

Az Eötvös-inga mérések jelentősége és geodéziai alkalmazásuk

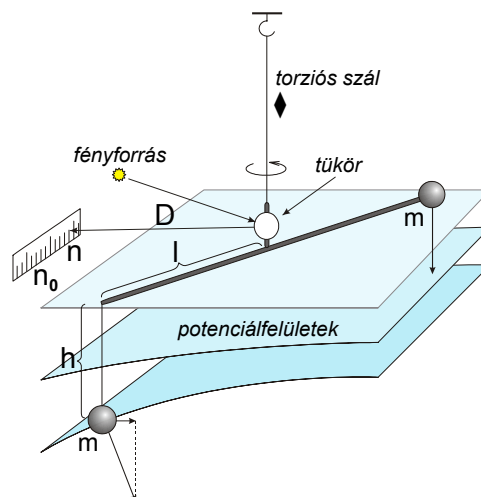
Dr. Völgyesi Lajos egyetemi docens
Dr. Tóth Gyula egyetemi docens
BME Általános és Felsőgeodézia Tanszék

Történeti áttekintés

Eötvös Loránd 1886-ban kezdett gravitációs kutatásokkal foglalkozni. 1890-ben végezte első gravitációs vizsgálatait a *görbületi variométerrel* (Coulomb-ingával). Ezen mérések során támadt a zseniális ötlete, hogy az ingarúd két végén lévő tömeg közül az egyiket az 1. ábrán szemléltetett módon lelógó szállal alacsonyabb szintre helyezze. Ezzel a megoldással a potenciálfelületek alakját (gömbalaktól való eltérését) jellemző $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ és W_{xy} *görbületi gradienseken* kívül a szintfelületek párhuzamosságára jellemző W_{zx} és W_{zy} *horizontális gradiensek* meghatározására is lehetőség nyílt. Ez az Eötvös-inga

$$n - n_0 = \frac{DK}{\tau} (W_{\Delta} \sin 2\alpha + 2W_{xy} \cos 2\alpha) + \frac{2lDhm}{\tau} (W_{zy} \cos \alpha - W_{zx} \sin \alpha) \quad (1)$$

alapösszefüggéséből is kiolvasható (α az ingarúd azimutja, n_0 a torziómentes állapot, K az inga mechanikai tehetetlenségi nyomatéka, - a további jelölések pedig az 1. ábrán azonosíthatók). Látható, hogy $h = 0$ esetén (1) a Coulomb-inga alapösszefüggését adja.



