

# A topográfiai és az izosztatikus tömegek hatása a geoidformákra

*Dr. Yölgyesi Lajos*, a BME Geodéziai Intézet adjunktusa  
és *Tóth Gyula* a BME Geodéziai Intézet tudományos továbbképzési ösztöndíjasa

DK 628.21

## Bevezetés

A korszerű földfelszíni és kozmikus geodéziai mérések lehetővé teszik a földi nehézségi erőter potenciálja szintfelületeinek – így elsősorban a geoidnak – egész földi kiterjedésben néhány méteres megbízhatóságú meghatározását. Így a geoid térbeli helyzetét jellemző mennyiségek a Föld egészére vonatkozó geofizikai információink közül az egyik legpontosabb adatrendszert képezik.

A globális geoidkép tanulmányozása során a nagyobb geoidformák fizikai hátterének magyarázata egyelőre még megválaszolatlan kérdés, a Föld belső felépítésével összefüggő alapvető feladat. A földi nehézségi erőter potenciálfüggvényét – és így a globális geoidképet is – a Föld inhomogén sűrűségeloszlása alakítja ki. Amikor tehát a globális geoidkép fizikai hátterére vagyunk kíváncsiak, a Föld inhomogén sűrűségeloszlását jellemző  $\mathcal{A}(x, y, z)$  háromdimenziós sűrűségfüggvényt kell meghatároznunk a  $W(r, \Theta, \lambda)$  potenciáltér (vagy a geoidformák) ismerete alapján. Ez viszont nem más, mint az ún. geofizikai inverzfeladat, aminek köztudottan nincs egyértelmű matematikai megoldása [9]. Ennek köszönhető, hogy a geoidkép fizikai értelmezése céljából ilyen módon végzett eddigi számítások általában különböző eredményre vezettek, amelyek többnyire nem mutatnak elegendő összhangot egyéb geofizikai ismereteinkkel.

Az utóbbi időkben olyan új, elvileg igen egyszerű megoldási módszer kidolgozását kezdtük meg, amellyel nagyobb lehetőség nyílik a Föld valódi sűrűségeloszlásának meghatározására, vagy legalábbis ennek lényegesen pontosabb megismerésére [17]. Amennyiben sikerül olyan fizikailag lehetséges földmodellt találni mely, az ismert geoidképet szolgáltatja, esélyünk lehet arra is, hogy tisztábban lássuk a Föld belső dinamikai folyamatait, és következtethessünk a nehézségi erőter és ezzel a geoid szekuláris változásának egyelőre kevésbé ismert, inkább csak feltételezett okaira [2].

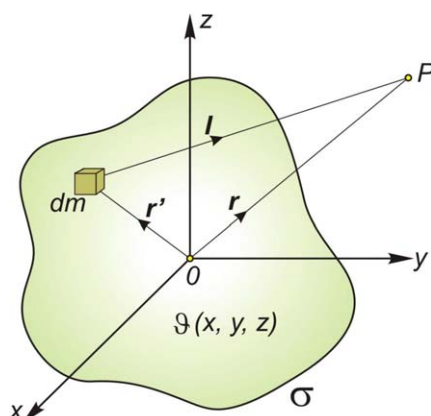
A megoldási módszernek az a lényege, hogy első lépésben a rendelkezésre álló valamennyi ismert sűrűségeloszlás (felszíni látható tömegek, az izosztatikus kiegyenlítődési folyamatban résztvevő tömegek, a lemeztektonikai modelleknek megfelelő sűrűség-inhomogenitások, stb.) figyelembevételével olyan modell potenciálfüggvényét – illetve a neki megfelelő geoidot – határozzuk meg, amely tehát csak az általunk már ismert sűrűség-inhomogenitások hatását tükrözi. A második lépésben ezeket az így számított geoidundulációkat a valódi geoidképből levonva várhatóan olyan egyszerűbb geoidképet kapunk, amely már csak a Föld nagyobb mélységeiben lévő ismeretlen sűrűség-inhomogenitások globális hatásait tartalmazza. Ezt követően kerülhet sor ezeknek a „maradék”, vagyis a még ismeretlen geoid-anomáliáknak az értelmezésére. Ehhez figyelembe kell venni az összes rendelkezésre álló geofizikai (szeizmikus, földmágneses, geotermikus, stb.) információt, és az ezek alapján felállított földmodellekre [pl. 1] meg kell határozni a geoidformákat. Az így felállított földmodellek közül nyilvánvalóan azt fogadjhatjuk el, amelynek a sűrűségeloszlása az

előbb említett „maradék” geoidképet szolgáltatja. A globális geoidkép általunk felvázolt fizikai értelmezése során ez az utóbbi harmadik lépés tűnik egyelőre a legnehezebbnek.

A jelenlegi munkánk a feladat teljes megoldásának első láncszeme, melynek során megadjuk azt a számítási eljárást, amivel meghatározható a felszíni topográfiai és az izosztatikus kiegyenlítődéssel járó tömeg-rendellenességeknek megfelelő geoidkép.

## 1. A felszíni ismert tömegeloszlás hatásának számítása

A feladat megoldásához először röviden áttekintjük a számítási eljárás gondolatmenetét.



1. ábra. Jelölések tetszőleges test tömegvonzási potenciáljának számításához

Tetszőleges  $\sigma$  tartománybeli  $\Psi(x, y, z)$  sűrűségeloszlású test tömegvonzási potenciálját valamely külső  $P$  pontban az 1. ábrán látható jelöléseknek megfelelően a

$$V_P = k \int_{\sigma} \frac{dm}{l} = k \iiint_{\sigma} \frac{\Psi(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (1)$$

integrállal számíthatjuk ki [pl. 6], ahol  $k$  a Newton-féle tömegvonzási állandó.

