

# AZ EÖTVÖS-INGA MÉRÉSEK ALKALMAZÁSA ÉS JELENTŐSÉGE A GEODÉZIÁBAN

Völgyesi Lajos\*



*Application and importance of the torsion balance measurements in geodesy – The 80<sup>th</sup> birthday of professor Péter Biró was celebrated together with his pupils, university colleagues and scientific friends at the Hungarian Academy of Sciences on the 3<sup>rd</sup> of December 2010. In honour of professor Péter Biró a ceremonial scientific conference was held, and we gave account of all the scientific results connecting to the celebrated professor in one form or another, he had started, supported and managed the researches as a head of department, or he had worked as a participant in the researches. Researches of application and importance of the torsion balance in geodesy are overriding importance in this series. A summary is given in this paper about the possible applications of torsion balance measurements in geodesy, and our scientific results are briefly presented connecting to these researches.*

**Keywords:** Torsion balance, gravity gradients, gravity anomalies, curvature data, deflection of the vertical, geoid, vertical gradients, inversion method.

---

*Biró Péter professzor úr 80. születésnapját tanítványaival, egyetemi kollégáival és tudós barátaival együtt ünnepeltük a Magyar Tudományos Akadémián 2010. december 3.-án. A professzor úr tiszteletére ünnepi tudományos ülést tartottunk és beszámoltunk azokról a kutatási eredményekről, amelyekhez az ünnepelt valamilyen módon kapcsolódott; tanszékvezetőként elindította és támogatta a kutatásokat, vagy maga is részt vett a munkákban. Az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosításával kapcsolatos kutatások kiemelkedően fontosak ebben a sorban. A tanulmányban összefoglaljuk az Eötvös-inga mérések geodéziai alkalmazási lehetőségeit, és röviden bemutatjuk az ezzel kapcsolatos eddigi kutatási eredményeinket.*

**Kulcsszavak:** Eötvös-inga, nehézségi gradiensek, görbületi értékek, függővonal-elhajlás, geoid, nehézségi rendellenességek, vertikális gradiensek, inverziós módszer.

## 1 Bevezetés

Eötvös Lorándot a gravitációs kutatásainak kezdetén elsősorban a Föld alakjának kérdése izgatta. Torziós ingájának kifejlesztésekor éppen az a cél vezette, hogy műszerének segítségével nagy pontossággal meghatározza a nehézségi erőter szintfelületének alakját. Eötvös első terepi méréseivel egy időben olyan számítási eljárást dolgozott ki, melynek segítségével torziós-inga mérések adataiból meghatározható két közeli pont között a függővonal-elhajlás változása. Ha torziós ingával felmért terület néhány pontján asztrogeodéziai módszerekkel meghatározzuk a függővonal-elhajlásokat, akkor az ingamérések adataiból minden egyes mérési pontra levezethetjük a függővonal-elhajlás értékét. Ily módon lehetőség nyílt arra, hogy torziós-inga mérések segítségével részleteiben tanulmányozhassuk a geoid alakját. Eötvös Arad környéki méréseire alapozva a világon elsőként készített részletes geoid térképet torziós-inga adatok felhasználásával (Völgyesi és társai 2006).

Nagyobb, összefüggő területre ez a módszer igen számításgényes, ezért az 1950-es években Renner (1957) egyszerűsítő négyzöghálózat kialakításával megpróbálta ezt a fajta függővonal-elhajlás interpolációt a gyakorlati felhasználás céljára alkalmassá tenni. Megfelelő számítástechnikai eszközök hiányában azonban még korai volt a próbálkozása.

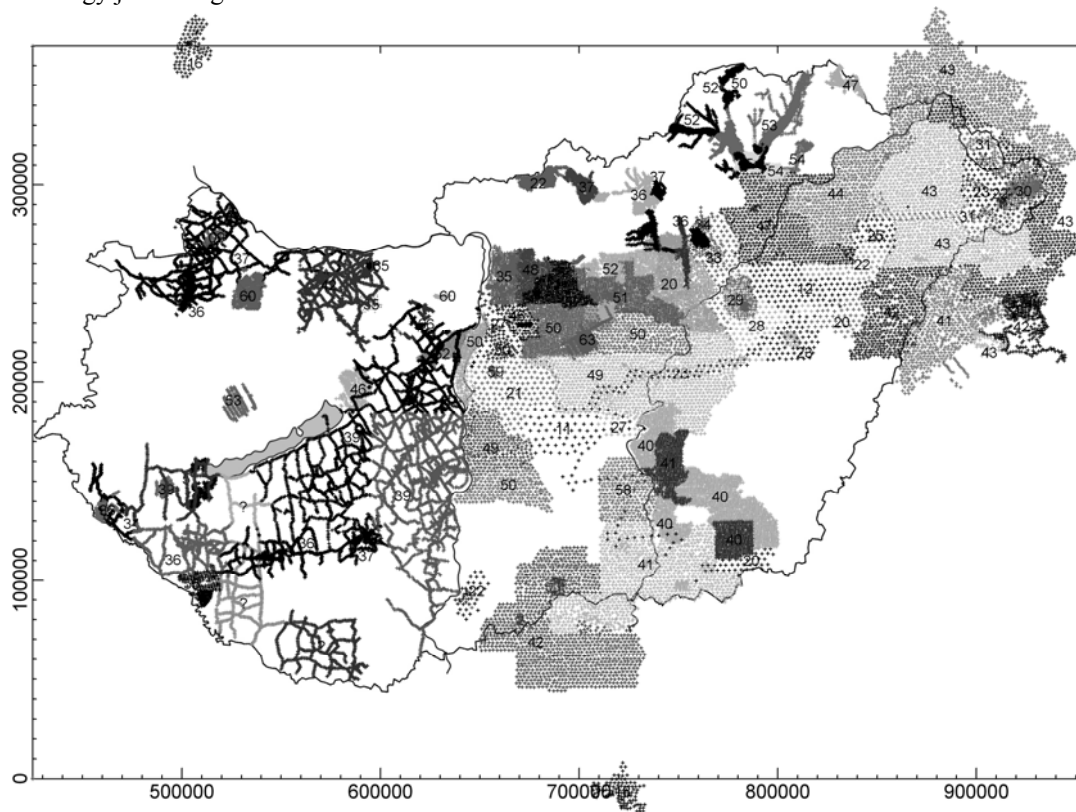
Az 1970-es évek elejére Magyarországon is hozzáférhetővé váltak az első nagyobb számítógépek (Razdan, Odra, R32, stb.), és Biró Péter elsőként ismerte fel az ezekben rejlő óriási lehetőséget a továbblépésre. Kezdeményezésére elindultak az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosításával kapcsolatos kutatások a BME akkori Felsőgeodézia Tanszékén.

\* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék  
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp.3. E-mail: volgyesi@eik.bme.hu

## 2 Magyarországi Eötvös-inga mérések

Eötvös Loránd kezdeti kutatásait követően a magyarországi ingamérések döntő részét ásványi nyersanyagok kutatása céljából végezték. Ennek megfelelően a mérések során nyert adatok közül csak a  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$  horizontális gradienseket használták fel, a  $W_{\Delta}$  és a  $W_{xy}$  görbületi adatok többnyire feldolgozatlanok maradtak. A geodéziai felhasználás céljára viszont éppen ezek a görbületi adatok a fontosak. Hazánkban az 1900-as évektől egészen 1967-ig terjedően a MAORT, az ELGI valamint az OKGT összesen mintegy 60000 ingamérést végzett, – ennyi méréssel a Kárpát-medence a Föld egyik legjobban felmért területe lett.

Bíró Péter kezdeményezésére a BME Általános és Felsőgeodézia Tanszéke és az ELGI az 1990-es évek közepén kutatási együttműködési szerződést kötött. Ennek keretében, valamint különböző pályázatok elnyerésével 1995 óta rendszeresen folyik a korábbi Eötvös-inga mérések anyagának digitális adatbázisba mentése. Az adatbázis kialakítása a különböző formában ma még fellelhető mérési anyagok (észlelési lapok, mérési jegyzőkönyvek, térképek, vagy fénymásolt gradiens térképek) alapján történik. A 2011. év végéig digitalizált adatok területi eloszlását az 1. ábrán láthatjuk. Az 1. ábrán az egyes területrészekben látható számok 1900 hozzáadásával a mérések évszámát mutatják. A digitális adatbázis jelenleg 41562 Eötvös-inga mérés adatait tartalmazza, így az összesen mintegy 60000 magyarországi Eötvös-inga mérés több mint kétharmada már közvetlenül alkalmas a további – elsősorban geodéziai célú hasznosításra. Az adatbázisban a mérési állomások száma, a mérés éve, az állomás Kraszovszkij ellipszoidra vonatkozó  $\varphi$  és  $\lambda$  földrajzi koordinátája, a vízszintes gradiens  $W_{zx}$   $E$ -i és a  $W_{zy}$   $K$ -i összetevője, a  $W_{\Delta}$  és a  $2W_{xy}$  görbületi komponensek, és sorra a  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$ ,  $W_{\Delta}$ ,  $2W_{xy}$  értékekhez tartozó topografikus javítások szerepelnek. A 60000 ingamérésből mintegy 5000 pont éppen azokra a trianoni határon túli területekre esik, amelyekről egyébként nincsenek részletes graviméteres adataink, így a magyarországi geoidkép finomszerkezetének meghatározásához ezeknek nagy jelentőségük van.



1. ábra. A digitális adatbázisban szereplő 41562 Eötvös-inga mérés területi eloszlása 2012. januárban

Az 1960-as évek végére gyakorlatilag befejeződtek Magyarországon a földtani kutatás céljából végzett inga-mérések. Az ezt követő hosszabb szünet után azonban napjainkban a geodézia tudománya újabb igényekkel jelentkezett további mérések végzésére. A korábban gyártott Eötvös-ingák közül jelenleg két műszert sikerült felújítani és mérésekre alkalmassá tenni. Az egyik a BME Általános és Felsőgeodézia Tanszékének Eötvös-Rybár (Auterbal) ingája (Völgyesi és társai 2009a), a másik ennek az 1950-es évekre továbbfejlesztett változata, az ELGI E54 típusú műszere. A terepi Eötvös-inga mérések – éppen 50 éves szünetelése utáni – 2007. évi újraindítását a 60657, illetve a 76231 számú OTKA pályázatok anyagi támogatása tette lehetővé (Völgyesi és társai 2009b). A szükséges vizsgálatok elvégzésére részben a budapesti Mátyás-barlang, részben a Csepel-sziget déli része, Makád község külterülete látszott a legalkalmasabbnak, ahol már az ötvenes években is végeztek Eötvös-inga méréseket. A 2. ábrán a felújított E54 inga látható az észlelőházban mérésre kész állapotban a Makád környékén végzett mérések egyik pontján 2007-ben. A közeli jövőben ezeknek a méréseknek és kutatásoknak a folytatását tervezzük.