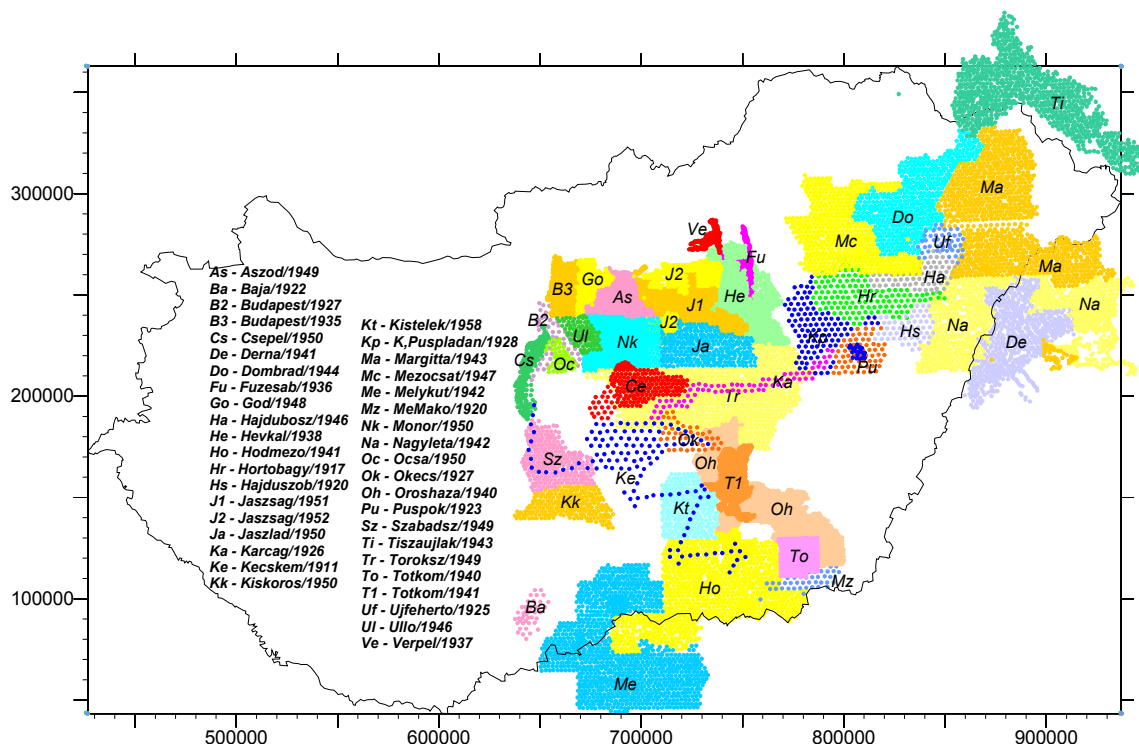
1. ábra. Az Eötvös-inga alapelve

Eötvös 1890-ben megalkotott torziós ingája egészen 1969-ig számos fejlesztésen ment keresztül és ez idő alatt Magyarországon mintegy 300 db műszer készült. A torziós ingával az első nagyobb területre kiterjedő terepi méréseket 1901 és 1903

között a téli Balaton sík jégfelületén Eötvös Loránd és munkatársai végezték. Ezt követően az 1967-ig terjedő időszakban a Magyar-Amerikai Olajipari Rt (MAORT), az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI) és az Országos Kőolaj és Gázipari Tröszt (OKGT) összesen mintegy 60000 ingamérést végzett a sík- és az enyhén dombvidéki területeken (SZABÓ 1999). Ennyi méréssel a Kárpát-medence a Föld egyik legjobban felmért területe lett.

A mérési eredmények hozzáférhetősége

Mivel a méréseket elsősorban ásványi nyersanyagok kutatása céljából végezték, ezért nagy általánosságban csak a W_{zx} és W_{zy} horizontális gradiensek kerültek feldolgozásra, a geodézia szempontjából fontosabb W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek feldolgozatlanul maradtak. Sajnos ma már a mérési adatok egy része elveszett, viszont a jelentősebb részük a korábbi mérési jegyzőkönyvek alapján hozzáférhető. Jelenleg komoly erőfeszítések folynak a még meglévő adatok megmentésére, az egykori - esetenként alig olvasható - mérési jegyzőkönyvek adatait az ELGI munkatársai számítógépes adatbázisba rendezik. 2002 januárig 17578 Eötvös-inga mérési pont adatait sikerült számítógépen rögzíteni. Az eddig rögzített pontok területi eloszlása a 2. ábrán látható.



2. ábra. Számítógépes adatbázisban szereplő Eötvös-inga mérési pontok eloszlása 2002 januárjában.

Az adatbázisban az egyes pontokra vonatkozóan az alábbi adatok szerepelnek: a mérési állomás száma, a mérési év, az állomás φ és λ földrajzi koordinátája, a W_{zx} , W_{zy} , W_{Δ} , $2W_{xy}$ gradiensek, valamint a W_{zx} , W_{zy} , W_{Δ} , $2W_{xy}$ gradiensekhez tartozó topografikus hatások.

A mérési eredmények geodéziai hasznosítása

Elsőként Eötvös Loránd mutatott rá a görbületi gradiensek geodéziai felhasználhatóságára (EÖTVÖS 1906, 1909). Alapvető összefüggést vezetett le a görbületi gradiensek és a függővonal-elhajlás összetevők két pont közötti megváltozására, és ezzel kapcsolatban próbaszámításokat végzett az Arad környéki teszt területen. Ebben a munkájában Eötvös Loránd jelentős segítséget kapott Oltag Károlytól, a BME Geodézia Tanszékének korábbi professzorától. Oltag egyrészt vizsgálatokat végzett a torziós-inga mérések pontosságára (OLTAY 1928), másrészt geodéziai és asztronómiai méréseket és számításokat végzett a görbületi gradiensek felhasználásával meghatározott függővonal-elhajlás értékek pontosságára vonatkozóan (OLTAY 1927). Az Arad környéki ellenőrző pontokon az asztronómiai mérések és a görbületi gradiensek alapján számított értékek különbségei a $-0.7''$ és $+0.8''$ intervallumon belül adódtak.

