

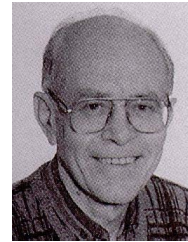
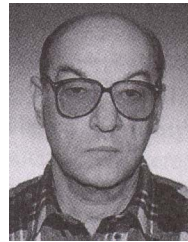
# Az Eötvös-inga mérések geodéziai célú hasznosításának helyzete Magyarországon

Dr. Völgyesi Lajos egyetemi docens<sup>1,2</sup>, dr. Tóth Gyula egyetemi docens<sup>1,2</sup>  
dr. Csapó Géza szaktanácsadó<sup>3</sup> Szabó Zoltán szaktanácsadó<sup>3</sup>,

<sup>1</sup>BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

<sup>2</sup>MTA-BME Fizikai Geodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport

<sup>3</sup>Eötvös Loránd Geofizikai Intézet.



Az MTA Geodéziai Tudományos Bizottságának Felsőgeodéziai és Geodinamikai Albizottsága legutóbbi ülésén áttekintette az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosításának helyzetét Magyarországon, megvitatta az ezzel kapcsolatban folyó kutatási fejlesztési tevékenységet és a jövőbeli terveket.

A korábbi években a geodézia számára szükséges nehézségi adatokat a graviméteres felmérések több százezres adatbázisa szolgáltatta. Magyarország viszont abban a szerencsés helyzetben van, hogy a viszonylag nagy pontosságú gravimetriai felmérés mellett, nagy összefüggő területrészekben végeztek Eötvös-inga méréseket is. Az utóbbi években végzett kutatások legfontosabb feladata az Eötvös-inga mérések eredményeinek bevonása a nehézségi erőter finomszerkezetének meghatározásába, elsősorban a függővonal-elhajlások illetve a helyi geoidformák meghatározása céljából. További fontos lehetőség a nehézségi rendellenességek és a függőleges gradiensek meghatározása a torziós-inga mérések alapján. Emellett az Eötvös-inga mérések újabb lehetséges és igen időszerű geodéziai alkalmazása a műholdak méréseihez is kapcsolódik, ugyanis a nagy területre kiterjedő valódi földfelszínen mért gradiens adatok felhasználásával lehetőség kínálkozik a 2006-ban indítandó GOCE műhold gradiométeres méréseinek összehasonlítására (hitelesítésére).

## 1 A magyarországi Eötvös-inga mérések rövid története

A torziós-inga mérések Eötvös Loránd nevéhez fűződnek, aki az 1880-as évek közepén kezdett gravitációs kutatásokkal foglalkozni. Kutatásainak elsődleges célja a nehézségi erő

potenciál-felületeinek, és ezen keresztül a Föld elméleti (matematikai) alakjának vizsgálata volt. Kezdeti méréseit Coulomb-féle ingával végezte. Ezekről a kísérletekről a Magyar Tudományos Akadémián elnöki újraválasztásakor mondott beszédében az alábbiakban emlékezik meg: „A középkor előítéleteinek és csodaszereinek lovtárából előkerestem a varázsvesszőt ... egyszerű egyenes vessző az az eszköz is, melyet én használtam, végein különösen megterhelve és fémtokba zárva. ... A Coulomb-féle mérleg különös alakban, annyi az egész. Egyszerű, mint Hamlet fuvolája, csak játszani kell tudni rajta. ... Eljárásommal bármely helyen, ahol eszközümet felállíthatom ... megállapíthatom, milyen az alakja a földfelület bár csak tenyérnyi nagyságú részének ...”

1891-ben megépített műszerével már ugyanazon év augusztusában végrehajtotta első terepi méréseit a Celldömölk melletti Ság-hegyen. Ez időponttól kezdve munkásságának jelentős hányadát ingájának tökéletesítésére szentelte, mely során a műszer érzékenységének és pontosságának megőrzése mellett a méretek és a mérési idő csökkentésére törekedett. Az első térképezés jellegű felmérésre 1901 elején került sor a Balaton jegén, amelyet a következő évtől kezdődően követtek a terepi mérések.

Eötvös az 1900. évi párizsi fizikus kongresszuson lépett ingájával a nemzetközi tudományos közvélemény elé, melynek tagjai bizonyos kétkedéssel fogadták a szabadban végzett méréseinek pontosságát. E kételyek az Internationale Erdmessung 1906. évi, Budapesten tartott XV. konferenciáján szűntek meg, amikor a konferencia résztvevői meglátogatták az Arad környéki torziós-inga méréseket. A tapasztaltak olyan nagy hatással voltak a konfe-

rencia résztvevőire, hogy a mérések nagy tudományos jelentőségére való hivatkozással beadványban kérték a magyar kormányt, hogy támogassa Eötvös kutatásait, amelyeket addig kisebb részben az Akadémia, nagyobb részben Semsey Andor a magyar tudomány nagy mecénása támogatott. A kormány helyt adott a konferencia kérésének és a következő évtől kezdődően évi 60.000 koronával támogatta Eötvös kísérleteit és méréseit, ezzel megalapozva a geofizikai kutatások önállósodását a Fizikai Intézet keretein belül.

Eötvös első terepi méréseivel egy időben olyan számítási eljárást dolgozott ki, melynek segítségével torziós-inga mérések adataiból meghatározható két közeli pont között a függővonal-elhajlás változása. Ha torziós ingával felmért terület néhány pontján csillagászati geodéziai módszerekkel meghatározzuk a függővonal-elhajlásokat, akkor az ingamérések adataiból minden egyes további mérési pontra levezethetjük a függővonal-elhajlás értékét. Ily módon lehetőség nyílt arra, hogy torziós-inga mérések segítségével részleteiben tanulmányozhassuk a geoid alakját. Eötvös Arad környéki méréseire alapozva a világon elsőként készített ilyen részletes geoid térképet.

Eötvös 1919-ben bekövetkezett haláláig 1420 állomáson határozták meg a nehézségi erőter gradiensét és potenciálfelületének görbületi jellemzőit. A méréseket, ahol a topográfia megengedte, általában szabályos hálózatban végezték, kezdetben 3–4, majd 2 ill. 1 km-es állomástávolsággal. Az 1910-es évek kezdetétől Böckh Hugó, neves geológus kezdeményezései alapján egyre nagyobb kormányzati nyomás nehezedett Eötvösre a tekintetben, hogy mérési helyszíneinek megválasztásakor vegye figyelembe a nyersanyag-kutatások érdekeit. Eötvös igyekezett megőrizni kutatói függetlenségét, de a földtani szempontok ennek ellenére egyre nagyobb szerepet nyertek, halála után pedig meghatározóvá váltak.

