

## 12. AZ EULER-FÉLE SZABADNUTÁCIÓ, KÉNYSZERNUTÁCIÓ, PÓLUSVÁNDORLÁS

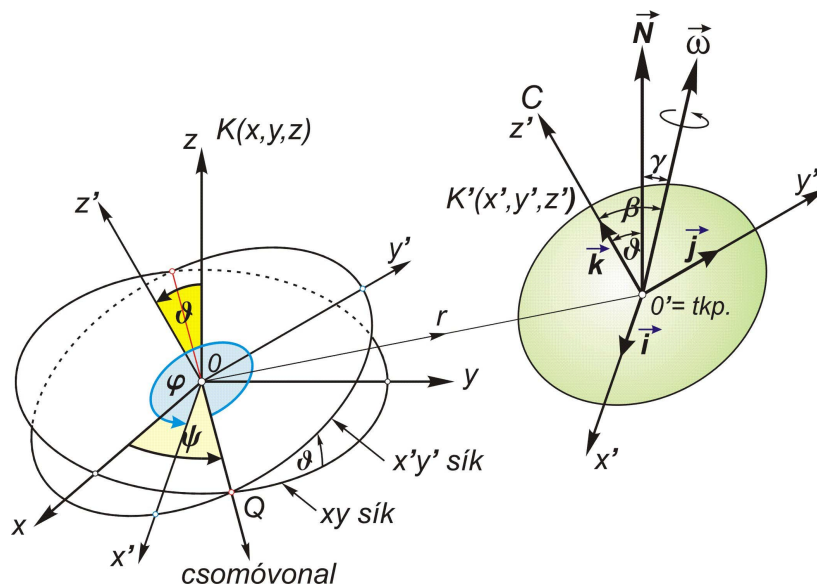
### Az Euler-egyenletek

Minden merev test forgása során a forgási tehetetlensége miatt igyekszik megtartani forgási állapotát, más szóval az impulzusnyomaték megmaradási törvénye értelmében bármely zárt rendszer  $\mathbf{N}$  impulzusnyomatéka állandó, tehát időbeli változása:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = 0 \quad (1)$$

Ha a forgó merev testre külső erők is hatnak, akkor az impulzusnyomaték megváltozása a külső erők  $\mathbf{M}$  forgatónyomatékával egyenlő, így az  $\vec{\omega}$  szögsebességgel forgó merev test kinetikai egyensúlyának feltétele valamely  $K(x, y, z)$  inerciarendszertől (tehát a testtel nem együttforgó "külső" koordinátarendszertől) szemlélve

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} \quad (2)$$



1. ábra. Merev testek forgásának leírásához használt koordinátarendszerek

Térjünk ezek után át a  $K(x, y, z)$  inerciarendszerről a merev testtel együtt forgó (az 1. ábrán látható)  $K'(x', y', z')$  koordinátarendszerre. Ha a forgó  $K'$  koordinátarendszeren belül az  $\mathbf{N}$  vektor nem változna, akkor a  $K$  inerciarendszertől szemlélve az  $\mathbf{N}$  vektor változása csak a forgásból állna:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{N} \quad .$$

Ha  $\mathbf{N}$  a  $K'$  rendszerből szemlélve is változik, akkor:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{d'\mathbf{N}}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{N} . \quad (3)$$

Ennek – az egyébként bármely tetszőleges vektorra érvényes általános vektor transzformációnak – a felhasználásával a (3) átírható a

$$\frac{d'\mathbf{N}}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{N} = \mathbf{M} \quad (4)$$

alakra; ami a merev testtel együtt forgó megfigyelő számára a forgási egyensúly feltétele (az Euler-féle vektoregyenlet).

Az Euler-féle vektoregyenlet összetevőkre bontásához először számítsuk ki a (4) összefüggésben szereplő  $\vec{\omega} \times \mathbf{N}$  vektoriális szorzatot a  $K'(x', y', z')$  koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ N_{x'} & N_{y'} & N_{z'} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(\omega_{y'}N_{z'} - \omega_{z'}N_{y'}) + \mathbf{j}(\omega_{z'}N_{x'} - \omega_{x'}N_{z'}) + \mathbf{k}(\omega_{x'}N_{y'} - \omega_{y'}N_{x'}) \end{aligned}$$