Később Eötvös függővonal-elhajlás interpolációs módszerét Renner János egyszerűsített formában továbbfejlesztette (RENNER 1952, 1956, 1957), a kísérleti számítások eredményeinek biztonságos ellenőrzésére azonban nem volt lehetősége.

Magyarországon kívül az USA-ban és Németországban is folytak kutatások az inga-mérések geodéziai hasznosítására, függővonal-elhajlás interpoláció és geoidmeghatározás céljára (BADEKAS, MUELLER 1967, HEINECKE 1978, HEIN 1981).

A modern számítástechnikai eszközök megjelenése új távlatokat nyitott a torziós-inga mérések geodéziai hasznosítása terén. Tanszékünkön 1972-től intenzív kutatások indultak először a nagyobb területekre kiterjedő függővonal-elhajlás interpolációval kapcsolatosan (VÖLGYESI 1976, 1977a,b,c, 1980, 1993, 1995), majd a geoid finomszerkezetének meghatározására (VÖLGYESI 1998, 2001a,b; TÓTH, VÖLGYESI 2002).

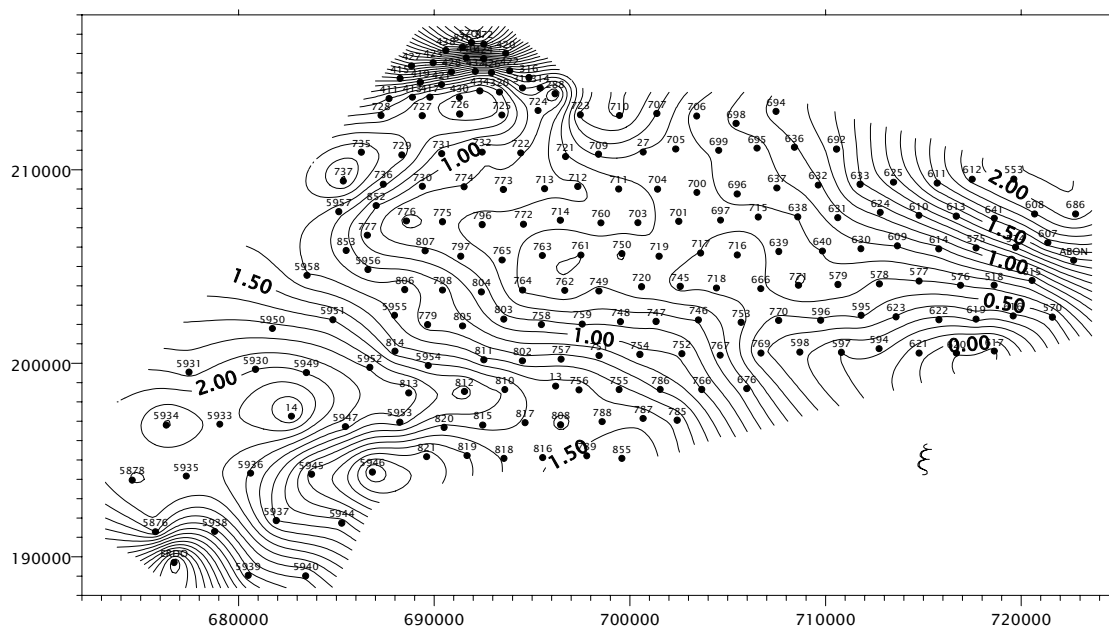
Függővonal-elhajlás interpoláció

A ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők két tetszőleges i és k pont közötti $\Delta\xi_{ik}$ és $\Delta\eta_{ik}$ megváltozása valamint az Eötvös-ingával mérhető $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ és $2W_{xy}$ görbületi gradiensek között az alábbi összefüggés írható fel:

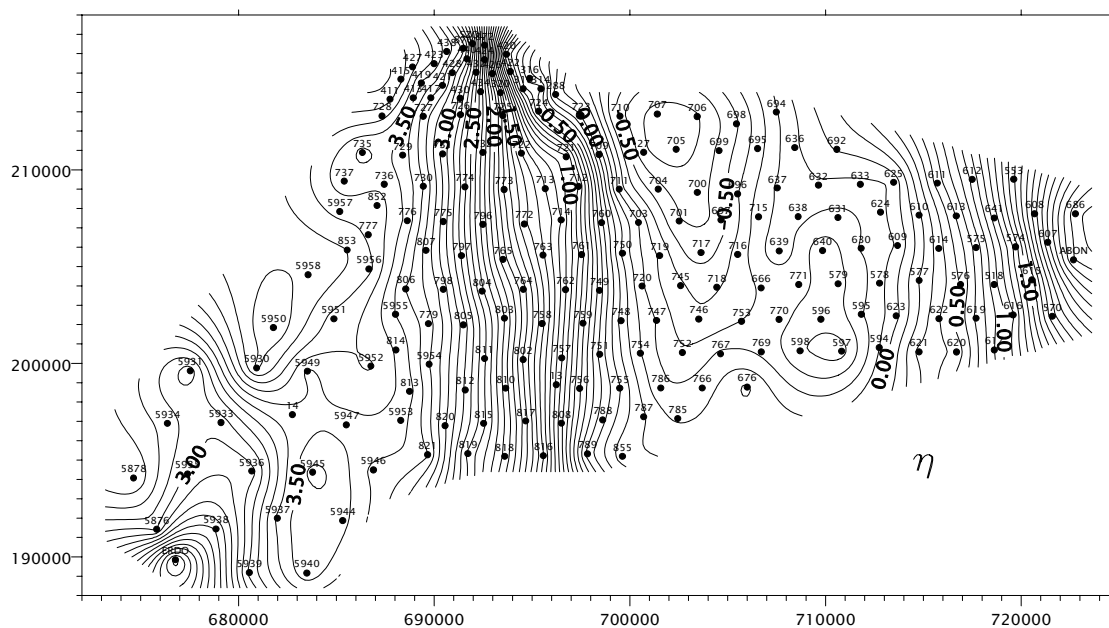
$$\Delta\xi_{ik} \sin \alpha_{ki} - \Delta\eta_{ik} \cos \alpha_{ki} = \frac{n_{ik}}{4g} \left\{ \left[(W_{\Delta} - U_{\Delta})_i + (W_{\Delta} - U_{\Delta})_k \right] \sin 2\alpha_{ki} + \left[(W_{xy} - U_{xy})_i + (W_{xy} - U_{xy})_k \right] 2 \cos 2\alpha_{ki} \right\} \quad (2)$$

ahol $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$, $U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx}$, s_{ik} az i és a k pont közötti távolság, g az átlagos nehézségi gyorsulás értéke a pontok között, U_{xx} , U_{yy} és az U_{xy} a görbületi gradiensek normális értéke, α_{ik} pedig az i és a k pont közötti azimut (VÖLGYESI 1993, 1995). A számítás alapvetően vonal menti integrálás, amely a gyakorlatban a trapéz integrálközelítő formulával abban az esetben oldható meg ha az Eötvös-ingával mérhető görbületi gradiensek két szomszédos pont közötti megváltozása a (2)-ben lineárisnak tekinthető (VÖLGYESI 1993).

Tanszékünkön közel húsz éves kutatómunka eredményeképpen kidolgoztuk a nagyobb összefüggő területre alkalmazható és a modern számítástechnika által kínált lehetőségeknek leginkább megfelelő függővonal-elhajlás interpolációs módszert (VÖLGYESI 1993, 1995). A Cegléd környéki, mintegy 1200 km² kiterjedésű teszt területen elvégzett kísérleti számítások eredményei szerint a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők közel fél szögmásodperces pontossággal számíthatók. A 3. és a 4. ábrán az említett teszt területen számított függővonal-elhajlás összetevők képe látható.



3. ábra. Interpolált ξ értékek



4. ábra. Interpolált η értékek

Lokális geoidformák meghatározása

A P_i és a P_k pont között a geoid-ellipszoid távolság ΔN_{ik} különbsége a (2) felhasználásával számított ξ , η függővonal-elhajlás összetevők ismeretében a csillagászati szintezés módszerét alkalmazva a

$$\Delta N_{ik} = \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin \alpha_{ik} \right) s_{ik} . \quad (3)$$

összefüggés segítségével határozható meg.