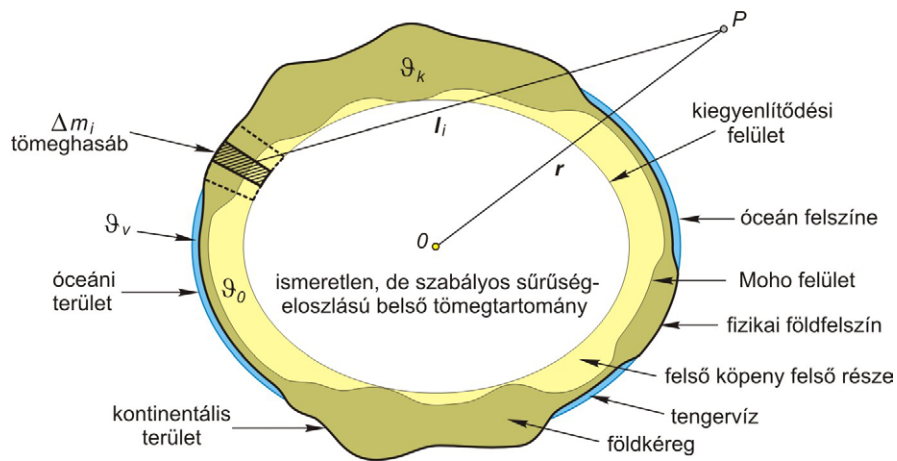
Esetünkben, amikor a topográfiai és az izosztatikus tömegek hatását kívánjuk meghatározni, a  $\sigma$  tartomány a fizikai földfelszín által határolt térrész, a sűrűségeloszlás pedig a 2. ábrán szemléltetett modell tömegeloszlásának megfelelő lesz. Ez olyan munkamodell, amelyben a Föld teljes tömegét két részre: az egyelőre ismeretlen inhomogén de szabályos sűrűségeloszlású belső tömegrészre és az ismert inhomogén sűrűségeloszlású külső tömegrészre osztottuk úgy, hogy az össztömeg megegyezzen a Föld valódi tömegével, alakja pedig megegyezzen a Föld tényleges alakjával. Az integráláshoz szükséges tömegelemeket a 2. és a 3. ábrán látható tömeghasábok formájában úgy alakítottuk ki, hogy az egyes hasábok a kiegyenlítődési felület és a fizikai földfelszín közé essenek, oldalsó irányban pedig a megfelelő meridiánsíkok és rájuk merőleges függőleges síkok határolják. Az egyes tömeghasábok  $\Delta m_i$  tömege az adott topográfiai viszonyoktól függően több különböző sűrűségű tömegrészről állhat a 3. ábrán szemléltetett izosztatikus modellnek megfelelően [18]. Mivel az  $i$ -ik  $\Delta m_i$  tömegű hasáb  $P$  pontbeli tömegegységre vonatkozó tömegvonzási potenciáljának értéke

$$\Delta V_i = k \frac{\Delta m_i}{l_i} \quad (2)$$

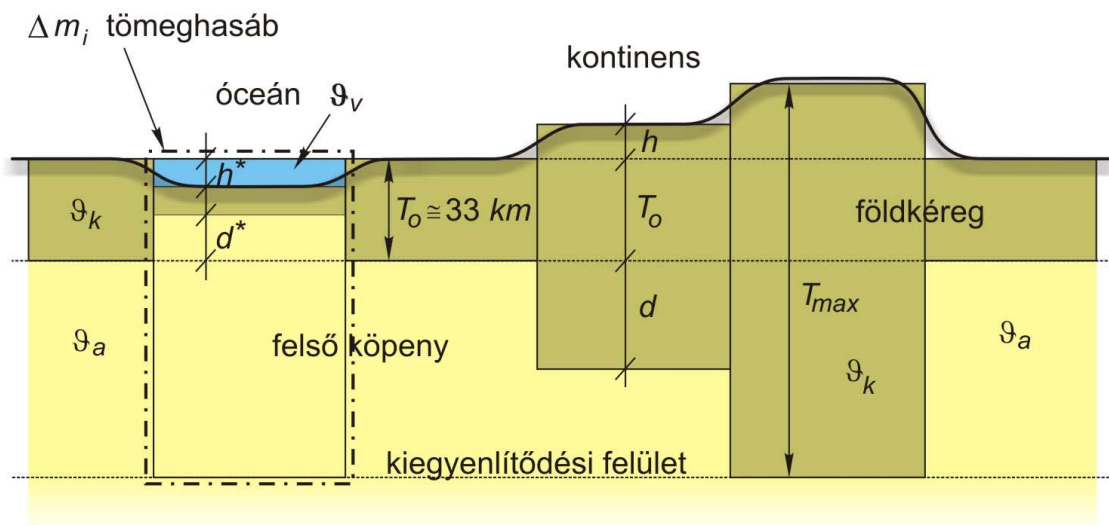
ahol ( $l_i$  a 2. ábrán látható távolság a  $\Delta m_i$  tömeghasáb súlypontja és a kérdéses  $P$  pont között), így a  $P$  pontban a teljes tömegvonzási potenciál az (1) integrál numerikus közelítésével:

$$V_P = V_B + \sum \Delta V_i = V_B + k \sum \frac{\Delta m_i}{l_i} \quad (3)$$

ahol  $V_B$  a belső, ismeretlen, de egyelőre szabályosnak feltételezett sűrűségeloszlású tömegrész potenciálja.



2. ábra. Modell a topográfiai és az izosztikus tömegek potenciáljának számításához



3. ábra. Az Airy Heiskanen féle izosztikus modell

Mivel az undulációk számításához végeredményben nem a  $V_p$  potenciálra, hanem a

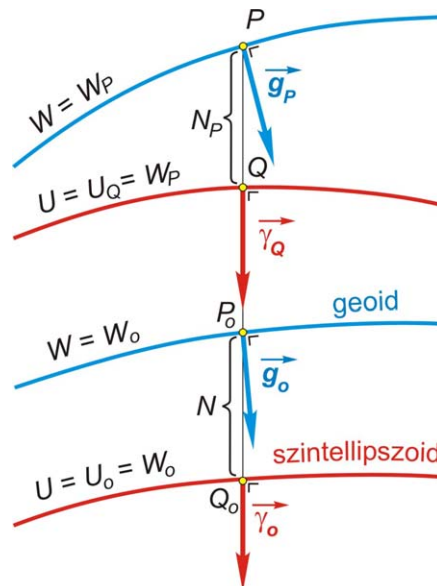
$$T_p = V_p - U_p^* \quad (4)$$

potenciálzavarra van szükségünk, ezért a (3) összefüggéssel számítható  $V_p$  tömegvonzási potenciálból ki kell vonnunk az  $U_p$  normálpotenciál tömegvonzási részének  $U_p^*$  értékét. Az  $U$  normálpotenciál megválasztásáról még hamarosan szót ejtünk, és megjegyezzük, hogy az eddigiekben azért csak a tömegvonzási potenciállal foglalkoztunk, mert a  $V_F$  forgási centrifugális potenciál a  $T_p = W_p - U_p$  különbség képzésekor úgyis kiesik, mivel  $W_p = V_p + V_F$ ,  $U_p = U_p^* + U_F$  és  $V_F = U_F$ .