és bontsuk fel ennek segítségével a (4) vektoregyenletet az  $x', y', z'$  koordináta irányok szerinti skalár-egyenletekre:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d'N_{x'}}{dt} + \omega_{y'}N_{z'} - \omega_{z'}N_{y'} &= M_{x'} \\ \frac{d'N_{y'}}{dt} + \omega_{z'}N_{x'} - \omega_{x'}N_{z'} &= M_{y'} \\ \frac{d'N_{z'}}{dt} + \omega_{x'}N_{y'} - \omega_{y'}N_{x'} &= M_{z'} \end{aligned} \right\} . \quad (5)$$

A következő lépésben számítsuk ki az  $\mathbf{N}$  impulzusnyomaték-vektor  $N_{x'}$ ,  $N_{y'}$  és  $N_{z'}$  összetevőit. Az impulzusnyomaték-vektort a tehetetlenségi-nyomaték tenzor és a forgási szögsebesség-vektor szorzata adja:

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} \vec{\omega} \quad (6)$$

ahol

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

a merev test tehetetlenségi-nyomaték tenzora, melynek főátlójában az adott testnek az  $x', y'$  és a  $z'$  tengelyre vonatkozó

$$I_{x'x'} = \int (y'^2 + z'^2) dm$$

$$I_{y'y'} = \int (x'^2 + z'^2) dm$$

$$I_{z'z'} = \int (x'^2 + y'^2) dm$$

tehetetlenségi nyomatékaik szerepelnek, a főátlón kívüli elemek pedig az ún. centrifugális nyomatékok :

$$I_{x'y'} = I_{y'x'} = \int x' y' dm$$

$$I_{x'z'} = I_{z'x'} = \int x' z' dm$$

$$I_{y'z'} = I_{z'y'} = \int y' z' dm$$

Ha a  $K'$  koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy az  $x', y'$  és a  $z'$  tengelye egybeessen a test tehetetlenségi főirányjaival, akkor ezek a centrifugális nyomatékok zérusok lesznek. Ekkor az általában szokásos jelölés szerint:

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

és így:

$$\left. \begin{aligned} N_{x'} &= A \omega_{x'} \\ N_{y'} &= B \omega_{y'} \\ N_{z'} &= C \omega_{z'} \end{aligned} \right\} .$$

Behelyettesítve ezeket a (5) egyenletekbe, a merev testek forgását leíró *Euler-féle mozgásegyenleteket* (az ún. pörgettyű-egyenleteket) kapjuk, a merev testtel együtt forgó  $K'$  koordinátarendszerre vonatkozóan:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d' \omega_{x'}}{dt} + (C - B) \omega_{y'} \omega_{z'} &= M_{x'} \\ B \frac{d' \omega_{y'}}{dt} + (A - C) \omega_{x'} \omega_{z'} &= M_{y'} \\ C \frac{d' \omega_{z'}}{dt} + (B - A) \omega_{x'} \omega_{y'} &= M_{z'} \end{aligned} \right\} . \quad (7)$$

Ez három elsőrendű nem lineáris differenciálegyenlet a testhez rögzített  $K'(x', y', z')$  koordinátarendszerre vonatkozó  $\omega_{x'}$ ,  $\omega_{y'}$ ,  $\omega_{z'}$  szögsebesség összetevőkre, és abban az esetben érvényes, ha a merev test tehetetlenségi főirányai egybeesnek az  $x', y'$  és a  $z'$  koordi-

náta irányokkal, továbbá a koordinátarendszer kezdőpontja a test tömegközéppontjában van.

## A Föld, mint erőmentes szimmetrikus pörgettyű

Amennyiben a (7) Euler-féle egyenleteket erőmentes szimmetrikus pörgettyűnek feltételezett Földre alkalmazzuk, az alábbi egyszerűsítő feltevéseket tehetjük:

1. a Föld alakváltozásra képtelen *merev* test, azaz eltekintünk a rugalmasságától,
2.  $M_{x'} = M_{y'} = M_{z'} = 0$ , azaz a Földre semmiféle külső forgatónyomaték nem hat (erőmentes pörgettyű esete),
3.  $A = B$  vagyis az egyenlítő síkjába eső tehetetlenségi nyomatékok megegyeznek (szimmetrikus pörgettyű esete),
4. helyezzük el a Földhöz rögzített és vele együtt forgó  $K'(x', y', z')$  koordinátarendszer  $O'$  kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába ( $O \equiv tkp.$ ),
5. a forgástengely menjen át a tömegközépponton,
6. a Földhöz rögzített koordinátarendszer  $z'$  tengelyének iránya essen egybe a legnagyobb tehetetlenségi nyomaték  $C$  irányával ( $C > A$ ).