A méréseket 1933-ig kizárólag éjszaka végezték, hogy így védekezzenek a gyors és szabálytalan hőmérséklet-ingadozás hatása ellen. 1934-ben lényeges változás következett be a mérésekben. Az újabb szerkesztésű ingák már kevésbé voltak érzékenyek a hőmérséklet-ingadozásra, ezért ettől kezdve már nappal is mérhettek. A sűrűbb állomáshálózatnak és az időközben megszerzett gyakorlatnak köszönhetően abbahagyták azt az Eötvös idejéből származó azt a gyakorlatot, hogy minden állomáson két ingával mértek. Közben elkészült az inga fotoregisztrálású, automata (AUTERBAL) változata is, amely feleslegessé tette az észlelő állandó jelenlétét. Az Eötvös Lóránd Geofizikai Intézet (ELGI) ugyan 1931-ben beszerzett egy AUTERBAL-ingát, de műszerállománya

zömét továbbra is a vizuális leolvasású ingák alkották. Az ELGI az utolsó terepi Eötvös-inga mérést 1966-ban végezte; az összes méréseinek száma mintegy 35000 állomás, amelyből több ezer pont a mai országhatáron kívül esik.

Az 1920-as évek kezdetétől a torziós ingák egyre nagyobb szerepet játszottak a kőolajkutatásban. Ezért, amikor 1933-ban a MAORT jogelődje az EUROGASCO kőolajkutatási koncessziót szerzett a Dunántúlra, maga is berendezkedett az Eötvös-ingás mérésekre. Eleinte az ELGI-től kölcsönöztek műszereket, majd hamarosan AUTERBAL ingákat szereztek be. A kőolajipar méréseit kizárólag gazdaságossági szempontok vezették, így kezdetben főleg utak mentén mértek, majd ahol a mérési eredmények kedvező földtani szerkezetet jeleztek, ott áttértek a hálózatos mérésekre. A Zalai dombvidéken, a terepi adottságok miatt, kénytelenek voltak méréseiket a völgyekre korlátozni.

A MAORT 1949 végén történt államosításáig kb. 27.000 Eötvös-inga mérést végeztek (Gombár és mások 2002). 1950-ben a geofizikai részleg átkerült az ELGI-hez, de az addig felhalmozódott észlelési anyag nem. Így ellenében az ELGI-vel, ahol az észlelési lapokat folyamatosan megőrizték, a dunántúli mérésekről csak térkép formában maradtak fenn Eötvös-inga mérési anyagok. 1963 és 1967 között az olajipar ismét berendezkedett Eötvös-inga mérésekre, melyeket általában szeizmikus szelvények nyomvonalán 300 m-es állomástávolsággal végeztek. Ebben az időszakban további, mintegy 2900 állomáson végeztek méréseket.

Geodéziai szempontból, – mivel itt elsősorban a görbületi adatokra van szükség – a kép meglehetősen vegyes. A terepi mérések során egy-két kísérleti programtól eltekintve, minden állomáson annyi azimutban észleltek, amennyi elég volt ahhoz, hogy állomásonként meg tudják határozni mind a görbületi, mind a gradiens értéket. A mérések tömegessé válásakor azonban különösen dombos területeken, a görbületi érték nehézkes földtani értelmezése miatt, ezek ábrázolását elhanyagolták. Az ELGI mérései esetében ez kisebb problémát jelent, mert az eredeti észlelési anyag nagy része a mai napig rendelkezésre áll. A MAORT által felmért területekről azonban hiányzanak az észlelési jegyzőkönyvek, ezért csak a térképen ábrázolt adatokra támaszkodhatunk. Így tehát csak azokon a területeken rendelkezünk görbületi információval, ahol ezeket ábrázolták.

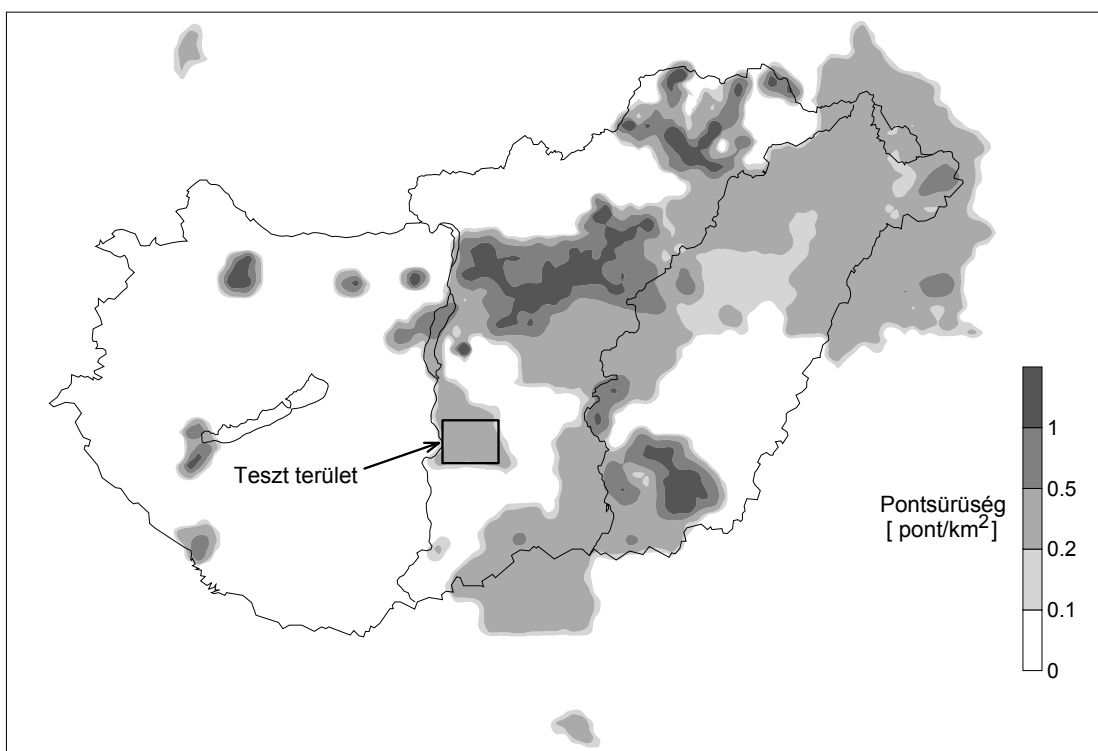
Azon túl, hogy Eötvös Arad környéki méréseiből meghatározott függővonal-elhajlás értékeit Oltay csillagászati-geodéziai mérésekkel ellenőrizte, a hazai Eötvös-inga mérések ered-

ményei a geodézia részéről, egészen a múlt század végéig, felhasználatlanul maradtak.