Végül a  $T_p$  potenciálzavar ismeretében a *Bruns-féle* összefüggés egyszerűsített alakjának [pl. 13] alkalmazásával tudjuk meghatározni a modellünknek megfelelő valódi és normál szintfelületek  $N_p$  távolságát. A 4. ábra jelöléseivel

$$N_p = \frac{T}{\gamma_Q} \quad (5)$$

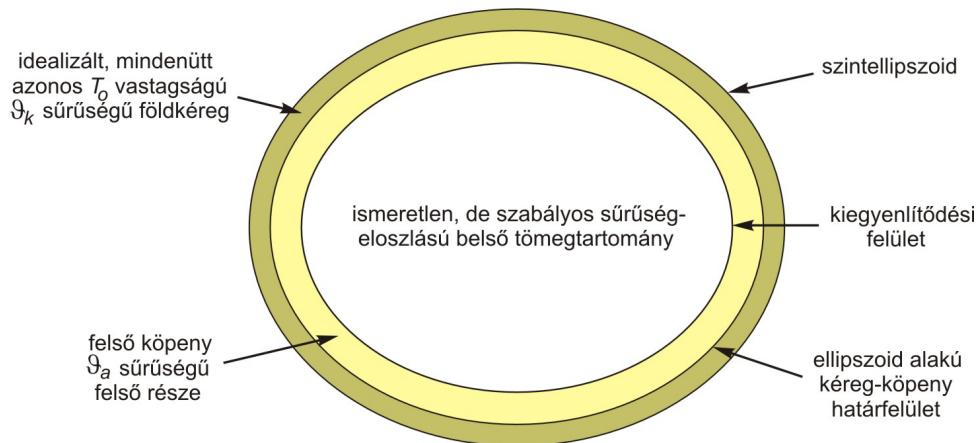
ahol  $\gamma_Q$  a normál nehézségi gyorsulás értéke. Amennyiben a P pont a geoidon helyezkedik el, akkor az (5) összefüggéssel a geoid-ellipszoid  $N = T_0/\gamma_0$  távolsága, a geoidunduláció számítható.



4. ábra. A valódi és a normál szintfelületek távolsága

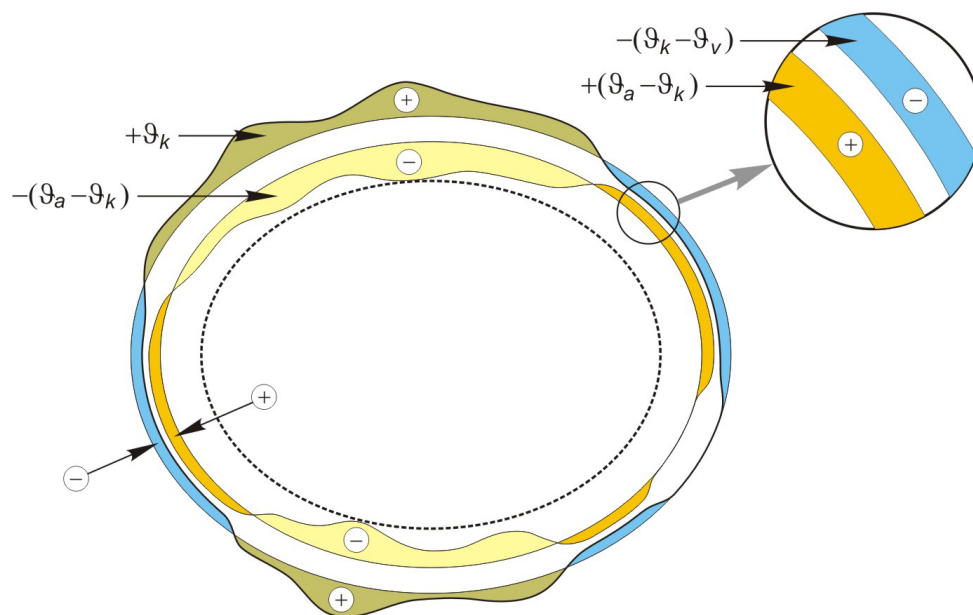
Első kísérleti számításainkat a (4) potenciálzavarnak a (3) összefüggésen keresztül történő előállításával végeztük [7]. Az így számított geoidundulációk azonban nem elégítették ki az elvárt pontosságot, ezért a továbbiakban a  $T_p$  potenciálzavart a (3) és a (4) szerinti előállítás helyett inkább gömbfüggvény-sorbafejtéssel határoztuk meg. Ennek az a lényege, hogy

először – a következőkben részletesen leírt módon – meghatározzuk a felszíni tömegrendellenességeknek megfelelő görbnfüggvénysor-együtthatókat, majd ezen együtthatók felhasználásával írjuk fel a potenciálzavar függvényét, és határozzuk meg a keresett geoidundulációkat.



5. ábra. Modell a normál nehézségi erőter felvételéhez

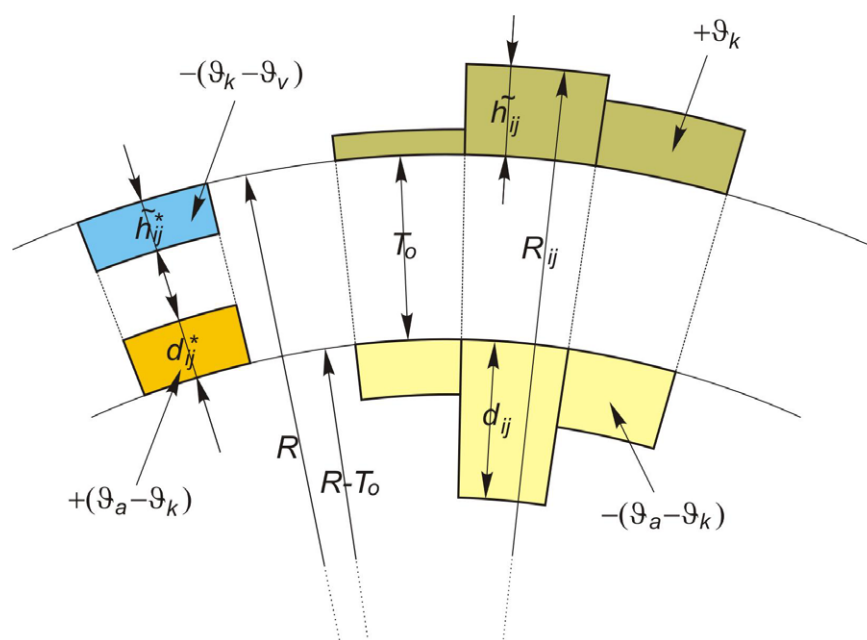
Ebben az esetben a belső tömegeloszlásról azt feltételezzük, hogy ez a belső tömeg az 5. ábrán látható módon az idealizált  $T_0$  vastagságú és homogén  $\varrho_k$  sűrűségű földkéreggel, valamint a földkéreg alsó része és az izosztatikus kiegyenlítődesi felület közötti  $\varrho_a$  sűrűségű köpenyréteggel együtt létrehozza azt a normál nehézségi erőteret, amely pontosan megegyezik a szintellipszoid elméletével felvett nemzetközi normál nehézségi erőterrel.