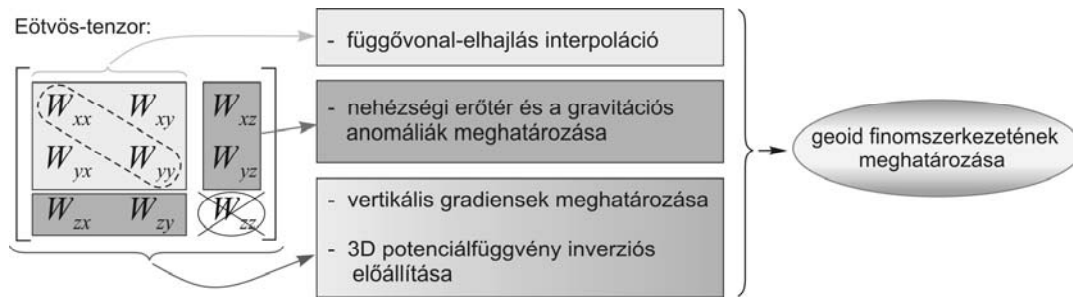


2. ábra. Eötvös-inga mérésre kész állapotban Makád határában 2007-ben.

### 3 Az Eötvös-inga mérések geodéziai alkalmazási lehetőségei

Az Eötvös-inga mérések geodéziai alkalmazása esetén bármilyen fajta adatot is határozunk meg, a végső cél szinte minden esetben a Föld elméleti alakjának, a geoidnak a meghatározása (Völgyesi és társai, 2005b). A 3. ábrán röviden összefoglaltuk az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosításának jelenlegi lehetőségeit. Az ábra bal oldalán az Eötvös-tenzor elemeit három csoportba osztottuk: a világosabb árnyalattal jelölt területen az ingával mérhető görbületi adatokat emeltük ki, a sötétebb résszel a horizontális gradienseket jelöltük, míg az áthúzott  $W_{zz}$  függőleges gradiens a torziós-ingával közvetlenül nem mérhető tenzorelem. Ugyanezen ábra jobb oldalán azt szemléltettük, hogy az Eötvös-tenzor különböző elemeinek felhasználásával milyen geodéziai vonatkozású számítások

végezhető, illetve a geodézia szempontjából milyen fontos adatok határozhatók meg. Az alábbiakban ezeket a lehetőségeket tekintjük át röviden.



3. ábra. Az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosítási lehetőségei.

#### 4 A függővonal-elhajlás interpoláció

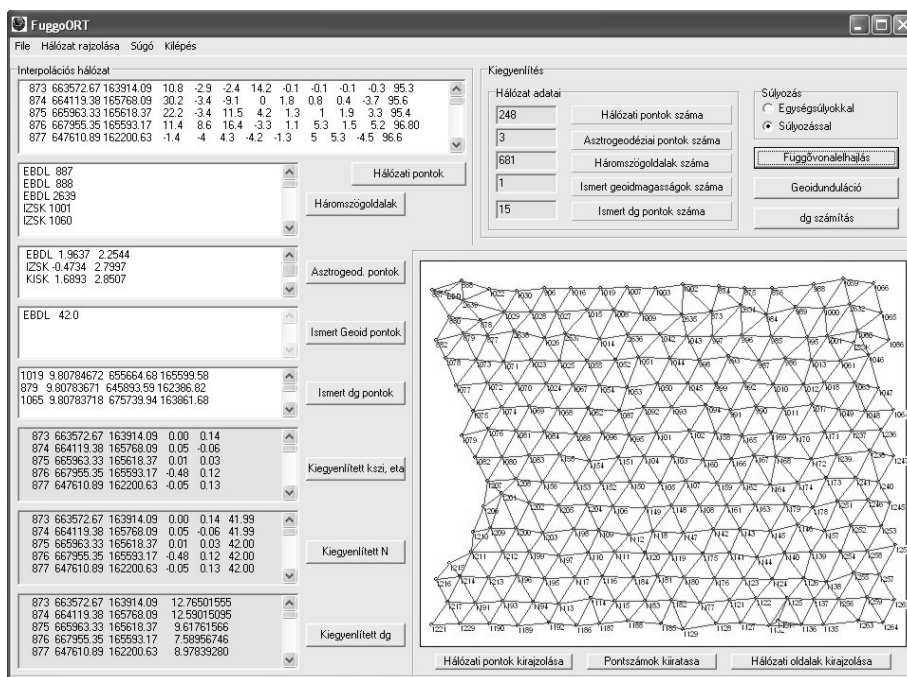
Amint a bevezetőben már említettük, a módszer alapelvét Eötvös Loránd dolgozta ki. A  $\xi$  és az  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevők két tetszőleges  $i$  és  $k$  pont közötti  $\Delta\xi_{ik}$  és  $\Delta\eta_{ik}$  megváltozása valamint az Eötvös-ingával mérhető  $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$  és  $2W_{xy}$  görbületi gradiensek között az alábbi összefüggés írható fel:

$$\Delta\xi_{ik} \sin \alpha_{ik} - \Delta\eta_{ik} \cos \alpha_{ik} = \frac{s_{ik}}{4g} \left\{ [(W_{\Delta} - U_{\Delta})_i + (W_{\Delta} - U_{\Delta})_k] \sin 2\alpha_{ik} + [(W_{xy} - U_{xy})_i + (W_{xy} - U_{xy})_k] 2 \cos 2\alpha_{ik} \right\} \quad (1)$$

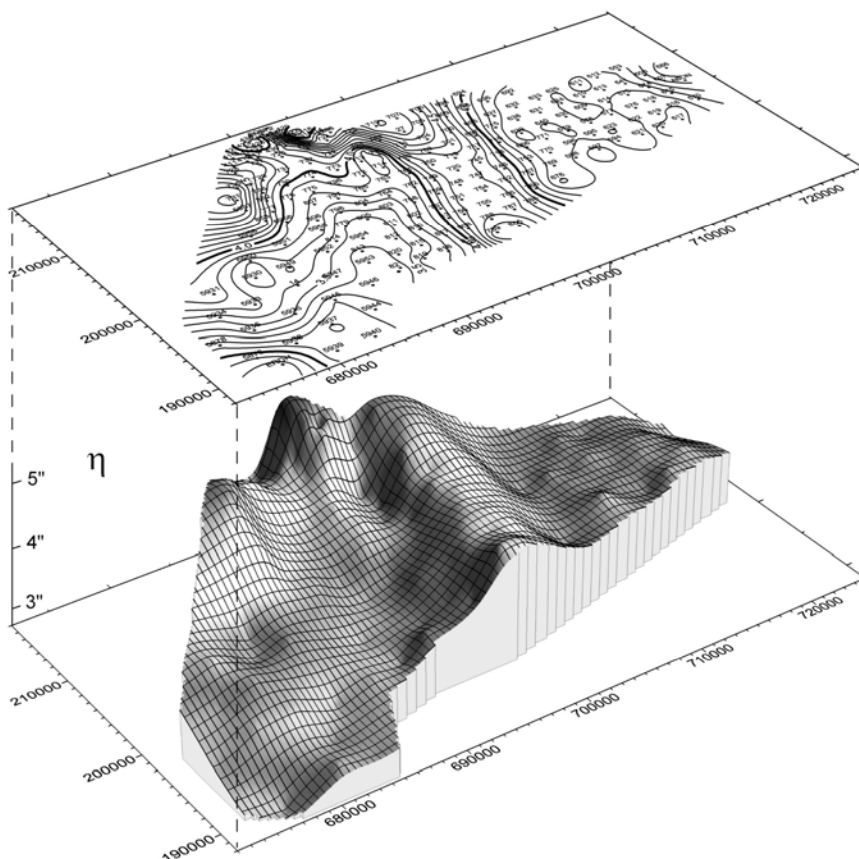
ahol  $U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx}$ ,  $s_{ik}$  az  $i$  és  $k$  pont közötti távolság,  $g$  az átlagos nehézségi gyorsulás értéke a pontok között,  $U_{xx}$ ,  $U_{yy}$  és az  $U_{xy}$  a görbületi gradiensek normális értéke,  $\alpha_{ik}$  pedig az  $ik$  vonal azimutja (Völgyesi 1993, 1995). A számítás alapvetően vonal menti integrálás, amely a gyakorlatban a trapéz integrálközelítő formulával abban az esetben oldható meg ha az Eötvös-ingával mérhető görbületi gradiensek két szomszédos pont közötti megváltozása az (1)-ben lineárisnak tekinthető (Völgyesi 1993).

A BME Általános- és Felsőgeodézia (korábbi Felsőgeodézia) Tanszékén közel húsz éves kutatómunka eredményeképpen kidolgoztuk a nagyobb összefüggő területre alkalmazható és a modern számítástechnika által kínált lehetőségeknek leginkább megfelelő függővonal-elhajlás interpolációs módszert (Völgyesi 1993, 1995). Erre a módszerre készítettük többek között a *FuggoORT* szoftvert, amely Eötvös-inga mérések felhasználásával akár láncolat mentén, akár tetszőleges területet beborító hálózatokra képes a függővonal-elhajlás értékeket meghatározni, ki tudja rajzolni az interpolációs hálózatot és az interpolált függővonal-elhajlások vektorábráját. Ezen túlmenően csillagászati szintézissel ki tudja számítani a geoidmagasságokat, meg tudja rajzolni a kérdéses területre a geoid akár perspektív, akár szintvonalas ábráját, majd egy további fejlesztés eredményeképpen a nehézségi erőter és a nehézségi rendellenességek meghatározására is alkalmas a  $W_{xx}$  és a  $W_{yy}$  gradiens értékek alapján. Mivel nagyméretű mátrixokat is képes kezelni, ezért egyszerre nagy területen is végezhető vele számítások. A *FuggoORT* szoftver input-output ablakának képe a 4. ábrán látható.