## 2 Az Eötvös-inga mérési adatok digitális adatbázisba rendezése

Az 1900-as évek utolsó évtizedeiben a BME akkori Felsőgeodézia Tanszéke felismerte, hogy a több 10.000 pontban végzett torziós inga mérés eredménye milyen értékes hozzájárulás lehet hazai geodéziai feladataink megoldásához (BME Felsőgeodézia Tanszék 1965), megkezdte geodéziai hasznosításuk előkészítését. Először kísérleti területen végzett vizsgálatokkal a feldolgozás módszerét korszerűsítették, majd a Tanszék és az ELGI a 90-es évek közepén kutatási együttműködési szerződést kötött a még meglévő mérési eredmények mentésére. Ennek keretében, valamint különböző pályázatok elnyerésével 1995 óta rendszeresen folyik a korábbi Eötvös-inga mérések anyagának digitális adatbázisba mentése (Csapó 1995-2004). Az adatbázist a különböző formában ma még fellelhető mérési anyagok (észlelési lapok, mérési jegyzőkönyvek, térképek, vagy fénymásolt gradienstérképek) alapján alakítják ki. A 2004. év végéig digitalizált adatok területi eloszlását az 1. ábrán láthatjuk. Az adatbázis jelenleg 24310 Eötvös-inga mérés adatait tartalmazza az alábbi formában: a mérési állomás száma, a mérés éve, az állomás Kraszovszkij ellipszoidra

vonatkozó  $\varphi$  és  $\lambda$  földrajzi koordinátája, a nehézségi gradiens  $W_{zx}$   $\hat{E}$ -i és a  $W_{zy}$   $\hat{K}$ -i összetevője, a  $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$  és a  $2W_{xy}$  görbületi jellemzők, valamint sorra a  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$ ,  $W_{\Delta}$ ,  $2W_{xy}$  értékekhez tartozó topografikus javítások. A  $W_{zx}$  és a  $W_{\Delta}$  görbületi értékek a valódi mért értékek (tehát nem vonták le belőlük a geodéziai vonatkoztatási rendszer normál potenciálfüggvényének az  $U_{zx}$  és az  $U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx}$  második differenciálhányadosait, amit röviden normálértékeknek szokás nevezni). A topografikus javítások a mérési pontok környezetében 8 irányban elvégzett szintezésből kiszámított értékek (tagoltabb domborzatú területeken a térképi hatást is tartalmazzák). A topografikus javítással ellátott inga-mérési eredmények kiszámításához ezeket a javításokat kell levonni a mért  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$ ,  $W_{\Delta}$  és  $2W_{xy}$  értékekből. Az ELGI munkatársai az adatok hitelesítése és ellenőrzése során a kívánt méretaránynak megfelelően minden egyes állomás helyén rajzilag ábrázolták a gradiens és a görbületi értékeket az állomásszám feltüntetésével. Az így előállított térképet összevetették az eredeti térképekkel, szükség esetén a mérési jegyzőkönyvekkel, amelyek segítségével kiszűrhetővé váltak a hibásan rögzített adatok. Szükség esetén, az eredeti jegyzőkönyveknek megfelelően, a hibákat kijavították.



1. ábra. 1995-2004 között digitális adatbázisba rendezett 24310 db. Eötvös-inga mérési állomás területi eloszlása és pontsűrűsége

### 3 Eddigi eredmények az ingamérések geodéziai hasznosítása területén

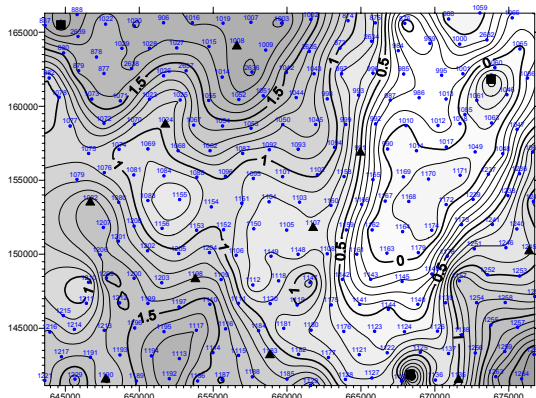
#### 3.1 Függővonal-elhajlás interpoláció

A  $\xi$  és az  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevők tetszőleges  $i$  és  $k$  pont közötti  $\Delta\xi_{ik}$  és  $\Delta\eta_{ik}$  megváltozása valamint az Eötvös-ingával mérhető  $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$  és  $2W_{xy}$  görbületi jellemzők között a

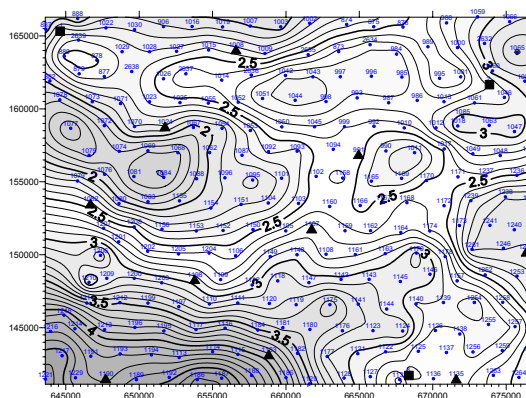
$$\Delta\xi_{ik} \sin \alpha_{ki} - \Delta\eta_{ik} \cos \alpha_{ki} = \frac{s_{ik}}{4g} \left\{ [(W_{\Delta} - U_{\Delta})_i + (W_{\Delta} - U_{\Delta})_k] \sin 2\alpha_{ki} + [(W_{xy} - U_{xy})_i + (W_{xy} - U_{xy})_k] \cos 2\alpha_{ki} \right\}$$

összefüggés írható fel, ahol  $U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx}$ ,  $s_{ik}$  az  $i$  és a  $k$  pont közötti távolság,  $g$  az átlagos nehézségi gyorsulás értéke a pontok között,  $U_{xx}$ ,  $U_{yy}$  és az  $U_{xy}$  a normál nehézségi erőter szintfelületeinek görbületi jellemzői amiket röviden a görbületi jellemzők normál értékének mondunk,  $\alpha_{ki}$  pedig az  $i$  és a  $k$  pont közötti egyenes azimutja (Völgyesi 1993, 1995). A számítás alapvetően vonal menti integrálás, amely a gyakorlatban a trapéz integrálközelítő képlettel abban az esetben oldható meg ha az Eötvös-ingával mérhető görbületi jellemzők két szomszédos pont közötti megváltozása lineárisnak tekinthető (Völgyesi 1993).

