetben – ha a *földfelszíni* valódi függővonal-

mítására, azonban ebben az esetben – ha a *földfelszíni* valódi függővonal-elhajlásokra van szükségünk – akkor az interpolációt követően egy további lépést is el kell végeznünk: meg kell minden pontra határoznunk a pont környezetében a látható felszíni tömegek által okozott függővonal-elhajlás összetevők értékét, és ezt hozzá kell adni a korrekcióval ellátott Eötvös-inga mérések alapján interpolált ξ , η értékekhez.

Befejezésül az interpolált függővonal-elhajlások gyakorlati alkalmazásának egy lehetséges és rendkívül fontos példáját mutattam be a Cegléd környéki részletes geoidkép meghatározása esetén. Az Eötvös-inga mérések alapján interpolált függővonal-elhajlások felhasználásával csillagászati szintezéssel akár cm pontosságú részletes helyi geoidtérképek szerkeszthetők. A geoid helyi részleteinek ilyen gazdaságos és ilyen pontos meghatározására egyelőre nincs is más lehetőségünk.

Kutatási eredményeim, tapasztalataim, és az általam kifejlesztett számítógépes szoftver birtokában abban reménykedhetünk, hogy nem marad sokáig kihasználatlanul a világon egyedülálló lehetőségünk, és Magyarország területének jelentős részére hamarosan rendelkezni fogunk a függővonal-elhajlások sűrű hálózatával és a geoid cm pontosságú részletes térképével. Jelenleg az Eötvös Loránd Geofizikai Intézetben Magyarország területének jelentős részére már hozzáférhetők, és további feldolgozásra várnak az Eötvös-ingával meghatározott W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek, amelyek alapján bármilyen egyéb mérési munka nélkül az általam kifejlesztett szoftverrel meghatározható a függővonal-elhajlások igen sűrű hálózata, és minden eddiginél nagyságrendekkel olcsóbban és gyorsabban előállítható Magyarország igen pontos és részletes geoidképe.

IRODALOM

- Badekas J. (1967) Torsion balance observation in Southwest Ohio. Reports of the Department of Geodetic Science, No. 89, The Ohio State University.
- Badekas J., I.I. Mueller (1967) Interpolation of deflections from horizontal gravity gradients. Reports of the Department of Geodetic Science, No. 98, The Ohio State University.
- Biró P., Földváriné V.M., Hazay I., Homoródi L. (1965) Geodéziai gravimetriai feladatok háromszögelési hálózatunkkal kapcsolatban (A függővonal-elhajlás hálózat sűrítése) ÉKME, Felsőgeodézia Tanszék, Budapest.
- Bíró P. (1985) Felsőgeodézia. BME egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest.
- Brennecke J. , U. Heineke (1975) Erfahrungen mit der ungarischen Drehwaage E-54. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität, Hannover, No.57.
- Detrekői Á. (1981) Kiegyenlítő számítások. BME Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Detrekői Á. (1991) Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Eötvös R. (1906) Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwaage. Verhandl. d. XV. allg. Konferenz der Internat. Erdmessung in Budapest.
- Eötvös R. (1909) Bericht über geodätische Arbeiten in Ungarn besonders über Beobachtungen mit der Drehwaage. Verhandl. d. XVI. allg. Konferenz der Internat. Erdmessung in London-Cambridge.
- Groten E. (1975) On the Determination and Applications of Gravity Gradients in Geodetic Systems. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini , Anno XXXI V, No . 4, 357-394.
- Hein G. (1978) Veröff. der Deutschen Geod. Kom, Reihe C 264, DGK, München.
- Heineke U. (1978) Untersuchungen zur Reduktion und geodätischen Verwendung von Drehwaagemeßgrößen. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, No.86.
- Heiskanen W. A. , F. A. Vening Meinesz (1958) The Earth and its Gravity Field. McGraw-Hill Book Co, New York.
- Heiskanen W. A. , H. Moritz (1967) Physical Geodesy. W. H. Freeman and Comp. San Francisco and London.
- Homoródi L. (1966) Felsőgeodézia. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Magnitzki W.A., W.W.Brovar (1964) Theorie der Figure der Erde. Veb Verlag, Berlin.
- Mueller I. I. , J. Badekas, E. J. Krakiwsky (1968) Geodetic Control by Means of Astronomic and Torsion Balance Observations, and the Gravimetric Reduction of Leveling. Reports of the Department of Geodetic Science, No. 99, The Ohio State University.