Két nagyobb próbatereleten történtek kísérleti számítások. Mind a Cegléd környéki mintegy 1200 km<sup>2</sup>, mind a Szabadszállás–Kiskőrös környéki közel 800 km<sup>2</sup> kiterjedésű teszterületen elvégzett számítások eredményei szerint a  $\xi$  és az  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevők közel fél szögmásodperces pontossággal számíthatók. Az 5. ábrán példaként az említett teszterületen számított első vertikális irányú  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevő területi eloszlása látható.



4. ábra. Az interpolációs szoftver input-output ablaka.



5. ábra. Az interpolált  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevő területi eloszlása a Cegléd környéki teszterületen.

## 5 Lokális geoidformák meghatározása

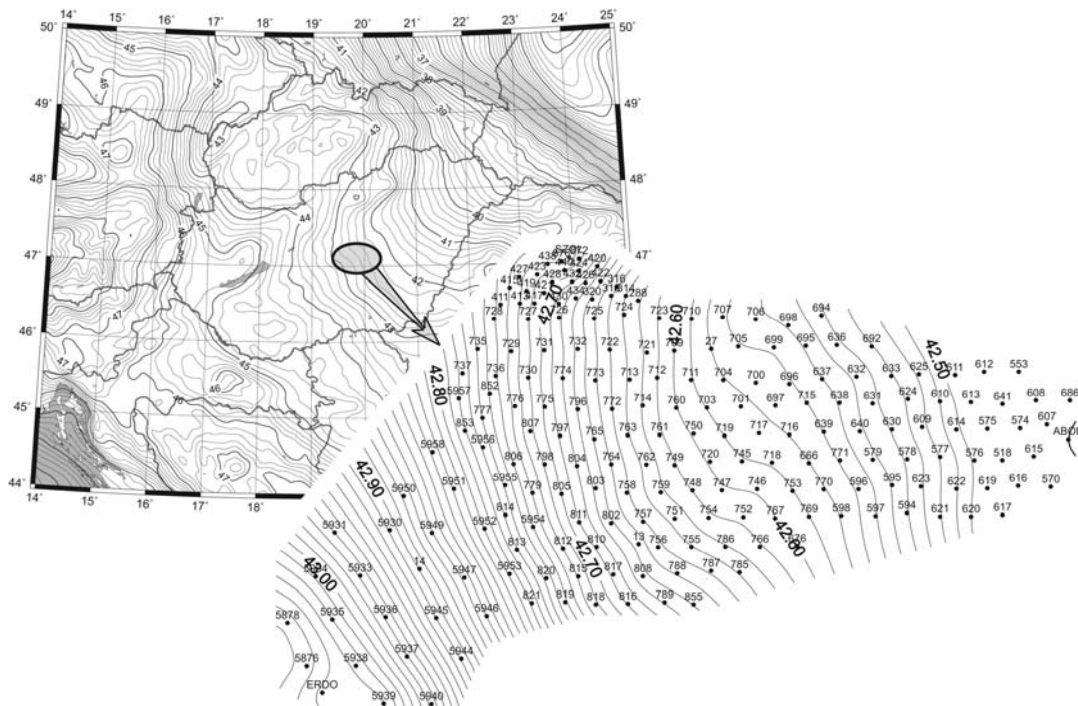
A  $P_i$  és a  $P_k$  pont között a geoid-ellipszoid távolság  $\Delta N_{ik}$  különbsége az (1) felhasználásával számított  $\xi$ ,  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevők ismeretében a csillagászati szintezés módszerét alkalmazva a

$$\Delta N_{ik} = \left( \frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin \alpha_{ik} \right) s_{ik} \quad (2)$$

összefüggés segítségével határozható meg.

Kiküszöbölve a hagyományos csillagászati szintezés, négyzetháló sarokpontjaira történő számításának problémáját, közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontok helyét választottuk a geoid számítások céljára. Így a  $\Delta N_{ik}$  különbségeket a csillagászati szintezésnek nem az ismert négyzethálózat sarokpontjaiban É-D illetve K-Ny irányban, hanem közvetlenül az Eötvös-inga mérési állomások pontjai között, tetszőleges  $\alpha$  azimutban határoztuk meg (Völgyesi 1998, 2001, 2005).

A Cegléd környéki teszterületen az Eötvös-inga mérések mellett hat pontban álltak rendelkezésre a geoid-ellipszoid távolság értékek. A kísérleti számítások során ezek közül három asztrigeodéziai pont rögzített kényszerként, további egy asztrigeodéziai és két asztrigravimetriai pont pedig a számított értékek ellenőrzésére szolgált. Az ellenőrző pontokban tapasztalt eltérések alapján az Eötvös-inga mérések felhasználásával számított geoidundulációkra  $\pm 4$  cm-es középhiba adódott. A 6. ábra jobb alsó részén a teszterületen közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontokra csillagászati szintezéssel meghatározott geoid képét láthatjuk. Az így meghatározott geoidkép szépen illeszkedik az ábra bal felső részén látható magyarországi HGTUB2008 geoidképhez.



6. ábra. A Cegléd környéki teszterület részletes geoidképének illeszkedése a magyarországi HGTUB2008 geoidhoz.

## 6 Nehézségi erőtér és a gravitációs anomáliák meghatározása

Kutatásaink során világossá vált, hogy az Eötvös-ingával mérhető vízszintes gradiensek kiváló hozzájárulást adnak a nehézségi erőtér finomszerkezetének-, különösképpen a 30 km-nél rövidebb hullámhosszú változásoknak a meghatározására (Völgyesi és társai 2005a, 2007).

A fizikai geodézia

$$\Delta g = g - \gamma = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{R} \quad (3)$$

alap differenciálegyenletéből kiindulva ( $T=W-U$  a potenciálzavar,  $R$  a közepes földsugár) összefüggés vezethető le, amellyel a nehézségi rendellenességek számítása a függővonal-elhajlás interpolációhoz hasonló logikával történhet. Megfelelő mennyiségű Eötvös-inga mérési pont esetén interpolációs hálózat alakítható ki, amelynek két tetszőleges pontja között a  $W_{zx}$  és a  $W_{zy}$  vízszintes gradiensek ismeretében a

$$\Delta g_k - \Delta g_i = s_{ik} \left\{ \frac{(W_{zx} - U_{zx})_i + (W_{zx} - U_{zx})_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{(W_{zy})_i + (W_{zy})_k}{2} \sin \alpha_{ik} \right\} \quad (4)$$

összefüggés alkalmazásával lehetőségünk nyílik a nehézségi rendellenességek (gravitációs anomáliák) sűrítésére, – ahol  $s_{ik}$  az  $i$  és a  $k$  pont közötti távolság,  $U_{zx}$  a  $W_{zx}$  horizontális gradiens normális értéke,  $\alpha_{ik}$  pedig az  $ik$  vonal azimutja (Völgyesi és társai 2005a). A feladat logikájának megfelelően az Eötvös-inga mérések mellett az egyértelmű megoldáshoz itt is szükségünk van további információra; – ebben az esetben ismernünk kell az interpolációs hálózat legalább egy pontjában a  $\Delta g$  nehézségi rendellenesség értékét. Általános esetben nem csak egy, hanem több pontban is adottak a nehézségi rendellenességek, ekkor a  $\Delta g$  ismeretlenek legvalószínűbb értékét kiegyenlítéssel határozhatjuk meg.

A fent leírtak kisebb módosításával nem csak a nehézségi rendellenességek, hanem maguk a nehézségi erő (nehézségi gyorsulás értékek) is meghatározhatók az Eötvös-ingával mérhető vízszintes gradiensek felhasználásával (Völgyesi és társai 2007).

Ekkor a  $\mathbf{g} = -grad W$  összefüggésből kiindulva a nehézségi erőtér  $P_i$  és  $P_k$  pont közötti megváltozása olyan koordináta-rendszerben, amelynek  $x$  tengelye északi-,  $y$  tengelye keleti irányba, a  $z$  tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat:

$$g_k - g_i = - \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)_k - \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)_i \right]. \quad (5)$$

A  $g$  nehézségi erő teljes differenciálja  $d\mathbf{r}$  elemi elmozdulásvektor esetén:

$$dg = \nabla(g) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = W_{zx} dx + W_{zy} dy + W_{zz} dz, \quad (6)$$

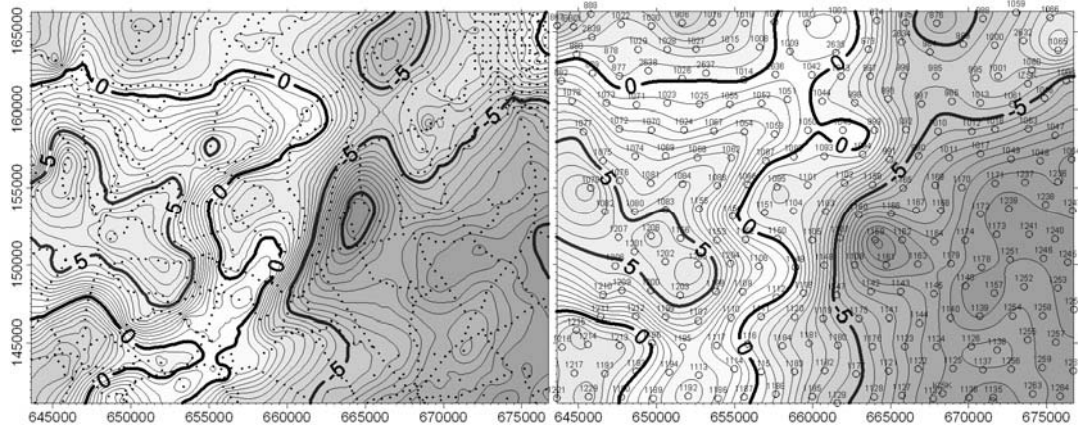
ebből pedig levezethető a

$$g_k - g_i \approx \frac{s_{ik}}{2} \left\{ [(W_{zx})_i + (W_{zx})_k] \cos \alpha_{ik} + [(W_{zy})_i + (W_{zy})_k] \sin \alpha_{ik} \right\} + \Delta h_{ik} U_{zz} \quad (7)$$

összefüggés, ahol  $\Delta h_{ik}$  a két pont közötti magasságkülönbség,  $U_{zz}$  pedig a vertikális gradiens (VG) normálértéke (Völgyesi és társai 2007). (Amennyiben a VG normálértéke jelentősen különbözik a valódi értéktől, a valódi érték használata szükséges.)