6. ábra. Modell a potenciálzavar számításához

A modellünk tömegvonzási potenciáljának számítását két részre osztjuk. A fő rész tartalmazza a forgási és egyenlítői szimmetriás erőteret létrehozó szabályos, de ismeretlen sűrűségeloszlású belső részt, továbbá az e fölött elhelyezkedő egyenletes vastagságú  $\varrho_a$  homogén sűrűségű köpenyrészt és a  $T_0$  vastagságú  $\varrho_k$  homogén sűrűségű kéreganyagot. Ennek a testnek a külső határoló felülete – feltevésünk szerint – a nemzetközi normál nehézségi erőternek a geoid potenciálértékével megegyező  $U_0$  normál potenciálértékű, ellipszoid alakú szintfelülete, szintellipszoidja. Így ennek a fő résznek a potenciálját a nemzetközi normál nehézségi erőter potenciáljaként, ennek ismert összefüggéseiből számíthatjuk.

Ehhez a fő részhez adódik hozzá a 6. ábrán szemléltetett módon a sokkal kisebb szabálytalan rész, amelyet a földkéreg - levegő (illetve óceán) és a földkéreg - földköpeny határfelületek szabálytalan alakja okoz. Ennek – és egyelőre csak ennek – a kis szabálytalan résznek a potenciálját számítjuk ki a 7. ábrán bemutatott és a következő 2. pontban megindokolt gömbi közelítéssel.

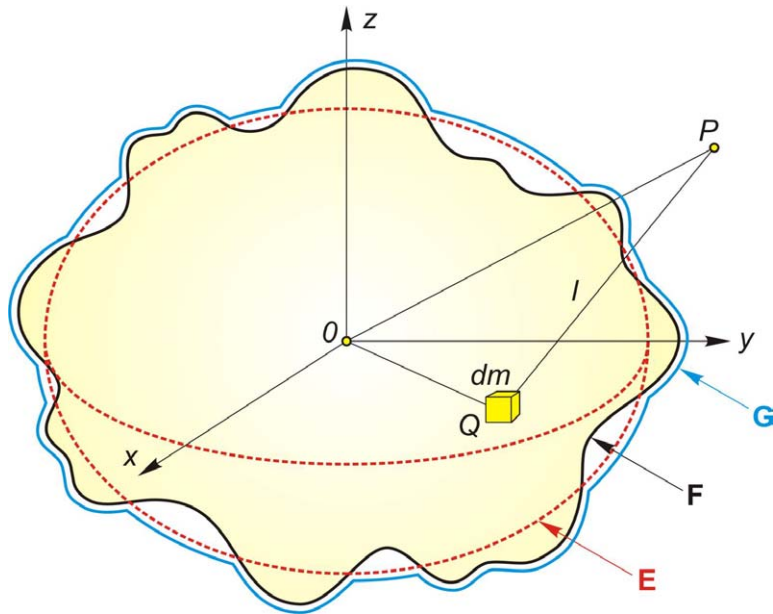


7. ábra. Jétölések a potenciálzavar számításához

Az eddigiekben ismertetett elv alapján a *Bruns-féle* elv segítségével értelmezett geoidmagasságaink így a nemzetközi normál nehézségi erőternek a geoid valódi potenciálértékével megegyező  $U_0$  potenciálú, ellipszoid alakú szintfelületére, a nemzetközi vonatozási ellipszoidra vonatkoznak úgy, hogy a 2. ábrán bemutatott modellünk belső tömegeinek eloszlása egyelőre ismeretlen marad. Ha ezt a modellt, amelynek potenciálját gömbfüggvény-sor alakban számítani akarjuk, az előzőeknek megfelelően vesszük fel, akkor erre a modellre a *Bruns-elv* segítségével számított geoidmagasságokat elvi probléma nélkül levonhatjuk a teljes geoidképből, mivel ugyanarra a normál nehézségi erőterre és alapfelületre vonatkoznak. Végeredményül a valódi teljes geoidképből történő kivonás után kapott geoidmagasságok olyan test geoidformáit fogják szolgáltatni, mely belül a Föld eddig ismeretlen elosztású belső tömegeit tartalmazza, a külső része pedig az *Airy-Heiskanen-féle* izosztatikus kiegyenlítődesben részt nem vevő tömegek hatásait tükrözi.

## 2. A lapultság elhanyagolásának hatása

A gömbfüggvénysorba fejtés esetén számottevő indokolatlan nehézséget okozna, ha a belső szabályos sűrűségeloszlással közelített tömeget ellipszoid alakúra választanánk, ezért célszerű ezt a tömegtartományt a lapultság elhanyagolásával gömb alakkal helyettesíteni, és az ellipszoid feletti topográfiai magasságokat erre a gömbre felmérni. A lapultság elhanyagolásával – tehát azzal, hogy a földalakat ellipszoid helyett gömbbel közelítjük – nyilvánvaló hibát követünk el a potenciálzavar számításakor, azonban könnyen belátható, hogy esetünkben ez a közelítés megengedhető.



8. ábra. Jelölések a lapultság elhanyagolhatóságának vizsgálatához

Ennek a bizonyításához a 8. ábra viszonyainak megfelelően jelölje  $F$  a fizikai földfelszín által bezárt térrészt,  $E$  a Föld alakját jól közelítő forgási ellipszoidot, és jelölje  $G$  az  $E$  és az  $F$  burkolófelülete által határolt tartományt. Ekkor a  $T_p$  potenciálzavar felírható a

$$T_p = V_p - U_p^* = k \iiint_F \frac{\mathcal{G}_v(x, y, z)}{l} dx dy dz - k \iiint_E \frac{\mathcal{G}_u(x, y, z)}{l} dx dy dz \quad (6)$$

formában, ahol  $\mathcal{G}_v$  2. ábrán látható modell,  $\mathcal{G}_u$  pedig a normál nehézségi erőtér tömegvonzási részét létrehozó test sűrűségfüggvénye. Jelölje ezek után  $\mathcal{G}_g$  azt a sűrűségeloszlást, amellyel a (6) jobb oldalán álló két integrál a  $G$ -re vonatkozó egyetlen

$$T_p = k \iiint_{\sigma} \frac{\mathcal{G}_g(x, y, z)}{l} dx dy dz \quad (7)$$

integrállá vonható össze.