- Oltay K.(1927) Az Eötvös-ingával végzett függővonal-deviáció meghatározások pontosságának vizsgálata geodéziai és asztronómiai mérésekkel. Országos Magyar Természettudományi Alap, Budapest.
- Oltay K. (1928) Az Eötvös-ingával végezhető relatív nehézséggyorsulás mérések pontossága. Országos Magyar Természettudományi Alap, Budapest.
- Renner J. (1952) A függővonalelhajlás. MTA Műszaki Tudományok Oszt. Közl., V./1-2.
- Renner J.(1956) Untersuchungen über Lotabweichungen. Acta Technica, XV./1-2., 37-75.
- Renner J. (1957) Újabb vizsgálatok a függővonalelhajlások körében. MTA Műszaki Tudományok Oszt. Közl., XXI./1-4., 99-113.
- Rummel R., Balmino G., Johannessen J., Visser P., Woodworth P. (2002) Dedicated gravity field... Journal of Geodyn. Vol.33.
- Selényi P. (1953) Roland Eötvös Gesammelte Arbeiten. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Szabó Z.(1999) Az Eötvös-inga története. Magyar Geofizika. Vol.40 (1).
- Szecsődi E. (2003) Függővonal-elhajlás interpoláció ... Diplomaterv, BME, Budapest.
- Takátsy M. (1985) Függővonal-elhajlás interpoláció ... TDK dolgozat. BME, Budapest.
- Torge W.(1980) Geodesy. Walter de Gruyter, Berlin New York.
- Torge W. (1989) Gravimetry. Walter de Gruyter, Berlin New York.
- Tóth Gy. (2000) Eötvös-inga mérések... Geomatikai Közlemények III.
- Tóth Gy., Rózsa Sz., Ádám J., Tziavos I.N. (2002) Gravity field modelling ... Vol. 125 of IAG Symposia, Springer Verlag,
- Tóth Gy, Völgyesi L. (2002) Comparison of interpolation and collocation techniques using torsion balance data. European Geophysical Society XXVII General Assembly, Nice; Geophysical Research Abstracts, European Geophysical Society, Vol. 4.
- Tóth Gy, Völgyesi L. (2002) Comparison of interpolation and collocation techniques using torsion balance data. Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, Vol. 61, Nr.1, pp. 171-182.
- Tóth Gy, Völgyesi L. (2003) Importance of Eötvös torsion balance measurements and their geodetic applications. EGS-AGU-EUG Joint Assembly, Nice; Geophysical Research Abstracts, European Geophysical Society, Vol. 5.
- Völgyesi L. (1975) Függővonal-elhajlás interpoláció a gravitációs szintfelület görbületi eltérései alapján. Doktori értekezés, Budapest.
- Völgyesi L. (1975) Matrix-Orthonormalization Method in Adjustment. Periodica Polytechnica C.E., Vol.19, Nr. 1-2,1975. pp. 175-185.
- Völgyesi L. (1976) Eötvös-inga mérések bevonása a függővonal-elhajlás komponensek meghatározásába. BME Geodéziai Intézet Felsőgeodézia Tanszék, 118 p.
- Völgyesi L. (1977) Interpolation Deflection of the Vertical Based on Torsion Balance Results. Periodica Polytechnica C.E., Vo1. 21, Nr. 1-2, pp. 127-138.
- Völgyesi L. (1977) Interpolation of Deflection of the Vertical from Horizontal Gradients of Gravity. Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde, Vol. 52, pp. 561-567.