A módszer alkalmazhatóságának vizsgálatára a Szabadszállás-Kiskörös környéki közel 800 km<sup>2</sup> kiterjedésű közel sík területen végeztünk kísérleti számításokat, ahol 248 Eötvös-inga mérés mellett 1197 graviméteres mérés eredményei álltak rendelkezésre. A 248 Eötvös-inga mérési pontból 18

pontban volt lehetőség az anomália értékek rögzítésére, a fennmaradó 230 pontban pedig az Eötvös-ingával mért  $W_{zx}$  és  $W_{zy}$  vízszintes gradiensek alapján interpolációval határoztuk meg a nehézségi rendellenességek értékét. Az így interpolált anomáliák izovonalas térképét a 7. ábra jobb oldalán, az eredeti graviméteres mérések alapján szerkesztett képet pedig a bal oldalán láthatjuk. Az ábrán az inga-mérések helyszínét körök, a graviméteres méréseket pedig apró pontok jelölik, a kereten feltüntetett számok EOV koordináták. Összehasonlítva a jobb és a bal oldali képet, megfelelő egyezés látható a mért és az interpolált nehézségi rendellenességek között. 230 Eötvös-inga mérési pontban összehasonlítva a graviméteres mérésekből meghatározott  $\Delta g^{mért}$  és  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$  Eötvös-inga mérések alapján interpolált  $\Delta g^{int}$  nehézségi rendellenességeket  $\pm 1.28$  mGal középhiba adódott, ami nagy valószínűséggel jelentősen pontosítható lenne a valódi és a normál vertikális gradiensek különbségének figyelembe vételével, amit a (7) összefüggés levezetésekor jobb lehetőség hiányában elhanyagoltunk (Völgyesi és társai 2005a).



7. ábra. Graviméteres mérések alapján számított, illetve az Eötvös-inga mérések alapján interpolált  $\Delta g$  anomáliák a jobb, illetve a bal oldalon. Az izovonalak lépésköze 0.5 mGal. A kereten feltüntetett számok EOV koordináták.

## 7 Vertikális gradiensek meghatározása

A  $W_{zz}$  vertikális gradiens (VG) értékek ismeretének igen fontos szerepe és jelentősége van a geodéziában és a gravimetriában, viszont ez az egyetlen gradiens az Eötvös tenzorban, amely közvetlenül nem mérhető az ingával.

Haalck 1950-ben javasolt viszont egy eljárást, amelynek segítségével az Eötvös-inga mérési adataiból kiszámítható a  $W_{zz}$  függőleges gradiens értéke is (Haalck 1950, Tóth és társai 2005, Tóth 2007). Ez az eljárás, a csillagászati szintezéshez hasonlóan, a VG *különbségeit* állítja elő Eötvös-ingával mért legalább három pont között. Ebből következik, hogy a függőleges gradiens értékét egy adott terület néhány pontjában ismernünk kell ahhoz, hogy az eljárással a VG abszolút értelemben is meghatározható legyen. A módszer alkalmazhatóságát először szintetikus adatok felhasználásával, tesztszámításokkal igazoltuk, szükséges azonban ennek mért adatokkal történő ellenőrzése. Erre a célra olyan pontok kellene, ahol mind Eötvös-inga adatok, mind függőleges gradiens mérések rendelkezésre állnak. Azonban a korábbi ingamérések helyszínén nem mértek függőleges gradiens értékeket, ráadásul a pontok koordinátáit sem ismerjük olyan pontossággal, hogy az egykori ingamérések helyszínén utólag megfelelő VG értékeket mérhessünk. A módszer terepi viszonyok közötti ellenőrzésére csak az a lehetőség maradt, hogy alkalmasan kiválasztott teszterületen ugyanazon ponthálózatban végezzünk egyidejűleg Eötvös-ingás és graviméteres VG méréseket. Valójában ez indokolta az Eötvös-inga mérések hosszú, – mintegy fél évszázados – szünet utáni újraindítását az utóbbi években. Ennek érdekében két különböző helyszínen próbálkoztunk. Az egyik jó lehetőségnek az ELGI Mátyás-hegyi barlangjában 1990-ben *Csapó G.* által létrehozott 14 pontból álló gravitációs mikrobázis mutatkozott, amelynek pontjain ismertek a vertikális gradiens helyi értékei, ráadás-



sul itt Eötvös-inga mérések is történtek (Csapó, 1991). Mivel azonban a korábbi 3 azimutos ingamérésekből a függőleges gradiensek interpolációjához szükséges görbületi adatok nem határozhatók meg, ezért szükségessé vált az ELGI Mátyás-hegyi barlangjában található 14 pontból álló gravitációs mikrobázis Eötvös-ingás újramérése. Mivel a Mátyás-barlangban különlegesen nagy gradiens értékek vannak, célszerű volt egy másik területen, átlagos magyarországi terepviszonyok mellett is létesíteni tesztálózatot. Erre a célra a Csepel-sziget déli részén Makád közelében találtunk alkalmas területet. Erre a későbbiekben még visszatérünk.

## 8 A 3D potenciálfüggvény inverziós előállítás

Amennyiben meg tudjuk határozni a nehézségi erőter potenciálfüggvényét, ebből megfelelő irányú első deriváltakkal elő tudjuk állítani az erőter vektorának összetevőit, a második deriváltak pedig a teljes Eötvös-tenzor elemeit adják (beleértve a VG értékét is). Az első deriváltakból egyszerűen adódik a függővonal-elhajlás két összetevője és közvetlenül a  $g$  értéke. Ennélfogva igen nagy jelentősége van a potenciálfüggvény meghatározásával kapcsolatos kutatásainknak.

A *Dobróka M.* alpjötte alapján kidolgozott inverziós módszer lehetőséget ad az Eötvös-inga mérések alapján a nehézségi erőter potenciálfüggvényének és a potenciálfüggvény valamennyi fontos deriváltjának inverziós előállítására (Dobróka-Völgyesi 2008, 2009, 2010).

Amennyiben a nehézségi erőter potenciálfüggvényét valamely  $\Psi_1 \dots \Psi_P$  bázisfüggvény rendszer szerinti

$$W(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i(x) \Psi_j(y) \Psi_k(z), \quad (8)$$

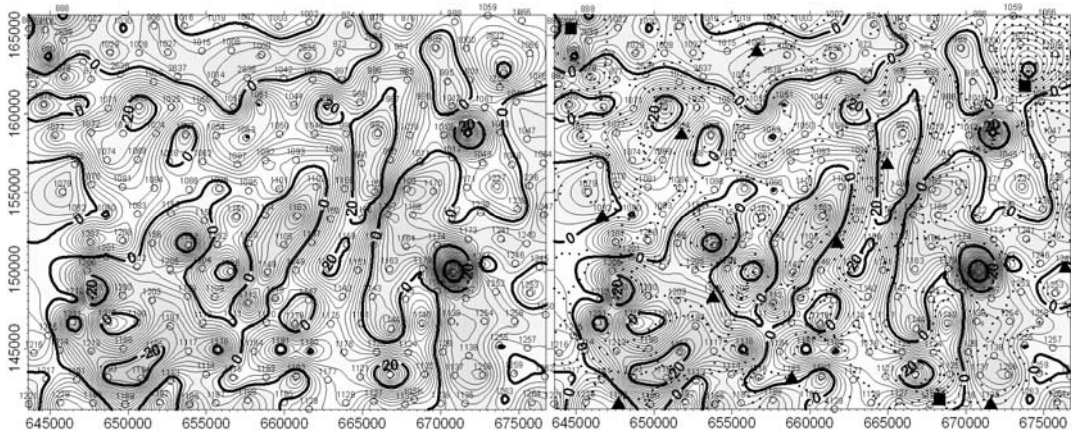
sorfejtés alakjában írjuk fel, akkor ebből az első és a második potenciálderiváltak egyszerűen számíthatók. (Bázisfüggvényekként pl. hatványfüggvényeket alkalmazhatunk.) A (8) potenciálfüggvény első és második deriváltjaiként egyszerűen előállíthatjuk a  $g$  és az Eötvös-ingával mérhető görbületi adatok ( $W_{\Delta}$ ,  $W_{xy}$ ), illetve a horizontális gradiensek ( $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$ ) elméleti értékeit. Például a  $W_{\Delta}$  értéke:

$$W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_j(y)}{\partial y^2} \Psi_i(x) - \frac{\partial^2 \Psi_i(x)}{\partial x^2} \Psi_j(y) \right\} \Psi_k(z). \quad (9)$$

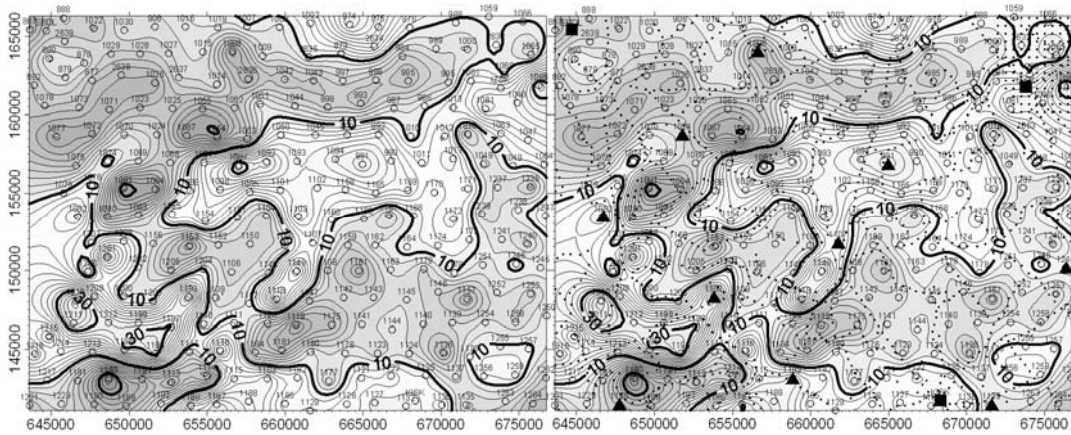
A feladat olyan  $B_l$  együttható-rendszernek a meghatározása, amely esetén a (9) mintájára számított  $W_{\Delta}$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$ ,  $W_{zz}$ ,  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$  és az ugyanezen mért értékek eltérése minimális lesz (a  $W_x$ ,  $W_y$  értékek ismert függővonal-elhajlásokból állíthatók elő).