A következő lépésben végezzük el az

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (8)$$

koordináta-transzformációt, amelyben  $D$  az  $E(a,b)$  forgási ellipszoid  $a$  fél nagytengelye és  $b$  fél kistengelye nagyságától, vagy az  $f = (a-b)/a$  lapultságától függő számérték:

$$D = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \approx 1 + \frac{f}{3} + \dots$$

Könnyen belátható, hogy a (8) transzformációval valamely  $E(a,b)$  forgási ellipszoid  $(x, y, z)$  pontjait a vele térfogataazonos gömb  $(x', y', z')$  pontjaiba képezzük le. Ezzel a transzformációval az egymásnak megfelelő  $Q$  és  $Q'$  tömegpontok földrajzi szélességei közötti eltérés – figyelembe véve a lapultság  $1/300$  körüli számértékét –  $6$  szögperc alatt marad. Hajtsuk végre ezek után a (7) integrálon a (8) transzformációt (figyelembe véve, hogy az egymásnak megfelelő  $Q$  és  $Q'$  pontokban a sűrűség megegyezik), és fejtsük sorba a kapott integrál integrandusát, azaz  $1/l$ -et a  $D = 1$  helyen

$$\begin{aligned} T_{P'} = k \iiint_{G'} \frac{\mathcal{G}_g(x', y', z')}{l'} dx' dy' dz' + \\ + (D-1)k \iiint_{G'} \frac{\mathcal{G}_g(x', y', z')}{l'} \left[ 3 \left( \frac{z_{P'} - z_{Q'}}{l'} \right)^2 - 1 \right] dx' dy' dz' \end{aligned} \quad (9)$$

A kerek zárójelben látható tag a  $P'Q'$  szakasz  $x' y'$  síkkal bezárt szögének koszinusza, ezért a szögletes zárójelben szereplő kifejezés legnagyobb abszolút értéke:  $2$ . Az integrandusban szereplő  $\mathcal{G}_g(x', y', z')$  függvény pozitív és negatív értékeket egyaránt felvehet, ezért a  $G'$  tartományt a  $\mathcal{G}_g(x', y', z')$  függvény előjele alapján két részre kell osztani: arra a  $+G'$  tartományra, ahol a függvény pozitív, és a  $-G'$  tartományra, ahol negatív előjelű. Ekkor a (9) kifejezés bal oldalán  $T_{P'}$ -vel jelölt potenciálzavar is pozitív  $+T_{P'}$  és a negatív  $-T_{P'}$  mennyiségek összegeként írható fel. Ennek a két mennyiségnek az abszolút értékére külön-külön érvényes az a becslés, hogy ha számításukkor a lapultságot elhanyagoljuk, azaz a  $+T_{P'}$  és a  $-T_{P'}$ -re vonatkozó sorfejtések első tagjait vesszük figyelembe, az így elkövetett hiba a sorfejtés második tagjának figyelembevételével biztosan kisebb, mint a számított  $-T_{P'}$  és a  $+T_{P'}$  mennyiségek  $2f/3 \approx 1/4000$ -ad része [14].

### 3. Ismert tömegeloszlás vonzási potenciáljának gömbfüggvénysora

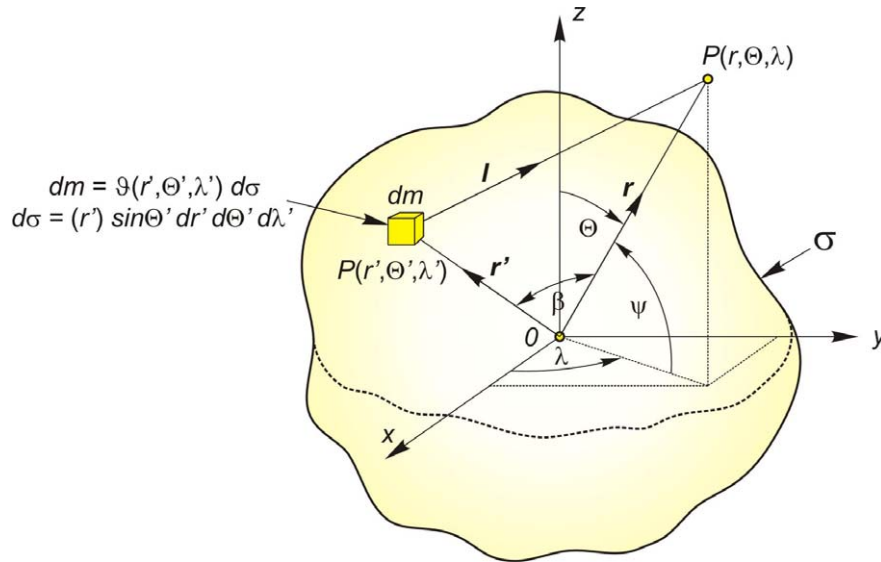
A 9. ábrán látható tetszőleges sűrűségeloszlású  $\sigma$  tartomány (esetünkben a földtömeg)  $V_p$  vonzási potenciálja valamely külső  $P$  pontban az (1) összefüggéssel számítható ki. Ugyanez az összefüggés a 9. ábra jelöléseinek megfelelően térbeli poláris koordinátákban a



$$V_P = k \iiint_{\sigma} \frac{\varrho(r', \Theta', \lambda')}{l} d\tau = k \iiint_{r' \Theta' \lambda'} \frac{\varrho(r', \Theta', \lambda') r'^2 \sin \Theta'}{l} dr' d\Theta' d\lambda' . \quad (10)$$

alakban írható, ahol az  $1/l$  függvényről a koszinusztétel alkalmazásával és némi átalakítás után látható, hogy az  $r' < r$  feltétel teljesülése esetén térbeli gömbfüggvénysorba fejthető [pl.13].

$$\frac{1}{l} = [r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \beta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \beta \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \beta) \quad (11)$$



9. ábra. Jelölések tetszőleges test tömegvonzási potenciáljának számításához poláris koordinátákkal

Mivel

$$\cos \beta = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos(\lambda - \lambda')$$

ezért felírható a

$$P_n(\cos \beta) = P_n(\cos \Theta) \cdot P_n(\cos \Theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[ P_{nm}(\cos \Theta) \cos m\lambda \cdot P_{nm}(\cos \Theta') \cos m\lambda' + P_{nm}(\cos \Theta) \sin m\lambda \cdot P_{nm}(\cos \Theta') \sin m\lambda' \right] \quad (12)$$

ahol a  $t = \cos \Theta$ , vagy a  $t = \cos \Theta'$  egyszerűsítő jelöléssel

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (13)$$

a Legendre-polinomok,

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \quad (14)$$

pedig az  $n$ -ed fokú és  $m$ -ed rendű hozzárendelt (asszociált) *Legendre-függvények*.