Kiküszöbölve a hagyományos csillagászati szintezés, négyzetháló sarokpontjaira történő számításának problémáját, közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontok helyét választottuk a geoid számítások céljára. Így a ΔN_{ik} különbségeket nem É-D illetve K-Ny irányban, hanem az Eötvös-inga mérési állomások pontjai között, tetszőleges α azimutban határoztuk meg (VÖLGYESI 1998, 2001).

A módszer alkalmazhatóságára kísérleti számításokat végeztünk a Szabadszállás - Kiskőrös környéki mintegy 800 km² kiterjedésű teszt területen, ahol 249 Eötvös-inga mérési-, és 13 ellenőrző pont (3 asztrogeodéziai, és 10 asztrogravimetriai pont) állt rendelkezésünkre a számítások ellenőrzése céljából. A számítások pontosságára a következőkben még visszatérünk.

A kollokáció alkalmazása

A kollokáció statisztikai eljárása (DETREKŐI 1991) lehetővé teszi azt, hogy a nehézségi erőter bármelyik jellemző mennyiségét (például nehézségi rendellenességeket, függővonal elhajlásokat, a nehézségi térerősség gradienseit, így az Eötvös-inga méréseket) felhasználva előállíthassuk bármelyik, az erőteret jellemző mennyiség becslését (predikcióját). A kollokáció alapösszefüggése a következő:

$$N(P) = C^{Ng}(\psi_{P_i})(C^{gg}(\psi_{ii'}))^{-1} \Delta g_i \quad (4)$$

ahol N a kollokációval becsült nehézségi erőter jellemző, g a mért nehézségi erőter jellemző, C^{Ng} és C^{gg} pedig a nehézségi erőter fenti jellemzőinek statisztikai leírására szolgáló megfelelő kovariancia függvények, amelyek a mérési adatok alapján modellezhetők. Az Eötvös-inga mérések a megfelelő (W_{xz} , W_{yz}) illetve (W_{xx} - W_{yy} , W_{xy}) kombinációkban felhasználhatók a kovariancia függvények meghatározása után külön-külön és együtt is, függővonal elhajlások, geoidmagasságok illetve nehézségi rendellenességek kiszámítására. Az 5. ábrán láthatjuk, hogy a Szolnok környékén kiválasztott 60×40 km-es közel sík területre az Eötvös-inga mérésekből kollokációval előállított nehézségi rendellenességek mennyire térnek el az ELGI gravitációs adatbázisából származó kb. 2×2 km-es rácsra interpolált mért nehézségi rendellenesség értékektől. Az egyezés kiválóan mondható, hiszen az eltérések szórása mindössze ±0.68 mGal. Ezért ezeket az adatokat legalábbis sík területen, vizsgálataink szerint előnyösen lehet felhasználni a nehézségi erőter meghatározásában.

A kollokációval előállított függővonal elhajlások és geoidmagasságok összevetése a már említett Szabadszállás-Kiskörös környéki területen az asztrogeodéziai és gravimetriai ellenőrző pontok értékeivel megmutatta, hogy a geoidmagasságok eltérése általában $\pm 1-3$ cm volt. Kicsit jobb egyezést mutattak a $(W_{xx}-W_{yy}, W_{xy})$ adatokból számított geoidundulációk mint a (W_{xz}, W_{yz}) gradiensekből meghatározottak. A 6. ábrán a görbületi gradiensekből kollokációval előállított geoidmagasságok ábrája látható az említett területen. A függővonal elhajlások eltérései 1" alatt maradtak, kicsit kedvezőbb értékeket adva az ηösszetevőre (TÓTH, VÖLGYESI 2002).