A BME Általános- és Felsőgeodézia tanszékén rendelkezésre áll a nagy, összefüggő területre alkalmazható és a modern számítástechnika által kínált lehetőségeknek leginkább megfelelő függővonal-elhajlás interpolációs módszer és az erre kifejlesztett szoftver (Völgyesi 1993, 1995). A Cegléd és a Szabadszállás-Kiskörös környéki teszt területeken elvégzett kísérleti számítások eredményei szerint a  $\xi$  és az  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevők közel fél szögmásodperces megbízhatósággal számíthatók. A 2. és 3. ábrán az említett teszt területen számított függővonal-elhajlás össze-  
tevéők képe látható.



2. ábra. Interpolált  $\xi$  értékek



3. ábra. Interpolált  $\eta$  értékek

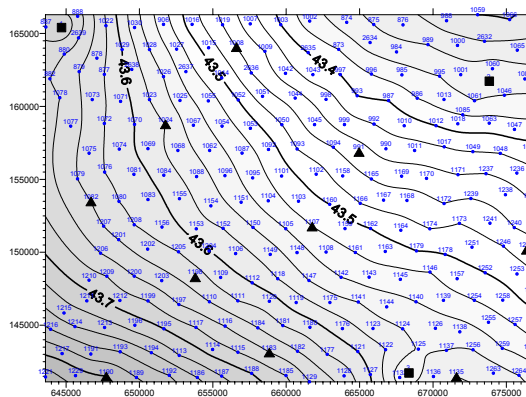
#### 3.2 Helyi geoidformák meghatározása

A  $P_i$  és a  $P_k$  pont között a geoid-ellipszoid távolság  $\Delta N_{ik}$  különbsége az (1) felhasználásával számított  $\xi$ ,  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevők ismeretében a csillagászati szintezés módszerét alkalmazva a

$$\Delta N_{ik} = \left( \frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin \alpha_{ik} \right) s_{ik}$$

összefüggés segítségével határozható meg.

Kiküszöbölve a hagyományos csillagászati szintezés, négyzetháló sarokpontjaira történő számításának problémáját, közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontok helye választható a geoid számítások céljára. Így a  $\Delta N_{ik}$  különbségeket nem É-D illetve K-Ny irányban, hanem az Eötvös-inga mérési állomások pontjai között, tetszőleges  $\alpha$  azimutban határozhatjuk meg (Völgyesi 1998, 2001).



4. ábra. A meghatározott geoidkép

A módszer alkalmazhatóságára – a már említett Cegléd és a Szabadszállás-Kiskörös környéki teszt területeken – elvégzett kísérleti számítások tanúsága szerint az  $N$  geoidmagasságok  $\pm 4\text{cm}$  megbízhatósággal számíthatók (Völgyesi, 2001). A 4. ábrán az említett teszt területre meghatározott geoidkép látható.

### 3.3 Nehézségi rendellenességek meghatározása Eötvös-inga adatokból

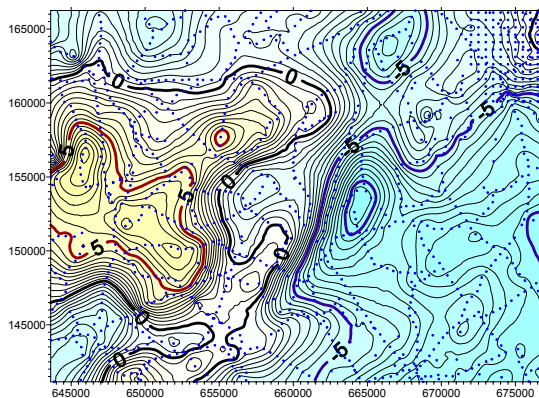
Tetszőleges  $i$  és  $k$  pont esetén a  $g$  valódi és a  $\gamma$  normál nehézségi érték  $\Delta g = g - \gamma$  különbsége, a nehézségi rendellenesség  $\Delta g_k - \Delta g_i$  megváltozása valamint az Eötvös-ingával mérhető  $W_{zx}$  és  $W_{zy}$  vízszintes gradiensek között felírható az

$$\Delta g_k - \Delta g_i = \frac{s_{ik}}{2} \left\{ (W_{zx} - U_{zx})_i + (W_{zx} - U_{zx})_k \cos \alpha_{ik} + (W_{zy})_i + (W_{zy})_k \sin \alpha_{ik} \right\}$$

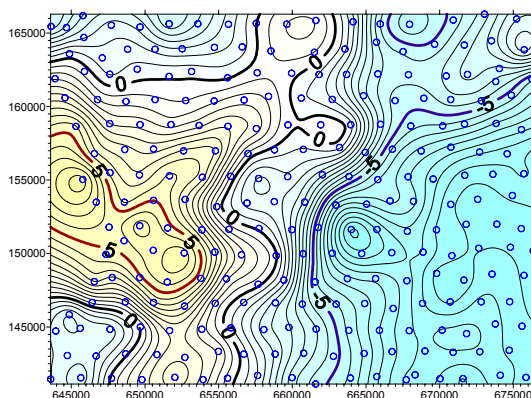
összefüggés, ahol  $s_{ik}$  az  $i$  és a  $k$  pont közötti távolság,  $U_{zx}$ , és  $U_{zy}$  a vízszintes gradiensek normál értéke,  $\alpha_{ik}$  pedig az  $i$  és a  $k$  pont közötti vonal azimutja (Völgyesi, Tóth, Csapó 2004).

A módszer alkalmazhatóságára a már említett Szabadszállás-Kiskörös környéki területen kísérleti számítások történtek, ahol 248 Eötvös-inga mérés és 1197 graviméteres mérés eredményei álltak rendelkezésre. Az 5. ábrán a graviméteres mérések alapján meghatározott  $\Delta g = g - \gamma$  rendellenességek izovonalas térképe látható. A méréseket alapvetően Worden graviméterekkel mintegy  $\pm 20-30 \mu\text{Gal}$  megbízhatósággal végezték; az 5. ábrán az apró pontok a graviméteres mérések helyszínét jelölik.