A  $B_l$  együttható-rendszer ismeretében a teljes Eötvös-tenzor (beleértve az Eötvös-ingával közvetlenül nem mérhető vertikális gradiens értékeket is), ezen kívül pedig a függővonal elhajlás számításához szükséges  $W_x$ ,  $W_y$  mennyiségek továbbá a nehézségi erő értékek is egzaktul számíthatók nemcsak a mérési pontokban, hanem a teljes mérési területen.

A módszer alkalmazhatóságának vizsgálatára a már korábban említett Szabadszállás-Kiskőrös környéki területen végeztünk kísérleti számításokat. Itt az Eötvös-inga és a graviméteres mérések mellett három asztrogeodéziai (az ábrákon sötét négyszögek) és további tíz asztrogravimetriai pont (az ábrákon sötét háromszögek) álltak rendelkezésünkre, amelyekben ismertük a GRS80 rendszerre vonatkozó  $\xi$ ,  $\eta$  függővonal-elhajlás értékeket. Az inverziós feladat megoldása során meghatároztuk mindazon sorfejtési együtthatókat, amelyek segítségével a teljes tesztterületre előállítható mind a nehézségi erőter potenciálfüggvénye, mind a potenciálfüggvény valamennyi első és második deriváltja. Összehasonlítva például a 8. és a 9. ábra a bal oldalán az Eötvös-ingával mért, a jobb oldalán pedig az együttes inverzióval előállított  $W_{\Delta}$  és  $W_{zx}$  gradiensek izovonalas képét az egyezés igen jónak mondható, de ugyanez a jó egyezés tapasztalható a  $W_{xy}$  és a  $W_{zy}$  gradiensek esetében is, amelyeket itt külön nem ábrázoltunk. Az ábrákon az izovonalak lépésköze 2 E. ( $1E = 1Eötvös \text{ egység} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ).



**8. ábra.** Az Eötvös-ingával mért és az inverziós eljárással számított  $W_A$  görbületi gradiens területi eloszlása. Az izovonalak lépésköze 2 E egység. A kereten feltüntetett számok EOVS koordináták.



**9. ábra.** Az Eötvös-ingával mért és az inverziós eljárással számított  $W_x$  horizontális gradiens területi eloszlása. Az izovonalak lépésköze 2 E egység. A kereten feltüntetett számok EOVS koordináták.

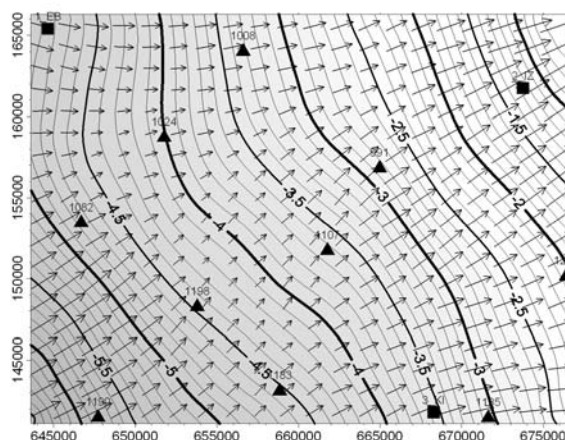
A sorfejtési együtthatók ismeretében lehetőség van a nehézségi erőtér potenciálfüggvényének valamint a potenciálfüggvény első deriváltjainak meghatározására is. A 10. ábrán egy additív állandó erejéig együttes inverzióval meghatározott potenciálmező látható. Az ábrán az izovonalak lépésköze  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . A 10. ábrán egyúttal a függővonal-elhajlások vektorait is bemutatjuk az együttes inverziós megoldásából, – ahol a vektorok hosszát a

$$\theta = \sqrt{(W_x / g)^2 + (W_y / g)^2} \quad (10)$$

összefüggés alapján számítottuk.

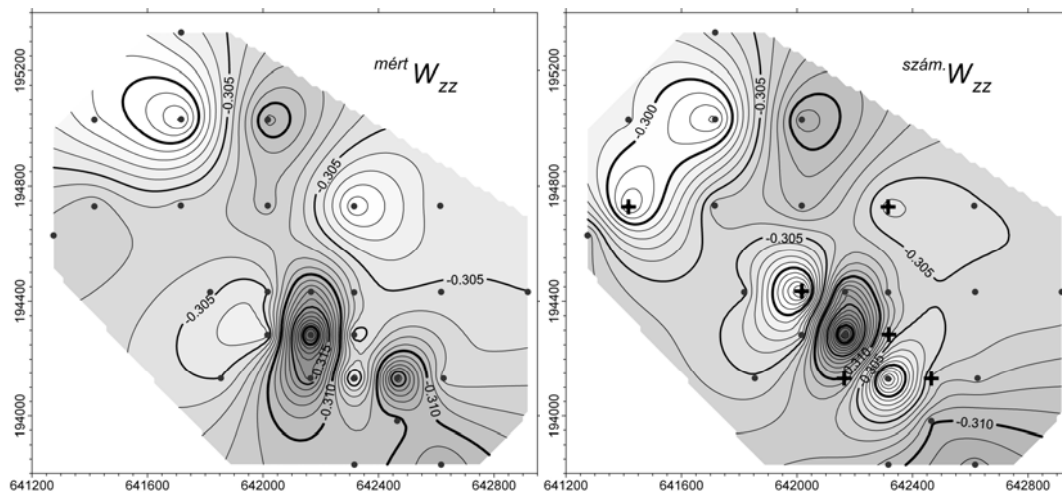
Végül, amint jeleztük, az inverziós eljárással lehetőség nyílik az Eötvös-ingával közvetlenül nem mérhető  $W_{zz}$  vertikális gradiensek meghatározására is. Mivel a Szabadszállás-Kiskörös környéki teszterületen méréssel meghatározott VG értékek nem álltak rendelkezésre, ezért a vertikális gradiensek meghatározására vonatkozó vizsgálatainkat más területen végeztük. Először a budapesti Mátyás-barlangban Haalck-módszerével próbálkoztunk (Ultmann, 2012), majd a Csepel-sziget déli részén, a Makád környéki területen végeztünk kísérleti számításokat az inverziós eljárással (Völgyesi és mások, 2012). A Makád környéki teszterület ebből a szempontból kiválóan megfelelt, itt ugyanis 2006 és 2010 között a K60657 számú OTKA megbízás keretében az ELGI és a BME szakemberei alapvetően erre a célra 30 pontban Eötvös-ingás, 21 pontban graviméteres és 27 pont-

ban vertikális gradiens méréseket végeztek (Csapó és mások, 2009a, 2009b). A 27 vertikális gradiens mérés helyét (amelyek egyúttal Eötvös-inga mérési pontok is) a 11. ábra bal oldalán fekete pontok jelölik, ugyanitt izovonalakkal ábrázoltuk a VG értékek területi eloszlását. Az izovonalakon feltüntetett számértékek [mGal/m] ( $1 \text{ [mGal/m]} = 10^{-5} [1/s^2] = 10000 [E] = 10000 \text{ Eötvös Egység}$ )-ben értendők, a kereten feltüntetett számok EOVS koordináták.



10. ábra. Az együttes inverzióval előállított potenciáltér (az izovonalak lépésköze  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ), és a függővonal-elhajlások vektorábrája.

Az itt bemutatott példában 27 pontban megmért vertikális gradiens értékekből 21 pontot vettünk figyelembe az inverziós eljárásához kiinduló adatként, a fennmaradó 6 pontban az ismert VG értékeket pedig a számítások ellenőrzésére használtuk. A vizsgálataink azt mutatták, hogy az inverziós eljárás jól alkalmazható a vertikális gradiens meghatározására, ugyanis a 6 ellenőrző pontban összehasonlítva a számított és a mért értékeket  $\pm 11.6 \text{ mGal/m}$  középhiba adódott, ami hasonló a graviméteres mérésekkel meghatározott vertikális gradiens pontosságához. A 11. ábra jobb oldalán keresztekkel jelöltük azt a 6 vertikális gradiens pontot, amelyeket a számított értékek ellenőrzésére használtunk. Ugyancsak a jobb oldali ábrán izovonalakkal ábrázoltuk a számított VG értékek területi eloszlását. A 11. ábra bal oldalán a mért és a jobb oldalon az inverziós eljárással számított  $W_{zz}$  vertikális gradiens területi eloszlását összehasonlítva megfelelő egyezés látható, amely a számítási módszer alkalmazhatóságát igazolja.



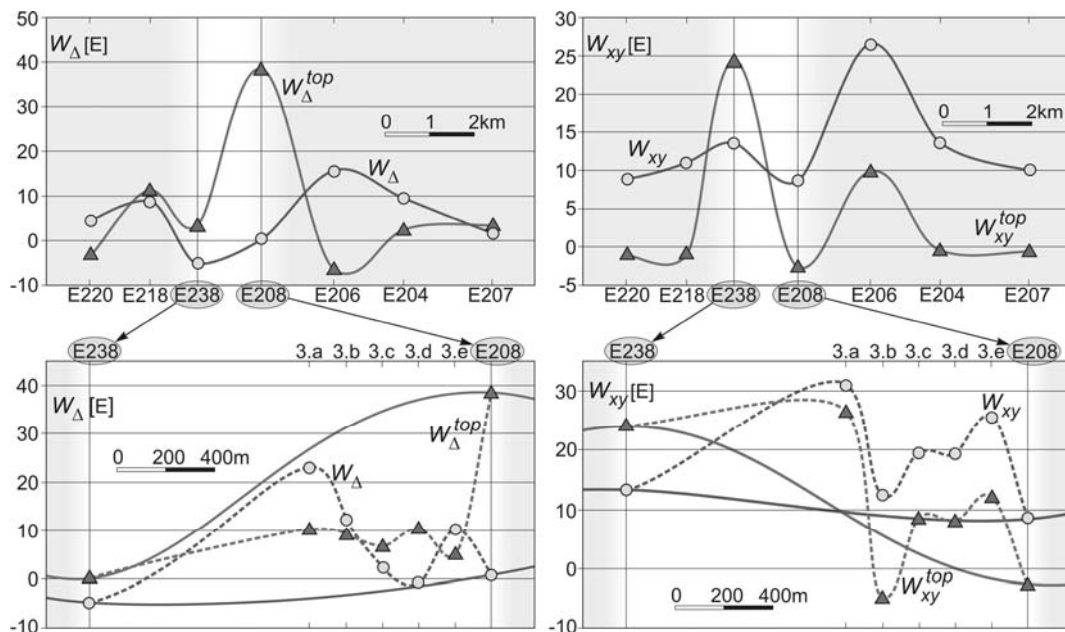
11. ábra. A mért és az inverziós eljárással számított  $W_{zz}$  vertikális gradiens területi eloszlása Makád környékén. Az izovonalakon feltüntetett számok mGal/m egységben értendők, a kereten feltüntetett számok EOVS koordináták

## 9 A gradiensek linearitás-vizsgálata

Az eddigi vizsgálataink során azt tapasztaltuk, hogy a vertikális gradiensek interpolációja rendkívüli módon érzékeny arra, hogy az Eötvös-ingával mérhető mennyiségek szomszédos pontok közötti megváltozása mennyire lineáris. A gradiensek két pont közötti lineáris változása más interpolációs számítások során, pl. a függővonal-elhajlás interpoláció esetében is fontos tényező.