A nehézségi erőter előállítása Eötvös-inga adatokból a felsőgeodézia peremérték-feladatain keresztül

A felsőgeodézia úgynevezett peremérték-feladatain keresztül lehetőség nyílik arra, hogy a földfelszínen mint peremfelületen mért erőter adatok segítségével meghatározhassuk a Földünk teljes külső terében az erőteret jellemző potenciálfüggvényt (geoidfelületet), illetve azzal függvénykapcsolatban levő tetszőleges más erőter jellemzőt (például a nehézségi rendellenességek értékét). Ennek egyik jól ismert példája a Stokes-integrál, amely a földfelszíni nehézségi rendellenességek és egy súlyfüggvény (a Stokes-függvény) ismeretében megadja a geoidundulációk eloszlását a Föld felszínén vagy azon kívül. A Stokes-integrálhoz hasonló összefüggések vezethetők le az Eötvös inga mérések esetére is és ezek az integrál-összefüggések megfelelő súlyfüggvények bevezetése után megadják az ún. Eötvös-féle peremérték-feladat megoldásán keresztül a nehézségi rendellenességeket illetve geoidundulációkat az alábbi összefüggés szerint (TÓTH 2002):

$$N = \frac{R^2}{4\pi\gamma} \int_S E_1(\psi)(W_{xz} \cos \alpha + W_{yz} \sin \alpha) + E_2(\psi)(W_{\Delta} \cos 2\alpha + 2W_{xy} \sin 2\alpha) dS. \quad (11)$$

Ebben az összefüggésben E_1 és E_2 megfelelő súlyfüggvények (az ún. *Eötvös függvények*), S a teljes földfelszínre vonatkozó integrálást jelöli, α a számítandó pont azimutja az integrálási pontban, ψ pedig a számítandó és az integrálási pont gömbi szögtávolsága. A fenti megoldás szerint az Eötvös-inga mérések ismét jól felhasználhatók lesznek a geoidfelület magyarországi darabjának még pontosabb meghatározására. Tanszékünkön jelenleg is intenzív kutatások folynak ebben az irányban.

Végül megemlíjük az Eötvös-inga mérések egy újabb lehetséges és igen időszerű geodéziai alkalmazási területét, amely a műholdak méréseihez kapcsolódik és különösen a 2006-ban indítandó ún. GOCE (Gravity and Ocean Circulation Experiment) műhold gradiométeres méréseihez (RUMMEL 2002) fog rendkívül fontos adatokat szolgáltatni. A világon egyedülálló magyarországi Eötvös-inga mérések segítségével ugyanis lehetőség nyílik arra, hogy elvégezzük ezeknek a gradiens értékeknek a műhold 250 km-es magasságára ún. analitikai felfelé folytatással történő átszámítását, amely közvetlenül összehasonlítható lesz a GOCE gradiométer által szolgáltatott gradiensekkel. Ezáltal mód nyílik a műhold mérési adatainak kalibrációjára valódi földfelszínen mért gradiens adatok segítségével. Ez a modern

geodéziai alkalmazás nagyszerű példáját adja annak, hogyan kapcsolódnak Eötvös Loránd több mint száz esztendeje megfogalmazott eredeti gondolatai napjaink legmodernebb mérési technikájához.

Megjegyzés

Az Eötvös-inga mérési eredmények geodéziai hasznosításával foglalkozó legújabb kutatásaink az MTA Fizikai Geodézia és Geodinamika Kutatócsoport, a Görög-Magyar Kormányközi TÉT együttműködés keretében, illetve a T-030177 és a T-037929 sz. OTKA támogatásával folynak.

Irodalom

- Badekas J., Mueller I.I.: Interpolation of deflections from horizontal gravity gradients. Reports of the Department of Geodetic Science, No. 98, The Ohio State University, (1967)
- Detrekői Á. : Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest, (1991)
- Eötvös L.: Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwaage. *Roland Eötvös Gesammelte Arbeiten. Akadémiai Kiadó*, Budapest (Ed.: Selényi P.), pp. 91-160. (1953)
- Eötvös L.: Bericht über Geodätische Arbeiten in Ungarn Besonders über Beobachtungen mit der Drehwaage. *Roland Eötvös Gesammelte Arbeiten. Akadémiai Kiadó*, Budapest (Ed.: Selényi P.), pp. 231-276. (1953)
- Hein G.: Untersuchungen zur terrestrischen Schweregradiometrie, in *Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission*, Reihe C 264, DGK, München, (1978)
- Heineke U.: Untersuchungen zur Reduktion und geodätischen Verwendung von Drehwaagemessgrößen. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, No.86, (1978)
- Oltay K.: Az Eötvös-ingával végzett függővonal-deviáció meghatározások pontosságának vizsgálata geodéziai és asztronómiai mérésekkel. *Országos Magyar Természettudományi Alap*, Budapest. pp. 1-78. (1927)
- Oltay K.: Az Eötvös-ingával végezhető relatív nehézséggyorsulás mérések pontossága. *Országos Magyar Természettudományi Alap*, Budapest. pp. 1-111. (1928)
- Renner J.: A függővonalelhajlás. *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közleményei*. V./1-2. (1952)
- Renner J.: Untersuchungen über Lotabweichungen. *Acta Technica*. XV./1-2. pp. 37-75. (1956)
- Renner J.: Újabb vizsgálatok a függővonalelhajlások körében. *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közleményei*. XXI./1-4. pp. 99-113.(1957)
- Rummel R., Balmino G., Johannessen J., Visser P., Woodworth P. : Dedicated gravity field missions - principles and aims. *Journal of Geodynamics*, Vol.33, pp 3-20, (2002)
- Szabó Z.: Az Eötvös-inga története. *Magyar Geofizika*. Vol. 40, No.1, pp. 26-38, (1999)
- Tóth Gy. : Eötvös-inga mérések és geodéziai alkalmazásuk. *Geomatikai Közlemények III*, pp. 149-156, (2000)