A 248 Eötvös-inga mérési pontból 30 pontban volt lehetőség a rendellenesség értékek rögzítésére, a fennmaradó 218 pontban pedig az Eötvös-ingával mért  $W_{zx}$  és  $W_{zy}$  vízszintesgradiensek alapján interpolációval határoztuk meg a nehézségi rendellenességeket. Az így interpolált értékek izovonalas térképét a 6. ábrán láthatjuk; az ábrán az inga mérések helyszínét kis körök jelölik.



5. ábra. Nehézségi rendellenességek  $g$  mérések alapján



6. ábra. Interpolált nehézségi rendellenességek a  $W_{zx}$  és a  $W_{zy}$  gradiens értékek alapján

Az  $n = 218$  pontban a méréssel és az interpolációval meghatározott  $\Delta g_i^{\text{mért}}$  és  $\Delta g_i^{\text{int.}}$  nehézségi rendellenességek alapján az

$$m_{\Delta g} = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta g_i^{\text{mért}} - \Delta g_i^{\text{int.}})^2}$$

összefüggés felhasználásával az interpolált értékek középhibája  $m_{\Delta g} = \pm 1.281 \text{ mGal}$ .

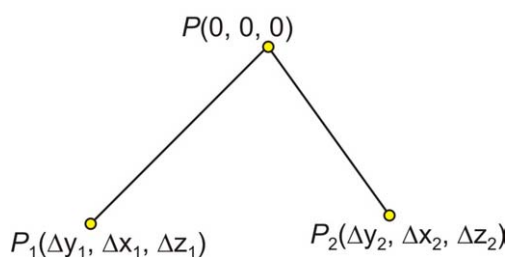
### 3.4 Függőleges gradiensek meghatározása Eötvös-inga adatokból

Mint köztudott, az Eötvös-inga adatokból közvetlenül előállíthatók a  $T = W - U$  potenciálzavar különböző második deriváltjai, azaz a  $T_{zx}$ ,  $T_{zy}$  vízszintes nehézségi gradiensek és a  $T_{\Delta} = T_{yy} - T_{xx}$ ,  $2T_{xy}$  görbületi értékek. Kevésbé ismert viszont az a Haalck (1950) által javasolt eljárás, amelynek segítségével az Eötvös-inga mérési adataiból többek között a hiányzó  $T_{zz}$  függőleges gradiens is (legalábbis relatív értelemben) kiszámítható! Ezáltal teljes képet nyerhetünk a szintfelületek helyi felületdarabjainak alakjáról és így az akár analitikusan elő is állítható.

Ez az eljárás, a csillagászati szintezéshez hasonlóan, a függőleges gradiensek *különbségeit* állítja elő Eötvös-ingával mért legalább három pont között. Ebből következik, hogy a függőleges gradiens értékét egy adott terület legalább néhány pontjában ismernünk kell ahhoz, hogy az eljárással a függőleges gradiens abszolút értelemben is meghatározható legyen. A következőkben ezt az eljárást ismertetjük, illetve tesztszámításokkal mutatjuk meg a módszer működőképességét.

A jobbsodrású koordináta-rendszerünk  $x$  tengelye Északra,  $y$  tengelye Keletre,  $z$  tengelye pedig lefelé mutat. A 7. ábra szerint felírhatjuk egy tetszőleges  $T$  függvény (ez lehet akár valamely Eötvös-inga mérési eredmény, például

$W_{yy}-W_{xx}, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz}$  ) megváltozását a P pont és a  $P_1, P_2$  pontok között.



7. ábra. Függőleges gradiens számítása három Eötvös-inga mérési állomás között

$$\begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 & \Delta x_1 & \Delta z_1 \\ \Delta y_2 & \Delta x_2 & \Delta z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ T_x \\ T_z \end{bmatrix}$$

A fenti képletben  $T$  egy tetszőleges függvényt jelöl,  $T_y, T_x, T_z$ , pedig a függvény  $y, x$  és  $z$  irányú ismeretlen deriváltjait. Mivel 4-féle mérési eredmény van, ezért elvileg az alábbi 12

ismeretlen kellene meghatározni a 7. ábrán látható 3 pont közötti  $4 \times 2 = 8$  ismert értékből:

$$\begin{bmatrix} W_{\Delta y} & W_{yxy} & W_{yzy} & W_{xzy} \\ W_{\Delta x} & W_{yxx} & W_{yzx} & W_{xzx} \\ W_{\Delta z} & W_{yxz} & W_{yzz} & W_{xzz} \end{bmatrix}$$

Az ismeretlenek meghatározása azért lehetséges mégis, mert a fenti 12 ismeretlen között még további 5, részben a Laplace-egyenlet  $x, y$  szerinti deriválásából levezethető, részben pedig szimmetria összefüggés áll fenn:

$$\begin{aligned} W_{\Delta z} &= W_{yzy} - W_{xzx} \\ W_{xyx} &= W_{xzy} \\ W_{yzz} &= -W_{\Delta y} - 2W_{xyy} \\ W_{xzy} &= W_{yzx} \\ W_{xzz} &= W_{\Delta x} - 2W_{yxy} \end{aligned}$$

A maradék 7 ismeretlenre tehát felírható az alábbi 8 egyenlet:

$$\begin{bmatrix} \Delta W_{\Delta 1} \\ \Delta W_{\Delta 2} \\ \Delta W_{yx1} \\ \Delta W_{yx2} \\ \Delta W_{yz1} \\ \Delta W_{yz2} \\ \Delta W_{xz1} \\ \Delta W_{xz2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 & \Delta x_1 & 0 & 0 & \Delta z_1 & -\Delta z_1 & 0 \\ \Delta y_2 & \Delta x_2 & 0 & 0 & \Delta z_2 & -\Delta z_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y_1 & \Delta x_1 & 0 & 0 & \Delta z_1 \\ 0 & 0 & \Delta y_2 & \Delta x_2 & 0 & 0 & \Delta z_2 \\ -\Delta z_1 & 0 & 0 & -2\Delta z_1 & \Delta y_1 & 0 & \Delta x_1 \\ -\Delta z_2 & 0 & 0 & -2\Delta z_2 & \Delta y_2 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & \Delta z_1 & -2\Delta z_1 & 0 & 0 & \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ 0 & \Delta z_2 & -2\Delta z_2 & 0 & 0 & \Delta x_2 & \Delta y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{\Delta y} \\ W_{\Delta x} \\ W_{yxy} \\ W_{yxx} \\ W_{yzy} \\ W_{xzx} \\ W_{yzx} \end{bmatrix}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva (például az ismeretlenekből számított és a mérésekből levezetett értékek közötti négyzetes eltérést minimalizálva), az így kiszámított ismeretlenekből meghatározható a P pontban a  $W_{zz}$  függőleges gradiens 3 deriváltja, az alábbi (a Laplace-egyenlet deriválásával származtatható) összefüggések szerint:

$$\begin{aligned} W_{zzy} &= -W_{\Delta y} - 2W_{yxx} \\ W_{zxx} &= W_{\Delta x} - 2W_{yxy} \\ W_{zzz} &= -W_{yzy} - W_{xzx} \end{aligned}$$