Ha az  $1/l$  függvény (11) gömbfüggvény sorát a (12) figyelembevételével beírjuk a (10) integrálba, és felcseréljük az integrálás és a szummázás sorrendjét, akkor az adott tömegeloszlás  $P(r, \Theta, \lambda)$  pontbeli  $V_P$  potenciálértékét a

$$V_P = k \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n i \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^n} \left\{ \begin{array}{l} P_{nm}(\cos \Theta) \cos m\lambda \times \\ \times \iiint_{\sigma} (r')^n P_{nm}(\cos \Theta') \cdot \cos m\lambda' \cdot \mathcal{G}(r', \Theta', \lambda') d\sigma + \\ + P_{nm}(\cos \Theta) \sin m\lambda \times \\ \times \iiint_{\sigma} (r')^n P_{nm}(\cos \Theta') \cdot \sin m\lambda' \cdot \mathcal{G}(r', \Theta', \lambda') d\sigma \end{array} \right\} \quad (15)$$

gömbfüggvényt sor alakjában kapjuk, ahol

$$i = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = 0 \\ 2, & \text{ha } m \neq 0 \end{cases} .$$

Az  $1/l$  sorfejtést felhasználva a nulladfokú tag és a forgási szimmetriás zónális tagok különválasztásával tetszőleges külső  $P(r, \Theta, \lambda)$  pontban a tömegvonzási potenciál:

$$V_P = -\frac{kM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos \Theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \Theta) \right\} \quad (16)$$

ahol  $M$  a test teljes tömege,  $a$  pedig célszerűen választott távolság ( $a < r$ ) [6].

A (16) gömbfüggvény-sorban szereplő  $J_n$  tömegfüggvények és  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  gömbfüggvény-együtthatók az adott test tömegeloszlásának ismeretében határozhatók meg. A (15)-nek megfelelően  $m = 0$  esetén:

$$J_n = -C_{n0} = -\frac{1}{Ma^n} \iiint_{\sigma} (r')^n P_n(\cos \Theta') \mathcal{G}(r', \Theta', \lambda') d\sigma \quad (17)$$

$m \neq 0$  esetén pedig:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right\} = \frac{2}{Ma^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\sigma} (r')^n P_{nm}(\cos \Theta') \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \mathcal{G}(r', \Theta', \lambda') d\sigma \quad (18)$$

ahol a  $d\sigma$  térfogatelem:

$$d\sigma = (r')^2 \sin \Theta' dr' d\Theta' d\lambda' .$$

Ha a (16) gömbfüggvény sorba a  $P_n(\cos \Theta)$  Legendre-polinomok és a  $P_{nm}(\cos \Theta)$  Legendre-függvények

$$\bar{P}_{nm}(\cos \Theta) = \sqrt{i(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos \Theta) \quad i = \begin{cases} 1, & \text{if } m = 0 \\ 2, & \text{if } m \neq 0 \end{cases} \quad (19)$$

normalizált alakját írjuk, akkor természetesen a (17) és a (18) által számítható együtthatók értékeit is normalizálni kell:

$$\begin{cases} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{cases} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{i(2n+1)(n-m)!}} \begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases} \quad i = \begin{cases} 1, & \text{if } m = 0 \\ 2, & \text{if } m \neq 0 \end{cases} . \quad (20)$$

Az esetünkben a (17) és a (18) integrált a 2. ábrán látható modellre kell kiszámítani, így az integrációs határokat a Föld fizikai felszíne adja. Ha a (16) gömbfüggvény sor együtthatóit ilyen módon meghatároztuk, ugyanezen együtthatók felhasználásával a keresett  $T_p$  potenciálzavar is kiszámítható lesz, amint ezt a későbbiekben be fogjuk mutatni.

#### 4. A gömbfüggvény sor együtthatóinak meghatározása numerikus integrálással

Az alábbiakban olyan numerikus integrálási eljárást ismertetünk, amely csak a Föld teljes felszínére vonatkozóan numerikusan közelítő, az egyes térfogatelemekre azonban teljesen szabatos megoldás. A numerikus integráláshoz osszuk fel a Földet közelítő gömb felszínét  $p-1$  számú paralellkörrel és  $s$  számú meridiánnal  $p \cdot s$  számú felületdarabra, a topográfiát pedig ezekre a felületdarabokra vonatkozó átlagmagasságokkal közelítsük! A 10. ábra jelölései szerint legyen

$$R_{ij}^0 = R - T_0 - d_{ij}$$

és

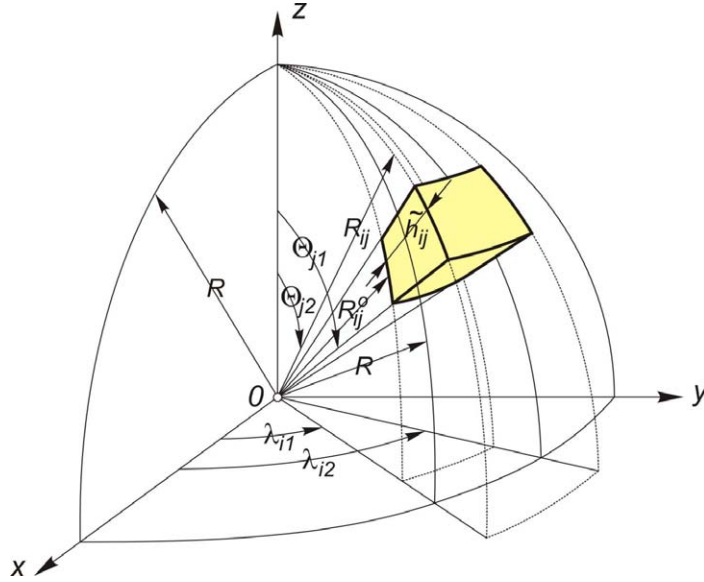
$$R_{ij} = R + \tilde{h}_{ij} ,$$

ahol  $\tilde{h}_{ij}$  az adott felületdarabra vonatkozó átlagmagasság,  $d_{ij}$  az izosztatikus kéregvastagodás,  $T_0$  a földkéreg átlagos vastagsága és  $R$  a Föld térfogatával azonos térfogatú gömb sugara.