A linearitás-vizsgálatokat részben a Csepel-sziget déli részén, a Makád környéki teszterületen, részben a budapesti Mátyás-barlangban az ELGI gravitációs mikrobázisának pontjain végeztük.

A Csepel-sziget teljes részén 1950-ben végeztek torziós inga méréseket, amelyek közül Makád közelében 7 olyan pontot választottunk ki, melyek többé-kevésbé egyenes szelvény mentén helyezkednek el. Ezekben a pontokban rendelkezésre álltak mind az Eötvös-ingával mért  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$  horizontális és  $W_{\Delta}$ ,  $W_{xy}$  görbületi gradiensek, mind ezek topografikus redukcióval ellátott értékei. A 12. ábra felső részén a szelvény menti pontokban körökkel jelölve láthatjuk a görbületi gradiensek Eötvös ingával 1950-ben mért változását, a háromszögekkel jelölt értékek pedig a mérések topografikus redukcióval javított értékei. A mérési pontok egymástól mért távolsága átlagosan mintegy 1.5 km. Annak tisztázására, hogy a gradiensek tartalmaznak-e magasabb frekvenciájú összetevőket is, az E238 és az E208 pont között 2007-2008 évben végzett új Eötvös-inga mérések eredményeit is megvizsgáltuk.



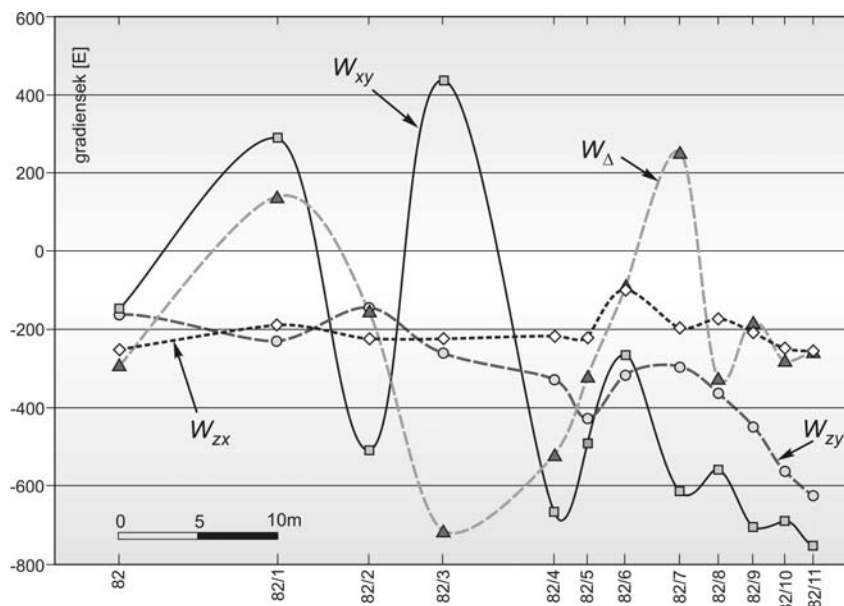
12. ábra. A görbületi gradiensek változása a Makád környéki teszterület pontjaiban

Az új, sűrített mérések alapján a gradiensek finomabb felbontású változása a 12. ábra alsó részén látható (folytonos vonallal az 1950-es méréseket, szaggatott vonallal pedig az újabb sűrített méréseket ábrázoltuk). Ez alapján megállapítható, hogy a gradiensek magasabb frekvenciájú összetevőket is tartalmaznak, így a korábbi pontsűrűség mellett nem várható a szomszédos mérési pontok között ezek lineáris megváltozása. Ráadásul a probléma azzal sem oldható meg, hogy a méréseket ellátjuk topografikus korrekcióval, mivel láthatóan a topografikus redukcióval ellátott gradiensek változása sem tekinthető lineárisnak a szomszédos pontok között. Ennek kézenfekvő magyarázata az, hogy a terület a Duna korábbi árterülete, ezért a felszín alatti sűrűségeloszlás rendkívül változatos.

A görbék viselkedése alapján elképzelhető, hogy még a 150 m pontsűrűségű ingamérések esetében sem biztos a szomszédos pontok között a gradiensek lineáris változása, bár a magasabb frek-

venciájú tagok amplitúdója – különösen a topografikus javítással ellátott értékek esetében – már kisebb. A probléma tisztázása további méréseket és vizsgálatokat igényel.

Vizsgálatokat végeztünk az ELGI Geodinamikai Laboratóriumában a Mátyás-barlangban is. Itt található az ország gravitációs főalappontja és az itt létesített 14 pontból álló gravitációs mikrobázis hálózat pontjaiban 1991-ben már voltak Eötvös-inga mérések (Csapó, 1991). Ezeket a méréseket 2008-ban megismételtük (Völgyesi és Ultmann, 2012), a mérések alapján meghatározott horizontális és görbületi gradiensek változása a 13. ábrán látható.



13. ábra. A gradiensek változása a Mátyás-barlang gravitációs mikrobázisának pontjaiban

Feltűnő a gradiensek hatalmas változása, amely két szomszédos pont között néhány méteres távolságon belül akár 1000E értéket is elérhet. A 13. ábrán látható, hogy itt még néhány méteres távolságon belül sem lineáris a gradiensek változása, a gradiensek magasabb frekvenciájú összetevőket is tartalmaznak. Ennek ellenőrzésére a méréseinket a 82/1 jelű pont közvetlen környezetében tovább finomítottuk, a pont körül észak-déli illetve kelet-nyugati irányban a mérési pontokat 30 cm lépésközben sűrítettük (Völgyesi és Ultmann, 2010). A mérések szerint a gradiensek megváltozása 30 cm távolságon belül már többé-kevésbé lineárisnak tekinthető (Völgyesi és Ultmann, 2012).

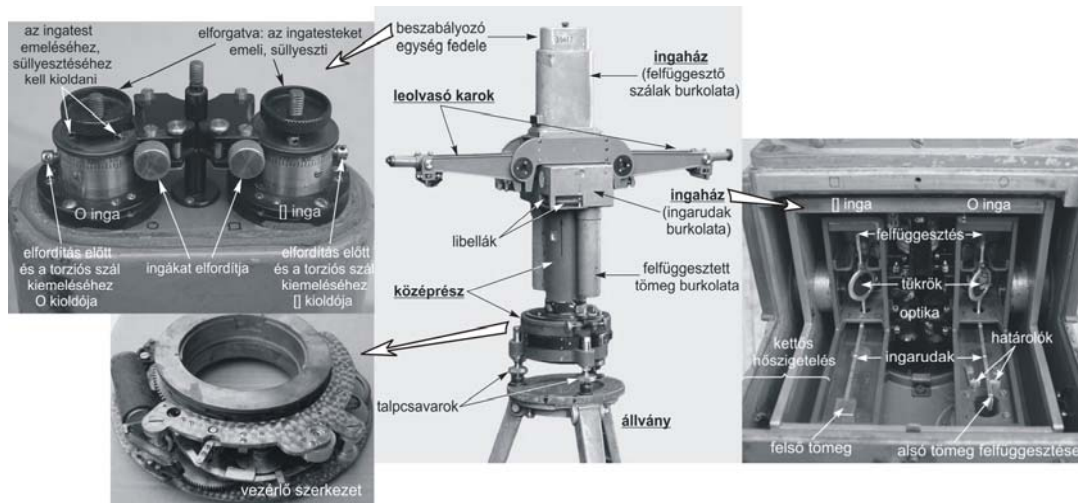
Az Eötvös-ingával mért gradiensek és görbületi adatok linearitása és a különböző interpolációs célokra történő felhasználása mindenképpen további vizsgálatokat igényel.

## 10 Műszerfejlesztés

A korábban gyártott Eötvös-ingák közül napjainkban két olyan típus áll rendelkezésre, amelyekkel jelenleg is megfelelő pontosságú terepi méréseket tudunk végezni. Az egyik az 1920-as évek végére kifejlesztett Eötvös-Rybár (Auterbal [Automatic Eötvös-Rybár Balance]) inga, a másik ennek az 50-es évekre továbbfejlesztett változata, az E54 típus. 1964-ben az ELGI egyik Auterbal-inga nélkülözhetővé vált, ezért az ÉKME Felsőgeodézia tanszékének ajándékozta oktatási célokra. Nem sokkal ezt követően az inga működésképtelen lett és a tanszék múzeumába került. Miután 2007-ben felmerült az igény újabb Eötvös-inga mérésekre és a működésképtelen inga javításával senkit nem tudtunk megbízni, magunk vállalkoztunk a feladat megoldására. Az ingát sikerült működőképessé tenni, sőt a mai korszerűbb technikai lehetőségeket kihasználva az egyes szerkezeti elemeinek továbbfejlesztésével kiválóan működő műszerhez jutottunk.