Egy tetszőleges vonal összes pontjára, a kezdő- és a végpontot kivéve, a fentiek szerint meghatározható a  $W_{zz}$  függőleges gradiens 3 deriváltja. Ezután pedig a kezdőpontból kiindulva a  $W_{zz}$  függőleges gradiens  $(i, i+1)$ -edik szakaszra eső

változásait szummázva levezethető a vonal minden pontjában a függőleges gradiens értéke. A vonal közbenső pontjaiban a függőleges gradiens 3 deriváltjának a szakaszra vonatkozó átlagértékeit használhatjuk fel a számításban, míg a két végpontban a szomszédos pontbeli felvett érték használható.

Az egész számítás egy egyszerű tömegmodell potenciálterét felhasználva ellenőrizni tudjuk. Legyen a tömegmodellünk egy 20m élhosszúságú,  $\rho = 2670 \text{ kg/m}^3$  sűrűségű kocka, a felszín ( $z = 0$  szint) alatt 20 m-es mélységben, azaz a kocka középpontjának koordinátái  $(0, 0, 30)$  méter. A tömegmodellből ugyanis szabatosan kiszámítható az erőter minden

$$[\Delta W_{zz}]_{i,i+1} = [\Delta y \quad \Delta x \quad \Delta z]_{i,i+1} \begin{bmatrix} W_{zzy} \\ W_{zzy} \\ W_{zzz} \end{bmatrix}_{i,i+1}$$

szükséges jellemzője, ezután pedig a fenti interpolációs eljárással előállítható a függőleges gradiens értéke a kiválasztott pontokban (ezek egy térbeli sokszögvonal pontjai). Ezután már számszerűen is összehasonlíthatjuk a modell erőterében kiszámított tényleges függőleges gradienseket az interpolációval meghatározott értékekkel.

Az interpolációval kapott függőleges gradienseknek a tömegmodellből számított gradiensektől vett eltérései a 8. ábrán láthatók.



8. ábra. Függőleges gradiens számítása egy példaként felvett 69 méter hosszúságú térbeli sokszögvonalra. Az  $\times$ -szel jelölt vonal a tömegmodellből számított, a  $\square$ -tel jelölt a tömegmodellből szimulált Eötvös-inga mérésekből kiindulva a fenti számítási eljárással meghatározott értékeket jelöli.

Az eltérések szórása  $\pm 4,68 E$ , ami a függőleges gradiensek  $\pm 22,79 E$  szórásának 20,5 %-a. Mindegyik oldal hosszát a felére csökkentve, de a vonal helyzetét (a kezdőpontjának a koordinátáit) megtartva, a kapott eltérések szórása  $\pm 1,29 E$ , ami a függőleges gradiensek  $\pm 10,05 E$  szórásának 12,9 %-a, tehát jelentősen csökken. Ez a számítás tehát azt mutatja (ahogyan az várható is), hogy az oldalhosszokat csökkentve a számítás hibája is jelentősen csökken. Az optimális mérési ponttávolság nyilván függ az erőter szerkezetétől is.

A fentiekben ismertetett számítási eljárás tehát lehetővé teszi az erőter helyi szerkezetének nagy pontosságú meghatározását, beleértve a függőleges nehézségi gradiensek részletes térképének szerkesztését is, a meglévő Eötvös-inga mérések és kellő számban mért függőleges nehézségi gradiensek, mint kiinduló adatok segítségével. Az a tény, hogy a függőleges gradiens számítás, és ehhez kapcsolódva a szintfelületek teljes geometriai jellemzése lehetséges csupán az Eötvös-inga mérések segítségével, még inkább mutatja a meglévő mérések jelentőségét a különböző lehetséges alkalmazási területek, közöttük a nagy pontosságú gravimetria és geoidmeghatározás számára.

### 3.5 A nehézségi erőter potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciója Eötvös-inga adatok alapján

Eljárást dolgoztunk ki a nehézségi erőter potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciójára. A módszer a potenciálfüggvény meghatározására nyújt lehetőséget a nehézségi erőter gradiensei és a potenciál első deriváltjai együttes inverziójának felhasználásával. A nehézségi erőter gradiensei Eötvös-inga mérésekből, az első derivált adatok a függővonal elhajlásokból származtathatók. Az így rekonstruált potenciálfüggvényből számos gyakorlati fontosságú tér (pl. függővonal-elhajlások) származtathatók a vizsgált terület bármely pontjában. Az eljárás előnye, hogy mindezt egy jelentősen túlhatározott inverz probléma megoldásával tehetjük (Dobróka, Völgyesi 2005). Az egyelőre szintetikus adatokon elvégzett vizsgálataink szerint a nagyszámú Eötvös inga mérés és néhány függővonal-elhajlási adat együttes inverziójára kidolgozott eljárás meglehetősen pontos paraméterbecslést eredményez. Jelenleg a módszer gyakorlati alkalmazására kísérleti számítások folynak a Kiskőrös környéki teszt területen.

### 3.6 A kollokáció alkalmazása

Az Eötvös-inga mérések geodéziai célú hasznosításával kapcsolatban már korábban is végeztünk vizsgálatokat a legkisebb négyzetes kollokáció módszerével (Völgyesi, Tóth 2004). Megmutattuk, hogy a módszer hogyan alkalmazható nehézségi rendellenességek és geoidundulációk számítására abban az esetben, ha rendelkezésünkre állnak az ingamérések és a geodéziai vonatkoztatási rendszer normál nehézségi erőtere. Rámotattunk, hogy az eljárás kiválóan alkalmas az Eötvös-inga mérések feldolgozására, hiszen képes az adatok statisztikai jellemzői (a kovariancia függvények) ismeretében különböző típusú adatok egységes kezelésére.