- Völgyesi L. (1977) Függővonal-elhajlás interpoláció Eötvös-inga mérési eredmények alapján I. Magyar Geofizika, Vol. XVIII, Nr. 5, pp. 189-196.
- Völgyesi L. (1977) Függővonal-elhajlás interpoláció Eötvös-inga mérési eredmények alapján II. Magyar Geofizika, Vol. XVIII, Nr. 6, pp. 226-230.
- Völgyesi L. (1978) Függővonal-elhajlás interpoláció gradiens-mérések alapján. BME Fiatal oktatók és kutatók tudományos fóruma, pp. 24-32.
- Völgyesi L. (1979) A numerikus modellek választásának néhány kérdése és a mátrix-ortogonalizációs módszer alkalmazása a kiegyenlítő számításban. Geodézia és Kartográfia, Vol. 31, Nr.5, pp. 327-334.
- Völgyesi L. (1980) A mátrix-ortogonalizációs módszer gyakorlati alkalmazása a kiegyenlítő számításban. Geodézia és Kartográfia, Vol. 32, No. 1, pp. 7-15.
- Völgyesi L. (1980) Correction of Torsion Balance Measurements Used for Interpolating the Deflection of the Vertical. Periodica Polytechnica C.E., Vo1. 24, Nr. 1-2, pp. 199-210.
- Völgyesi L. (1982, 1999) Geofizika. BME Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest.
- Völgyesi L. (1993) Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica Civ.Eng., Vo1. 37. Nr. 2, pp. 137-166.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Varga J (1994) Magyarországi vetületi rendszerek közötti átszámítások. Geodézia és Kartográfia, Vol. 46, Nr. 5-6, pp. 265-269.
- Völgyesi L. (1995) Test Interpolation of Deflection of the Vertical in Hungary Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica Civ.Eng., Vo1. 39, Nr. 1, pp. 37-75.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Varga J. (1996) Conversion between Hungarian Map Projection Systems. Periodica Polytechnica Civ.Eng., Vol. 40. Nr. 1, pp. 73-83.
- Völgyesi L. (1997) Transformation of Hungarian Unified National and Gauss-Krüger Projection System into WGS-84. Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, Vol. 27, Nr. 4, pp. 281-294.
- Völgyesi L. (1998) Geoid Computations Based on Torsion Balance Measurements. Reports of the Finnish Geodetic Institute 98:4, pp. 145-151.
- Völgyesi L. (2000) Nagyméretű, ritkán kitöltött mátrixok számítógépes kezelése a kiegyenlítő számításban. Geodézia és Kartográfia, Vol. 52, Nr. 9, pp. 33-36.
- Völgyesi L. (2001) Nutzung von Computern bei Ausgleichsrechnungen schwach besetzter Matrizen von großem Ausmaß. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Nr. 2, pp. 46-49.
- Völgyesi L. (2001) Geodetic applications of torsion balance measurements in Hungary. European Geophysical Society XXVI General Assembly, Nice; Geophysical Research Abstracts, European Geophysical Society, Vol. 3.
- Völgyesi L. (2001) Geodetic applications of torsion balance measurements in Hungary. Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, Vol. 57, Nr. 2, pp. 203-212.
- Völgyesi L., Varga J. (2001) Vetületi átszámítások Ausztria és Magyarország között GPS alkalmazásával. Geodézia és Kartográfia, Vol. 53, Nr. 2, pp. 31-35.
- Völgyesi L. (2001) Local geoid determinations based on gravity gradients. Acta Geodaetica et Geophysica Hung. Vol. 36 Nr. 2, pp. 153-162.

Völgyesi L, Varga J. (2002) GPS as the device of junction of triangulation networks. Periodica Polytechnica Civ.Eng. Vol. 46, Nr. 2, pp. 231-238.

Völgyesi L., Tóth Gy. (2002) Az Eötvös-inga mérések jelentősége és geodéziai alkalmazásuk. Geodézia és Kartográfia, Vol. 54, Nr. 10, pp. 28-33.