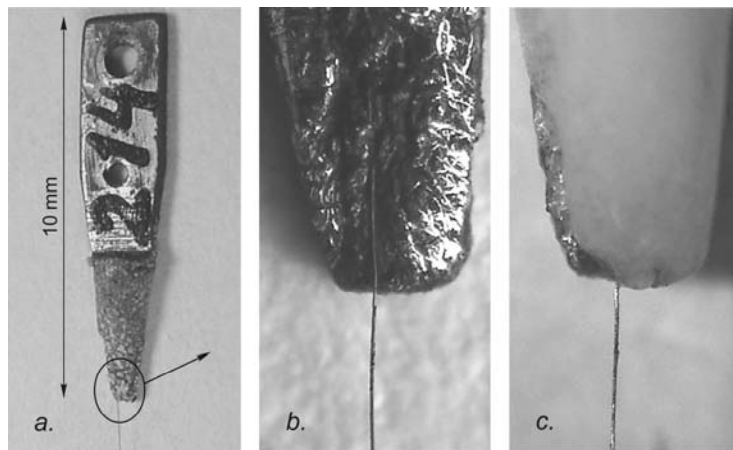
Az Auterbal-inga szerkezeti felépítése a 14. ábrán látható. Négy fő egysége: az ingaház, a középész, az állványzat és a leolvasókar. A műszer felújításához semmiféle leírás, vagy kézikönyv

nem állt a rendelkezésünkre, ezért az első szétszerelés és a javítás igen komoly feladat volt és hosszabb időt vett igénybe. Az inga középrészében található vezérlő szerkezetben egy törött alkatrészt elkészítését és cseréjét követően elkezdődhetett a műszer alapos tesztelése.



14. ábra. Az Auterbal-inga felépítése.

A kezdeti vizsgálatok során elsősorban a hőmérséklet-érzékenységére és a szálak driftjére voltunk kíváncsiak (Völgyesi és társai 2009a). A két ingarész közül a “[ ]” (négyzet-szál) szinte driftmentesen, tökéletesen viselkedett, ellenben a „O” (kör-inga) gyakorlatilag használhatatlannak tűnt, mivel teljesen rendszertelenül ugrásszerű változásokat (elfordulásokat) tapasztaltunk a leolvasások során. Hosszabb használat és különféle vizsgálatok után arra gyanakodtunk, hogy a szál felfüggesztésével (befogásával) lehet probléma. Ez azért okozott különös gondot, mert semmiféle tapasztalattal nem rendelkezünk a torziós szálak kezelésével kapcsolatban, márpedig a szálak kiemelése és visszaszerelése során a legkisebb rossz mozdulat is végzetes lehet a szálak szempontjából. A torziós szálak a hajszálnál vékonyabbak, szabad szemmel alig láthatóak, és mivel tartalék szálakkal nem rendelkezünk, pótolhatatlanok. A torziós szálak mindkét végét a 15. ábrán bal oldalon látható formában forrasztással rögzítették a befogó fülekhez.



15. ábra. A torziós szál befogásának javítása mikroszkópos felvételeken.  
(a. az eredeti befogás, b. a megtisztított-, c. a megjavított állapot.

Miután sikeresen kivettük a torziós szálat, és erős nagyítóval átvizsgáltuk a szál befogását, a felső befogó fül forrasztásán erős korróziót tapasztaltunk és a torziós szál körül egy mélynek tűnő üreg alakult ki a befogás csatlakozásánál. Még viszonylag erős nagyítás mellett sem lehetett az üregben belül látni a szál és a forrasztás fémes kapcsolatát. Mivel az erősen korrodált anyag újraforrasztásának túl nagy lett volna a kockázata, végül a ragasztás mellett döntöttünk. A fogászatban is használt rendkívül erős, de ugyanakkor kellőképpen rugalmas ragasztót (Ketac glass-ionomer cementet) alkalmaztunk. A ragasztás rendkívül kényes műveletét mikroszkóp alatt hajszálak ragasztásával gyakoroltuk. A 15. ábra középső mikroszkópos képén jól látható, hogy a szálát hosszú részen nem rögzíti kellőképpen a forrasztás a befogó fülhöz. Az erősen korrodált rész megtisztítása után sikerült a szál megfelelő rögzítése, amelyet a 15. ábra jobb oldalán láthatunk.

Ezt követően további fontos fejlesztéseket hajtottunk végre. Az automatikus leolvasás megvalósítása céljából a 16. ábrán bemutatott formában CCD-érzékelős kamerákat szereltünk fel a leolvasókaraokra, a skálák megvilágítására pedig erős fényű LED-eket (fénykibocsátó diódákat) erősítettünk a leolvasó távesővek alá. A kamerák vezérlését, a képek rögzítését *Laky S.* ötletei alapján számítógéppel oldottuk meg, a szükséges szoftvereket Linux operációs rendszer alá fejlesztettük (Völgyesi és társai 2009a). Mivel a kamerák alkalmazásával lehetőség nyílt hosszú időn keresztül akár másodpercenkénti 10-15 leolvasást végezni, ezzel új távlatok nyíltak eddig ismeretlen jelenségek megfigyelésére. Lehetővé vált például a lengések csillapodásának minden eddiginél pontosabb és részletesebb megfigyelése, és a hosszú idejű drift pontosabb tanulmányozása is elérhetővé vált.

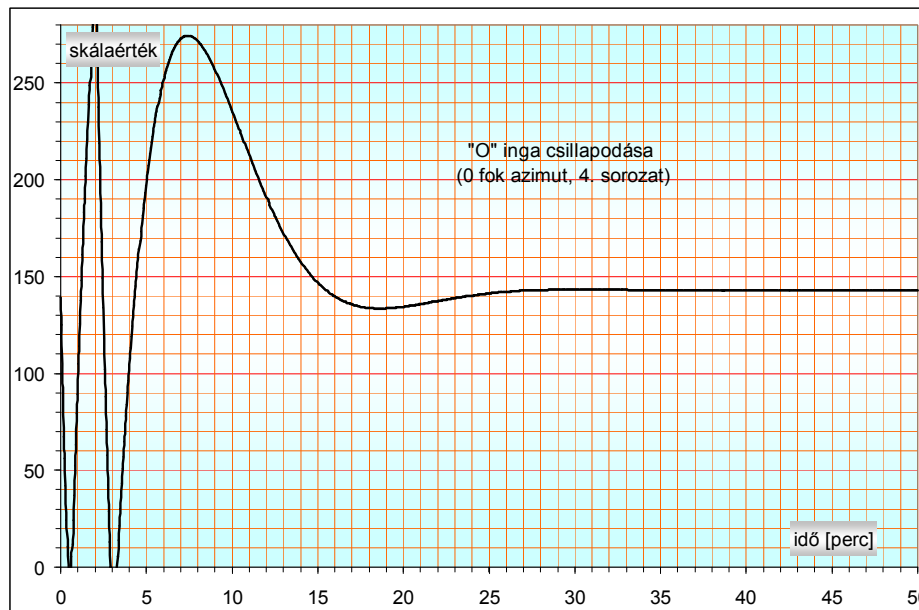


16. ábra. CCD-érzékelős kamera a leolvasókaron.

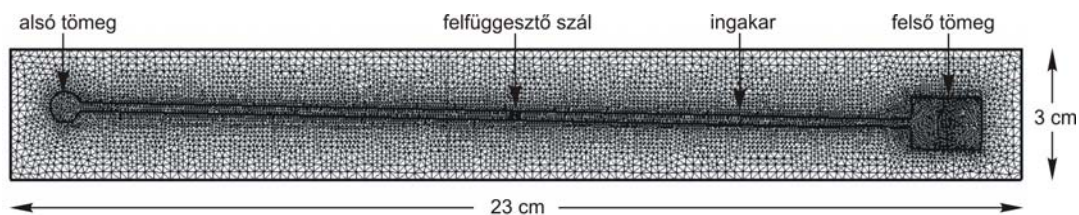
Az Eötvös-inga mérések mindenkor legnagyobb problémája a hosszú csillapodási idő, azonban a mai modern technika alkalmazásával lehetőség kínálkozik az észlelési idő jelentős csökkentésére. Az inga csillapodásának tanulmányozása céljából valamennyi azimutban több 40-50 perces felvételt készítettünk másodpercenként négy leolvasással. A csillapodási görbe finomszerkezetének tanulmányozása céljából másodpercenként 12, azaz közel 0.08 másodpercenkénti leolvasással, az esetleges hosszabb periódusú mozgások regisztrálására pedig több 24 órás 10 másodpercenkénti leolvasással is rögzítettük az ingák mozgását. Az így előállított idősorokból rendelkezésünkre álltak az igen részletes csillapodási görbék, amelyek közül egy jellegzetes esetet mutatunk be a 17. ábrán. A CCD-érzékelőkkel rögzített igen jó felbontású csillapodási görbék kezdeti szakaszából elvileg előre meghatározható az inga nyugalmi helyzete. A feladat megoldására több különböző lehetőséget vizsgáltunk – itt most a Navier-Stokes egyenletek végeseslemes megoldásán alapuló áramlási modell alkalmazását vázoljuk fel.

*Tóth Gy.* vizsgálatai alapján áramlási modellek segítségével az ingakar mozgásának meglehetősen pontos modellezése lehetséges. Ezek a modellek a végeseslemek módszerén alapulnak és képe-

sek figyelembe venni a mozgó testek, az üreg és a csillapító közeg (levegő) geometriai és fizikai paramétereit. A numerikus áramlástani vizsgálatokhoz, a szilárd test (ingakar) és folyadék (levegő) mozgásának analitikus leírásához a Tóth Gy. által javasolt ún. büntetőfüggvény módszert alkalmaztuk (Völgyesi és társai 2010). A 18. ábrán látható felvett numerikus háló (végelemek) háromszögeinek száma 15386, a csúcspontok száma 7829 volt.



17. ábra. Jellegzetes csillapodási görbe



18. ábra. Eötvös-inga kétdimenziós numerikus áramlástani vizsgálatokhoz kialakított geometriai modellje és az ingakamra főbb méretei (felülnézetben)

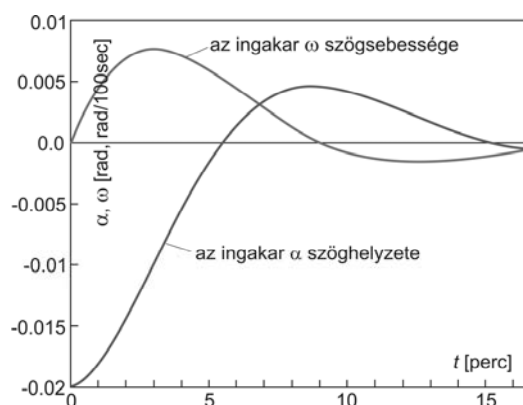
Amennyiben az ingaházban lengő ingakar mozgását viszkózusan csillapított torziós lengésként modellezzük, a csillapított rezgések elmélete szerint az inga esetében (alulcsillapított eset) a keletkező mozgás a következő 5 paraméteres függvénnyel írható le:

$$x = a_0 + a_1 e^{-a_2 t} \cos(a_3 t - a_4), \quad (11)$$

ahol  $x$  a leolvasás,  $t$  az idő,  $a_0, \dots, a_4$  pedig a mozgásra jellemző paraméterek (Völgyesi és társai 2010).