A legkisebb négyzetek szerinti kollokációval végzett predikció összefüggéseit például Detrekői (1991) ismerteti. Az alap-egyenlet a jól ismert

$$s = C_{sl}(C_{ss} + C_{nn})^{-1} \ell$$

összefüggés, ahol az  $\ell$  a mérési adatok vektora,  $s$  a predikció eredménye az ismert vagy ismeretlen ponton,  $C_{ss}$  a jel-,  $C_{nn}$  a zaj-kovariancia mátrix,  $C_{sl}$  pedig a mérések és a predikálandó jel kovariancia mátrixa.

Ezt a matematikai-statisztikai eljárást alkalmazva lehetőségünk van nehézségi térképek szerkesztésére, vagyis arra, hogy azokon a területeken, ahol a graviméteres mérések kis sűrűségűek és inhomogén területi eloszlásúak,

az Eötvös-inga mérések segítségével a nehézségi adatokat sűrítjük (Tóth, Merényi, 2005).

A kollokáció másik alkalmazási területe lehet az Eötvös-inga mérési adatok vizsgálata a kollokáció segítségével. Az Eötvös-inga mérési adatok vizsgálatához az „egyet kihagyok” predikció elvét alkalmaztuk. Ez azt jelenti, hogy minden egyes Eötvös-inga mérési pontra a pont általunk választott közeli *környezetéből* (természetesen a vizsgált pont méréseit kihagyva) predikciót végzünk a vizsgált pontra. Ezután megnézzük a predikált értékek és a ténylegesen ott megmért értékek eltérését és viszonyítjuk azt a predikció hibájához. Ezt az összes vizsgált ponton elvégezve láthatjuk azt, hogy vannak-e statisztikailag „kivágó” értékek, vagyis olyan pontok, ahol az eltérés a tényleges értéktől a predikció hibáját is figyelembe véve statisztikailag szignifikáns (Tóth, Völgyesi, 2005).

Az eljárást sikeresen kipróbáltuk 700 kiválasztott Eötvös-inga mérési pontban és ezek közül csak három mérési pontban találtunk kivágó értékeket. Ezek az eredmények ígéretesek a közeljövőben tervezett új magyarországi geoidmegoldás fényében.

#### 4 A soronkövetkező feladatok

##### 4.1 Az Eötvös-inga mérési adatok digitális adatbázisba rendezésének folytatása

Az ELGI-ben már csak kevés ingamérés adatai várnak feldolgozásra, 2005-ben ennek a még használható mérési anyagnak a számítógépes adatbázisba töltésére kerül sor. A feldolgozásra váró területek adatait az 1. táblázatban foglaltuk össze.

1. táblázat. Eddig adatbázisba nem mentett Eötvös-inga mérések az ELGI-ben

terület	mérés éve	pontok száma
Parád-Bükkszék	1936	839
Bátor	1937	164
Várpalota-Nádaslad.	1955	339
Tata (Fényes forrás)	1965	54
Felcsút	1966	190
összesen:		1586

Az 1. táblázatban felsorolt területek mérési adatai közül lehetnek feldolgozásra már alkalmatlan állapotban lévők is, ez azonban csak a tényleges feldolgozás során derül ki.

A következő fontos feladat a dunántúli MAORT mérési anyag feldolgozása. Ezek egy része különböző méretarányú, többnyire fénymásolt térképeken, jobb-rosszabb állapotban maradt fenn. Az anyag digitalizálásakor a

helykoordináták meghatározásához a térképen ábrázolt tereptárgyakhoz igazodva meg kell szerkeszteni a koordináta hálózatot, majd a görbületi és a gradiens értékek nagyságát és irányát lemérve ki lehet számítani a gradiens ill. görbületi összetevőket. A fellelhető MAORT anyag mennyiségének felmérése és adatbázisba szervezése sok és aprólékos munkát igényel. Jelenlegi ismereteink és reményeink szerint a mérési anyag nagyobbik hányada ilyen módon további felhasználásra alkalmas formába hozható.

##### 4.2 Kísérleti mérések Eötvös ingával

Az Eötvös-inga mérési eredmények alapján számított függőleges gradiens ellenőrzéséhez szükséges ezek pontos graviméteres meghatározása. Mivel a korábbi Eötvös-inga mérési pontok zöme olyan területen található, ahol nem biztosítató a függőleges gradiens graviméterekkel történő pontos meghatározása, ezért szükséges további Eötvös-inga mérések elvégzése erre alkalmas helyeken.

Sajnálatos tény, hogy az idők során nem csak a mérési anyagok koptak meg, hanem a mérőműszerek is elkallódtak vagy elpusztultak. Ma már csupán egy-két olyan Eötvös-inga van Magyarországon, amellyel felújítás és a szükséges műszervizsgálatok elvégzése után terepi méréseket lehetne végezni. Tekintettel arra, hogy a BME-ELGI kutatási együttműködés tervében szerepelnek Eötvös ingával végzendő mérések, ezért igen fontos az ELGI műszerének használhatóvá tételéhez szükséges anyagi fedezet előteremtése. Előzetes becsléseink alapján ez a helyreállítás mintegy 2-300.000 Ft összegből valósítható meg.

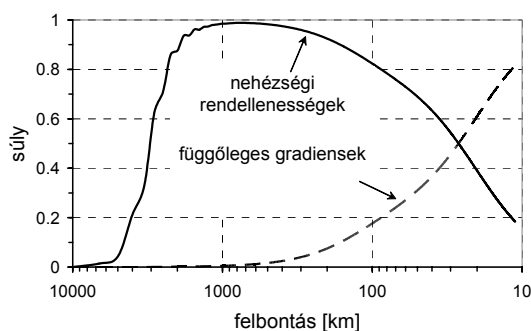
##### 4.3 A GOCE műhold gradiométeres méréseinek hitelesítése

Végül megemlíthetjük az Eötvös-inga mérések újabb lehetséges és igen időszerű geodéziai alkalmazási területét, amely a műholdak méréseihez kapcsolódik és különösen a 2006-ban indítandó GOCE (Gravity and Ocean Circulation Experiment) műhold gradiométeres méréseihez (Rummel és mások 2002) fog rendkívül fontos adatokat szolgáltatni. A világon egyedülállóan nagy, összefüggő területre kiterjedő Eötvös-inga méréseink segítségével ugyanis lehetőség nyílik arra, hogy elvégezzük ezeknek a gradiens értékeknek a műhold 250 km-es magasságára átszámítását az ún. analitikai felfelé folytatással, amely közvetlenül összehasonlítható lesz a GOCE gradiométer által szolgáltatott gradiensekkel. Ezáltal mód nyílik a műhold mérési adatainak összehasonlítására



(hitelesítésére) valódi földfelszínen mért gradiens adatok segítségével.