- Tóth Gy., Rózsa Sz., Ádám J., Tziavos I.N. : Gravity field modelling by torsion balance data - a case study in Hungary. In Ádám, J and Schwarz, K-P. editors, *Vistas for Geodesy in the New Millennium*, vol. 125 of IAG Symposia, pp 193-198, Springer Verlag, (2002)
- Völgyesi L.: Eötvös-inga mérések bevonása a függővonal-elhajlás komponensek meghatározásába. Tanulmány, *BME Geodéziai Int. Felsőgeodézia Tsz.* (1976)
- Völgyesi L.: Interpolation deflection of the vertical based on torsion balance results. *Periodica Polytechnica C.E.*, Vol.21. No.1-2., 127-138, Budapest, (1977)
- Völgyesi L.: Interpolation of Deflection of the Vertical from Horizontal Gradients of Gravity. *Proceedings of the 3rd Int. Symp. on Geodesy and Physics of the Earth*, 561-567, Potsdam (1977)
- Völgyesi L.: Függővonal-elhajlás interpoláció Eötvös-inga mérési eredmények alapján I-II. *Magyar Geofizika XVIII. évf. 5, 6.sz.*, 189-196, 226-230 (1977)
- Völgyesi L.: Correction of torsion balance measurements used for interpolating the deflection of the vertical. *Periodica Polytechnica C.E.*, Vol.24. No.1-2., 199-210, Budapest (1980)
- Völgyesi L.: Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Gravity Gradients. *Periodica Polytechnica C. E.*, Vol.37. No.2, pp. 137-166 (1993)
- Völgyesi L.: Test Interpolation of Deflection of the Vertical in Hungary Based on Gravity Gradients. *Periodica Polytechnica C.E.*, Vol.39. No.1, pp. 37-75 (1995)
- Völgyesi L.: Geoid Computations Based on Torsion Balance Measurements. *Reports of the Finnish Geodetic Institute* 98:4, pp. 145-151 (1998)
- Völgyesi L.: Local geoid determinations based on gravity gradients. *Acta Geodaetica et Geophysica Hung.* Vol.36 (2), pp. 153-162 (2001)
- Völgyesi L.: Geodetic applications of torsion balance measurements in Hungary. *Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology*, No.2 (57), pp. 203-212 (2001)
- Tóth Gy., Völgyesi L.: Comparison of interpolation and collocation techniques using torsion balance data. European Geophysical Society XXVII General Assembly, Nice; *Geophysical Research Abstracts*, EGS, Vol.4, (2002).

Importance of Eötvös torsion balance measurements and their geodetic applications

L. Völgyesi - Gy. Tóth
Summary

There is a long tradition of research based on Eötvös torsion balance measurements for geodetic applications in the Department of Geodesy and Surveying, TUB. We summarize in this paper the most important results of this long-term research.

* * *

Völgyesi L, Tóth Gy (2002): [Az Eötvös-inga mérések jelentősége és geodéziai alkalmazásuk](#). Geodézia és Kartográfia, Vol. 54, Nr. 10, pp. 28-33.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.
Web: <http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi> E-mail: volgyesi@eik.bme.hu