A 19. ábrán bemutatjuk egy olyan szimuláció eredményét, amelynek során sikeresen modelleztük az ingakar mozgását. A szimulált elfordulási idősorhoz elvégeztük a (11) modell illesztését (az  $a_0$  paraméter most zérus értékű). A szimulációból meghatározható a tényleges lengésidő, a csillapításra korrigált lengésidő és az  $a_2$  viszkózus csillapítási paraméter is. A modellezésből kapott korrigált lengésidő 1027 s volt (az elvi 1198 s helyett), az  $a_2$  csillapítási paraméter értéke pedig 0.264 lett az elvi 0.4 helyett. A numerikus háló felbontásának, a viszkozitásnak és a büntető paraméter változtatásának függvényében a számítás bizonyos esetekben instabillá válik, ezért másfajta számítási eljárásokkal is tervezzük modellezni az ingakar mozgását.





19. ábra. E-54-es inga numerikus áramlástanai modellezéssel számított  $\alpha$  elfordulási szöge és  $\omega$  szögsebessége a  $t$  idő függvényében ( $t$  mértékegysége 1 hs = 100 s)

A csillapodási görbe kezdeti szakaszából elvileg a differenciális evolúciós algoritmus alkalmazásával is előre meghatározható az inga nyugalmi helyzete. Erre vonatkozóan *Laky S.* végzett sikeres vizsgálatokat az ELGI E54 típusú ingájával.

## 11 Összefoglalás

Az 1960-as évek végén és az 1970-es évek elején *Biró Péter* professzor úr kezdeményezésére az Eötvös-inga geodéziai alkalmazásával kapcsolatosan indított vizsgálatok mára meghatározó erejű, széles fronton folyó kutatásokká bővültek a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékén. Kezdetben csak a görbületi adatok alapján végzett függővonal-elhajlás interpoláció volt a kutatások célja, de ez hamarosan kiterjedt a csillagászati szintezés bevonásával a geoid finomszerkezetének meghatározására. Közben egyre nagyobb igény mutatkozott minél több Eötvös-inga mérési adatra, ezért az ELGI-vel kötött együttműködési megállapodás keretében elkezdődött a múlt században végzett mintegy 60000 magyarországi Eötvös-inga mérési adat digitális adatbázisba rendezése. Ma már a korábbi mérések több mint kétharmada digitális formában közvetlenül rendelkezésre áll a további feldolgozások céljára. Ezt követően indultak kutatások az ingával mérhető horizontális gradiensek alkalmazására vonatkozóan a nehézségi értékek és a gravitációs anomáliák meghatározására. A rendelkezésünkre álló egyre modernebb számítástechnikai eszközök és néhány nyertes pályázat egyre bővülő lehetőségeket teremtettek további kutatások indítására. Így többek között elkezdődtek a vertikális gradiensek meghatározására vonatkozó vizsgálatok, majd a nehézségi erőtér potenciál-függvényének inverziós előállítását következett. Először a 2D potenciál-függvényt állítottuk elő a görbületi adatok alapján, majd az eredményeken felbuzdulva a 3D potenciál-függvény előállítását következett valamennyi fajta ingamérés,  $g$  mérés, és függővonal-elhajlás adatok együttes felhasználásával. Az utóbbi kutatások során egyre nagyobb igény mutatkozott további Eötvös-inga mérések végzésére is, ezért megjavítva és felújítva egy korábbi működésképtelen Auterbal-ingánkat a különböző laboratóriumi vizsgálatokat követően terepi méréseket is végeztünk.

A 70-es évek elején a korábbi Felsőgeodézia Tanszéken még csak e tanulmány szerzője foglalkozott az Eötvös-inga mérések geodéziai alkalmazásával. Ma már két-három vezető oktató összefogásával egész tanszéki csapat foglalkozik az egyre bővülő kutatásokkal, az ELGI és a Miskolci egyetem kutatóinak bevonásával. Az indulás óta száznál jóval több tudományos publikáció született ezekben a témákban, több PhD. és akadémiai fokozattal. Szerénytelenség nélkül kijelenthetjük, hogy Magyarországon, egyedüli helyen a világon ismét kialakult egy olyan tudásbázis, amely kellő elhivatottsággal rendelkezik Eötvös Loránd munkásságának folytatásához, képes az egykori műszerek javítására, továbbfejlesztésére, és rutinszerű terepi ingamérések elvégzésére.

A jövőbeli tervek rendkívül gazdagok, az egyik legfontosabb cél a geoid magyarországi felületdarabjának minél pontosabb meghatározása az Eötvös-inga adatok bevonásával.

**Köszönetnyilvánítás.** Jelenlegi kutatásaink a 76231 sz. OTKA támogatásával folynak.

## Hivatkozások

- Csapó G** (1991): Az ELGI Mátyás barlang mikrobázisán LCR graviméterrel végzett  $\Delta g$ , VG és E54 Eötvös-ingával végzett gradiensmérések eredményeinek anyaga. ELGI Adattár.
- Csapó G, Égető Cs, Kloska K, Laky S, Tóth Gy, Völgyesi L** (2009a): Kísérleti mérések Eötvös-ingával és graviméterekkel – az Eötvös-inga mérések eredményei geodéziai célú hasznosításának vizsgálata céljából. Geomatikai Közlemények, XII, 91-100.
- Csapó G, Laky S, Égető Cs, Ultmann Z, Tóth Gy, Völgyesi L** (2009b): Test measurements by Eötvös-torsion balance and gravimeters. Periodica Polytechnica Civil Engineering, 53(2), 75-80.
- Dobróka M, Völgyesi L** (2008): Inversion reconstruction of gravity potential based on gravity gradients. Mathematical Geosciences, 40(3), 299-311. DOI:10.1007/s11004-007-9139-z
- Dobróka M, Völgyesi L** (2009): A nehézségi erőter 3D potenciálfüggvényének inverziós előállítás. Geomatikai Közlemények, XII, 101-107.
- Dobróka M, Völgyesi L** (2010): Sorfejtéses Inverzió IV. A nehézségi erőter potenciálfüggvényének inverziós előállítása. Magyar Geofizika, 51(3) 143-149.
- Haalck H** (1950): Die vollständige Berechnung örtlicher gravimetrischer Störfelder aus Drehwaagemessungen. Veröffentlichungen des Geodätischen Institutes Potsdam, Nr. 4, Potsdam.
- Renner J** (1957): Újabb vizsgálatok a függővonalhajlások körében. MTA Műszaki Tudományok Oszt. Közl., XXI.(1-4), 99-113.
- Tóth Gy, Völgyesi L, Csapó G** (2005): Determination of vertical gradients from torsion balance measurements. IAG Symposia Vol 129, Gravity, Geoid and Space Missions, C. Jekeli, L. Bastos, J. Fernandes (Eds.), Springer, 292-297.
- Tóth Gy** (2007): Vertikális gravitációs gradiens meghatározás Eötvös-inga mérések hálózatában. Geomatikai Közlemények X, 29-36.
- Ultmann Z** (2012): Determination of the vertical gradients based on Eötvös torsion balance measurements. Pollack Periodica 7(2), Megjelenés alatt.
- Völgyesi L** (1993): Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica C. E., 37(2), 137-166.
- Völgyesi L** (1995): Test Interpolation of Deflection of the Vertical in Hungary Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica C.E., 39(1), 37-75.
- Völgyesi L** (1998): Geoid Computations Based on Torsion Balance Measurements. Reports of the Finnish Geodetic Institute 98:4, 145-151.
- Völgyesi L** (2001): Geodetic applications of torsion balance measurements in Hungary. Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, 57(2), 203-212.
- Völgyesi L.** (2005) Deflections of the vertical and geoid heights from gravity gradients. Acta Geod. Geoph. Hung, 40(2), 147-159.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G** (2005a): Determination of gravity anomalies from torsion balance measurements. In: Jekeli C Bastos L Fernandes J (szerk.) Geoid and Space Missions GGSM 2004. 368 p. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2005. 292-297.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G, Szabó Z** (2005b): Az Eötvös-ingamérések geodéziai célú hasznosításának helyzete Magyarországon. Geodézia és Kartográfia, 57(5), 3-12.
- Völgyesi L, Ádám J, Csapó G, Nagy D, Szabó Z, Tóth Gy** (2006): A Nemzetközi Földmérés 1906-os budapesti konferenciájának hatása a geodéziai és a geofizikai fejlődésére. Magyar Geofizika, 47(3), 101-112.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G** (2007): Determination of gravity field from horizontal gradients of gravity. Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica, 42(1). 107-117.
- Völgyesi L, Égető Cs, Laky S, Tóth Gy, Ultmann Z** (2009a): Eötvös-inga felújítása és tesztmérések a budapesti Mátyás-hegyi-barlangban. Geomatikai Közlemények, XII, 71-82.
- Völgyesi L, Csapó G, Laky S, Tóth Gy, Ultmann Z** (2009b): Közel fél évszázados szünet után ismét Eötvös-inga mérések Magyarországon. Geodézia és Kartográfia, 61(11), 71-82.
- Völgyesi L, Laky S, Tóth Gy** (2010): Az Eötvös-inga mérési idejének csökkentési lehetősége. Geomatikai Közlemények, XIII/2, 129-140.
- Völgyesi L, Ultmann Z** (2010): Nehézségi gradiensek linearitás-vizsgálata a Mátyás-barlangban. Geomatikai Közlemények, XIII/2. 23-128.
- Völgyesi L, Ultmann Z.** (2012): Reconstruction of a torsion balance, and the results of the test measurements. In: S. Kenyon, M.C.Pacino, U Marti (Eds.) Geodesy for Planet Earth, Buenos Aires, Argentina. 2009. International Association of Geodesy Symposia, Vol. 136, Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, ISBN: 978-3-642-20337-4. 281-290.
- Völgyesi L, Dobróka M, Ultmann Z** (2012): Determination of vertical gradients of gravity by series expansion based on inversion. Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica, 47(2). 233-244. DOI: 10.1556/AGeod.47.2012.2.11

Völgyesi L (2012): [Az Eötvös-inga mérések alkalmazása és jelentősége a geodéziában.](#) Geomatikai Közlemények, Vol. XV, pp 9-26.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.  
Web: <http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi> E-mail: [volgyesi@eik.bme.hu](mailto:volgyesi@eik.bme.hu)