Számítsuk ki először a 10. ábrán látható integrálási határok figyelembe vételével a (18) jobb oldalán szereplő hármas integrált. (Az egyszerűbb (17) ennek ismeretében már könnyen kiszámítható lesz.) Az integráljel előtti konstans szorzótól most átmenetileg tekintsünk el, és vezessük be az

$$I = \iiint_{\sigma} (r')^n P_{nm}(\cos \Theta') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} \mathcal{G}(r', \Theta', \lambda') d\sigma$$

jelölést! Az említett felosztással:



10. ábra. Jelölések a numerikus integráláshoz,

$$I = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^p \int_{R'_{ij}}^{R_{ij}} \int_{\Theta_{j1}}^{\Theta_{j2}} \int_{\lambda_{i1}}^{\lambda_{i2}} (r')^{n+2} P_{nm}(\cos \Theta') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} \mathcal{G}(r', \Theta', \lambda') \sin \Theta' dr' d\Theta' d\lambda' \quad (21)$$

Mivel ugyanazon felületi tömegelemen belül  $\mathcal{G}(r', \Theta', \lambda')$  sűrűség a  $\Theta'$ -től és a  $\lambda'$ -től független, a  $\Theta'$  és a  $\lambda'$  szerinti integrálási határok pedig állandók, ezért a (21) hármas integrál felbontható három egyszeres integrál szorzatára

$$I = I_R \begin{Bmatrix} I_C \\ I_S \end{Bmatrix} I_P \quad (22)$$

amelyben :

$$I_R = \int_{R-T_o-d_{ij}}^{R+\tilde{h}_{ij}} \mathcal{G}(r') (r')^{n+2} dr' \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} I_C \\ I_S \end{Bmatrix} = \int_{\lambda'_{i1}}^{\lambda'_{i2}} \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} d\lambda' \quad (24)$$

$$I_P = \int_{\Theta'_{j1}}^{\Theta'_{j2}} P_{nm}(\cos \Theta') \sin \Theta' d\Theta' . \quad (25)$$

Először számítsuk ki a (23) integrált a két egymástól különböző alapesetben, kontinentális és óceáni területekre. A 7. ábra szerint ez az integrál kontinentális területeken, vagyis pozitív  $\tilde{h}_{ij}$  átlagmagasság esetén

$$I_R = \int_{R-T_o-d_{ij}}^{R+\tilde{h}_{ij}} \mathcal{G}(r')(r')^{n+2} dr' = (\mathcal{G}_k - \mathcal{G}_a) \int_{R-T_o-d_{ij}}^{R-T_o} (r')^{n+2} dr' + \mathcal{G}_k \int_R^{R+\tilde{h}_{ij}} (r')^{n+2} dr' \quad (26)$$

ahol  $T_o$  az átlagos földkéregvastagság és

$$d_{ij} = \frac{\mathcal{G}_k}{\mathcal{G}_a - \mathcal{G}_k} \tilde{h}_{ij}$$

az Airy-féle izosztikus egyensúlyi modellnek megfelelően. Elvégezve a (26) integrálást, majd egyszerű átalakítások után

$$I_R = \frac{1}{n+3} \left\{ \mathcal{G}_k R^{n+3} \left[ \left( 1 + \frac{\tilde{h}_{ij}}{R} \right)^{n+3} - 1 \right] + (\mathcal{G}_a - \mathcal{G}_k)(R - T_o)^{n+3} \left[ \left( 1 - \frac{\mathcal{G}_k \tilde{h}_{ij}}{(\mathcal{G}_a - \mathcal{G}_k)(R - T_o)} \right)^{n+3} - 1 \right] \right\} \quad (27)$$

ahol  $\mathcal{G}_k$  a földkéreg,  $\mathcal{G}_a$  pedig a felső köpeny átlagos sűrűsége ( $\mathcal{G}_k \cong 2670 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mathcal{G}_a \cong 3270 \text{ kg/m}^3$ ). Hasonlóan számítható ki a (23) integrál tengervízzel borított óceáni területekre,  $\tilde{h}_{ij}^*$  átlagos tengermélység esetén is

$$I_R^* = \frac{1}{n+3} \left\{ (\mathcal{G}_k - \mathcal{G}_v) R^{n+3} \left[ \left( 1 + \frac{\tilde{h}_{ij}^*}{R} \right)^{n+3} - 1 \right] + (\mathcal{G}_a - \mathcal{G}_k)(R - T_o)^{n+3} \left[ \left( 1 - \frac{(\mathcal{G}_k - \mathcal{G}_v) \tilde{h}_{ij}^*}{(\mathcal{G}_a - \mathcal{G}_k)(R - T_o)} \right)^{n+3} - 1 \right] \right\} \quad (28)$$

ahol  $\mathcal{G}_v \approx 1030 \text{ kg/m}^3$  a tengervíz sűrűsége, és

$$d_{ij}^* = \frac{\mathcal{G}_k - \mathcal{G}_v}{\mathcal{G}_a - \mathcal{G}_k} \tilde{h}_{ij}^*$$

a kéregelvékonyodás óceáni területeken az *Airy*-féle izosztatikug egyensúlyi modellnek megfelelően.

Egyszerűen kiszámíthatók a (24) integrálok is az

$$I_C = \frac{1}{m} (\sin m\lambda_{i2} - \sin m\lambda_{i1}) = \frac{2}{m} \cos m \frac{\lambda_{i1} + \lambda_{i2}}{2} \sin m \frac{\Delta\lambda}{2}$$

$$I_S = \frac{1}{m} (\cos m\lambda_{i2} - \cos m\lambda_{i1}) = \frac{2}{m} \sin m \frac{\lambda_{i1} + \lambda_{i2}}{2} \sin m \frac{\Delta\lambda}{2}$$
(29)

alakban, ahol

$$\Delta\lambda = \lambda_{i2} - \lambda_{i1} = \text{const.}$$

Végül számítsuk ki a (25) integrál értékét! A már korábban is alkalmazott  $t = \cos \Theta'$  helyettesítéssel

$$I_P = \int_{t_2 = \cos \Theta'_{j2}}^{t_1 = \cos \Theta'_{j1}} P_{nm}(t) dt \quad ,$$
(30)

amelyet gépi számításra is alkalmas rekurzív módszerrel oldunk meg.