A GOCE pályamagasságára átszámított második függőleges gradiensek esetében az idáig elvégzett vizsgálataink (Tóth és mások, 2003) azt mutatták, hogy a számításnak az egyik legfontosabb paramétere a földfelszíni adataink térbeli kiterjedése.



9. ábra. Graviméteres és gradiensmérések egymáshoz viszonyított optimális súlya a ponttávolság (térbeli felbontás) függvényében.

Vizsgálataink másrészt érdekes összefüggést tártak fel a graviméteres és Eötvös-inga mérési adatok kapcsolatáról (9. ábra). Megmutatták azt, hogy kb. 30 km-es ponttávolság alatt a nehézségi gradiensek felhasználása már kedvezőbbnek mondható a pontosság szempontjából, mert ahogy az ábrán is látszik, a gradiensmérések itt már a graviméteres méréseknél nagyobb súlyt kapnak.

Ezért a reális összehasonlításra akkor nyílik lehetőség, ha egyrészt növeljük az Eötvös-inga mérési adatbázis kiterjedését, másrészt a földfelszíni gradiens adatokat nagy kiterjedésű nehézségi adatokkal kombináljuk. A kombináció során, amint láttuk, az erőter helyi (30 km-nél kisebb felbontású) jellemzőit azokon a területeken, ahol rendelkezésre állnak a mérések, célszerűbb nagyobb súllyal az Eötvös-inga mérésekből meghatározni.

Kutatási eredményeink, tapasztalataink, és az általunk kifejlesztett számítógépes szoftver birtokában abban reménykedhetünk, hogy nem marad sokáig kihasználatlanul a világon egyedülálló lehetőségünk, és Magyarország területének jelentős részére hamarosan rendelkezni fogunk a függővonal-elhajlások sűrű hálózatával és a geoid cm pontosságú részletes térképével. Jelenleg az Eötvös Loránd Geofizikai Intézetben Magyarország területének jelentős részére már hozzáférhető, és további feldolgozásra várnak az Eötvös-ingával meghatározott  $W_{\Delta}$  és  $W_{xy}$  görbületi adatok, amelyek alapján bármilyen egyéb mérési munka nélkül meghatározható a függővonal-elhajlások igen sűrű hálózata, és minden eddigénél olcsóbban

és gyorsabban előállítható Magyarország igen pontos és részletes geoidképe.

## Megjegyzés

A kutatások a T-037929 és a T-046718 sz. OTKA támogatásával folynak.

## Irodalom:

- ÉKME Felsőgeodézia Tanszék (1965): Geodéziai gravimetriai feladatok háromszögelési hálózatunkkal kapcsolatban. Kutatási zárójelentés az OFTH részére. FVM Földügyi és Térképeszeti Főosztály és BME Általános és Felsőgeodézia Tanszék könyvtára, Budapest.
- Csapó G (1995-2004): Jelentés a BME részére átadott Eötvös-inga adatokról. ELGI és BME adattár.
- Detrekői Á (1991): Kiegészítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest
- Dobróka M, Völgyesi L (2005): A nehézségi erőter potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciója Eötvös-inga adatok alapján. Geomatikai Közlemények VIII, pp. 219-226.
- Gombár L, Göncz G, Késmárky I, Kloska K, Molnár K, Nagy Z, Pogácsás Gy, Szilágyi L, Véges I (2002): A felszíni geofizikai kutatás 50 éve a kőolajiparban. GES Kft. kiadványa, pp. 149-154, Budapest
- Haalck, H (1950). Die vollständige Berechnung örtlicher gravimetrischer Störfelder aus Drehwaagemessungen. Veröffentlichungen des Geodätischen Institutes Potsdam, Nr. 4, Potsdam.
- Rummel R, Balmino G, Johannessen J, Visser P, Woodworth P (2002): Dedicated gravity field missions - principles and aims. Journal of Geodynamics, Vol. 33, pp. 3-20
- Tóth Gy, Adám J, Földváry L, Tziavos I, Denker H (2003): Calibration/validation of GOCE data by terrestrial torsion balance observations. Paper presented at the IUGG General Assembly, Sapporo, 2003 (in press)
- Tóth Gy, Merényi L (2005): Eötvös-inga mérési adatok felhasználása gravitációs térképek szerkesztéséhez. Geomatikai Közlemények, VIII, Sopron.
- Tóth Gy, Völgyesi L (2005): Adatvizsgálat predikcióval magyarországi Eötvös-inga mérési adatok felhasználásával. Geomatikai Közlemények, VIII, Sopron.
- Völgyesi L (1993): Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica C. E., Vol.37. No.2, pp. 137-166
- Völgyesi L (1995): Test Interpolation of Deflection of the Vertical in Hungary Based on

- Gravity Gradients. Periodica Polytechnica C.E., Vol.39. No.1, pp. 37-75
- Völgyesi L (1998): Geoid Computations Based on Torsion Balance Measurements. Reports of the Finnish Geodetic Institute 98:4, pp. 145-151
- Völgyesi L (2001): Local geoid determinations based on gravity gradients. Acta Geodaetica et Geophysica Hung., Vol. 36, Nr. 2, pp. 153-162
- Völgyesi L, Tóth Gy (2002): Az Eötvös-inga mérések jelentősége és geodéziai alkalmazásuk. Geodézia és Kartográfia, Vol. 54, Nr. 10, pp. 28-33
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G (2004): Determination of gravity anomalies from torsion balance measurements. IAG International Symposium, Gravity, Geoid and Space Missions. Porto, Portugal August 30 - September 3, 2004.
- The present state of geodetic applications of Torsion balance measurements in Hungary**
- L. Völgyesi – Gy. Tóth – G. Csapó –  
Z. Szabó  
Summary
- The present state of geodetic applications of torsion balance measurements in Hungary has been discussed by the Geodesy and Geodynamics' Subcommittee of the Scientific Committee of Geodesy of the Hungarian Academy of Sciences. Results and future tasks of geodetic applications of torsion balance measurements are summarized in this paper.

\* \* \*

Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G, Szabó Z (2005): [Az Eötvös-inga mérések geodéziai célú hasznosításának helyzete Magyarországon.](#) Geodézia és Kartográfia, Vol. 57, Nr. 5, pp 3-12.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.  
Web: <http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi> E-mail: [volgyesi@eik.bme.hu](mailto:volgyesi@eik.bme.hu)