Ehhez induljunk ki a (14) differenciálásával könnyen igazolható

$$P_{nm}(t) = \sqrt{1-t^2} \frac{dP_{n,m-1}(t)}{dt} + (m-1) \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} P_{n,m-1}(t)$$
(31)

összefüggésből. Ugyanakkor az asszociált *Legendre*-függvények differenciálegyenletéből levezethető, hogy:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{n(n+1) - m(m+1)} \left[ 2(m+1) \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} P_{n,m+1}(t) - P_{n,m+2}(t) \right].$$
(32)

(A (31) és a (32) összefüggés a  $t = \cos \Theta$  vagy a  $t = \sin \psi$  helyettesítés esetén a pólusoknál határozatlanná válik.) Kiszámítva a (31)  $t_1$  és  $t_2$  közötti határozott integrálját és figyelembe véve a (32) összefüggést, az

$$\int_{t_1}^{t_2} P_{nm}(t) dt = \frac{1}{n(n+1) - m(m+1)} \left\{ -\frac{2(m+1)}{m+2} \left[ \sqrt{1-t_2^2} P_{n,m+1}(t_2) - \sqrt{1-t_1^2} P_{n,m+1}(t_1) \right] + \frac{m}{m+2} \int_{t_1}^{t_2} P_{n,m+2}(t) dt \right\}$$
(33)

alakra jutunk. Ebből látható, hogy a rekurziós számítás indításához szükségünk van a  $P_{nn}(t)$  integráljára is, ami viszont a

$$P_{nn}(t) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(1-t^2)^{n/2} \quad (34)$$

összefüggés [8] integrálásával nyerhető az

$$\int_{t_1}^{t_2} P_{nn}(t) dt = \frac{1}{n+1} \left[ P_{nn}(t_2) \cdot t_2 - P_{nn}(t_1) \cdot t_1 + n(2n-1)(2n-3) \int_{t_1}^{t_2} P_{n-2,n-2}(t) dt \right]. \quad (35)$$

alakban. Megjegyezzük, hogy a (35) kifejezés rekurzív módon történő számításakor a pólusok közelében kedvezőtlen hibahalmozódás tapasztalható, ami viszont [11] módszerének alkalmazásával elkerülhető.

Így tehát a (31), (32), (33), (34) és a (35) összefüggés felhasználásával az  $I_p$  integrál rekurzív módon – gépi számításra is alkalmas alakban – előállítható.

## 5. A kísérleti számítások eredményei

Az eddigiekben vázolt megoldási eljárással kísérleti számításokat végeztünk. A potenciálzavar gömbfüggvénysorának meghatározásán keresztül előállított geoidkép reális, a felszíni topográfia jellegétől függően legfeljebb  $\pm 10 \div 30 m$  nagyságrendű geoidundulációk adódtak [14].

Végül megemlítjük még, hogy a földkéreg-levegő (óceán) illetve a kéreg-felső köpeny határfelületeknek a térben elfoglalt helyzetét nem ismerjük pontosan, ezért ez a számított erőter potenciálfelületeinek kismértékű eltolódását okozhatja. Mi azonban a számítással meghatározott geoidképet interpretációs célokra kívánjuk felhasználni, ezért ezt az eltolódást figyelmen kívül hagyhatjuk.

Az elkészített számítógépprogramokon még több finomítás szükséges – többek között jelentősen csökkentenünk kell a programok futásidejét és tárigényét – hogy a számításokat az eddigieknél finomabb felbontású átlagmagasság-adatrendszeren is elvégezhessük. Erre alkalmasnak látszik a [12] által kidolgozott eljárás. A számítási eredményeinkről a későbbiekben kívánunk részletesen beszámolni.

## IRODALOM

1. Barta, G.: Some Properties of the Earth's Core Looked upon on the Basic of Investigations of the Force Fields of the Earth. Acta Geod. Geoph. Mont. Hung., 20. 1985.
2. Biró, P.: Time Variaton of Height and Gravity. Sammlung Wichmann, Vol. 14. Wichmann, Karlsruhe - Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983.
3. Biró P.: Felsőgeodézia. BME egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó. Budapest, 1985.
4. Drewes, H.: Geophysical Interpolation of Global Geoid Undulations and Mean Gravity Anomalies. Proceedings of the 5th Int. Symp. „Geodesy and Physics of the Earth. Part I., Potsdam, 1985.

5. Forsberg, R.: A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modeling. Rep. of the Dep. of Geod. Sci. and Surv. The Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 355.1984
6. Heiskanen, W. A.-Moritz, H.: Physical Geodesy. W. H. Freeman, San Francisco, 1967.
7. H.öléczy E.: Az ismert földfelszíni tömegek hatása a geoidformák kialakításában. Diplomaterv, BME felső-geodéziai tanszék. Budapest.1984.
8. Korn, G. A. - Korn, T. M.: Matematikai zsebkönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1981.
9. Lavrentiev, M. M.: Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
10. Moritz, H.: Ellipsoidal Mass Distributions. Reports of the Dep. of Geod. Sci. The Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 206. 1973.
11. Paul, M. K.: Recurrence Relations for Integrals of Associated Legendre Functions. Bulletin Geodésique. Vol. 52., 1978.
12. Süinkel, H.: An Isostatic Earth Model. Reports of the Dep, of Geod. Sci. The Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 367.1985.
13. Torge, W.: Geodesy. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1980.
14. Tóth Gy.: Az ismert földfelszíni tömegek hatása geoidformák kialakításában. Diplomaterv, BME felső-geodéziai tanszék. Budapest, 1985.
15. Tscherning, C. C. - Süinkel, H.: A Method for the Construction of Spheroidal Mass Distributions Consistent with the Harmonic Part of the Earth's Gravity Potential. Manuscripta Geodaetica Vol. 6. 1981.
16. Völgyesi, L. - Moser, M.: The Inner Structure of the Earth. Periodica Polytechnica, Chemical Eng. Budapest, Vol. 26., Nos 3-4., 1982.
17. Völgyesi L.: A geoid alakjának fizikai értelmezése. A BME alapításának 200 éves évfordulója alkalmából rendezett tudományos ülészen elhangzott előadás. 1982.
18. Völgyesi L.: Geofizika. BME egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

## **Impact of Topographical and Isostatical Mass Distributions on the Geoid Forms**

*dr. L.Völgyesi - Gy. Tóth*

*Summary*

Geophysical interpretation of the main geoid anomalies and exact knowledge of the inner structure of the Earth is an important question in geosciences. The authors suggest a new method which separates the computable geoid heights due to the topographical and all the known upper density distributions, from the unknown geoid originated from the deeper unknown density distributions of the Earth. Subtracting the computed geoid heights from the real geoid forms the residual geoid anomalies will be more simple and probable more easily interpretable. A mathematical method is presented for calculating the geoid anomalies associated with the known upper density distribution of the Earth. The method is designed for digital computation.

\* \* \*

Völgyesi L, Tóth Gy. (1988): [A topográfiai és az izosztatikus tömegek hatása a geoidformákra.](#) *Geodézia és Kartográfia*, Vol. 40, Nr. 4, pp. 235-243.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.  
Web: <http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi> E-mail: [volgyesi@eik.bme.hu](mailto:volgyesi@eik.bme.hu)