Ekkor a (7) Euler-féle mozgásegyenletek az

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d' \omega_{x'}}{dt} + (C - A) \omega_{y'} \omega_{z'} &= 0 \\ A \frac{d' \omega_{y'}}{dt} - (C - A) \omega_{x'} \omega_{z'} &= 0 \\ C \frac{d' \omega_{z'}}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

alakra egyszerűsödnek.

Mivel  $C \neq 0$ , a harmadik egyenlet megoldása:

$$\omega_{z'} = \omega_{z'0} = \text{áll.} \quad (10)$$

tehát a  $z'$  tengely körüli forgás szögsebessége (az  $\vec{\omega}$  szögsebesség-vektornak a szimmetriatengelyre vonatkozó vetülete) állandó.

Ezt követően osszuk el a (9) első két egyenletét  $A$ -val és vezessük be a

$$k = \frac{C - A}{A}$$

jelöléssel a *dinamikai lapultság* fogalmát. Ekkor a (9) első két egyenlete:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d' \omega_{x'}}{dt} + k \omega_{z'0} \omega_{y'} &= 0 \\ \frac{d' \omega_{y'}}{dt} - k \omega_{z'0} \omega_{x'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Differenciáljuk a (11) első egyenletét  $t$  szerint és helyettesítsük be az így keletkező  $d' \omega_{y'} / dt$  differenciálhányados kifejezését a (11) második egyenletébe. A rendezés után:



síknak az  $x'z'$  síkkal bezárt szöge. Mivel az  $\alpha$  a (14) szerint a  $t$  időnek lineáris függvénye, ezért

$$\frac{d\alpha}{dt} = k\omega_{z'0} = \frac{C-A}{A}\omega_{z'0} = \text{áll.} \quad (16)$$

tehát az  $\vec{\omega}$  vektor állandó szögsebességgel járja körül a test tömegéhez rögzített koordinátarendszer  $z'$  tengelyét.

Az  $\vec{\omega}$  (15) összetevőit megvizsgálva látható, hogy az  $\vec{\omega}$  vektor végpontja a  $z'$  tengely körül a (16) szerint állandó szögsebességgel

$$m = \sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2}$$

sugarú kört ír le, így maga a forgási szögsebesség-vektor – azaz a Föld forgástengelye – egy  $2\beta$  nyílásszögű kórkúp palástja mentén mozog a tehetetlenségi főtengellyel azonos  $z'$  koordinátatengely körül, ahol

$$\beta = \arctg \frac{m}{\omega_{z'0}}. \quad (17)$$

A Föld forgása tehát nem a  $C$  szimmetriatengely körül (azaz nem a Föld tömegéhez kötött állandó helyzetű  $z'$  tengely-) hanem mindig a *pillanatnyi forgástengely* körül történik. A Föld felszínén az  $\vec{\omega}$  vektor végpontja által leírt kör (a pillanatnyi forgástengelynek a földfelszíni nyomvonala) a *merev Föld póluspályája*, vagy pollódiuma.

Ez az erőmentes szimmetrikus pörgettyű *nutációs* mozgásának lényege a testtel együtt forgó koordinátarendszerből szemlélve.

Határozzuk meg ezek után a Föld esetében a pillanatnyi forgástengely egy teljes körülvándorlásának idejét. Jelölje  $T_E$  azt az időt, amely alatt a forgástengely egyszer körüljárja a  $z'$  tengelyt; ekkor a (14) alapján:

$$k\omega_{z'0}T_E = 2\pi$$

tehát :

$$T_E = \frac{2\pi}{\frac{C-A}{A}\omega_{z'0}}$$

Mivel a forgás jó közelítéssel a  $z'$  tengely körül történik, ezért  $\omega_{z'0} \approx |\vec{\omega}|$  azaz

$$\frac{2\pi}{\omega_{z'0}} \approx \frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{ csillagnap} = 0.9973 \text{ szoláris nap},$$

tehát:

$$T_E \approx \frac{A}{C-A}.$$

Csillagászati megfigyelések szerint:

$$\frac{A}{C-A} = 0.003295$$

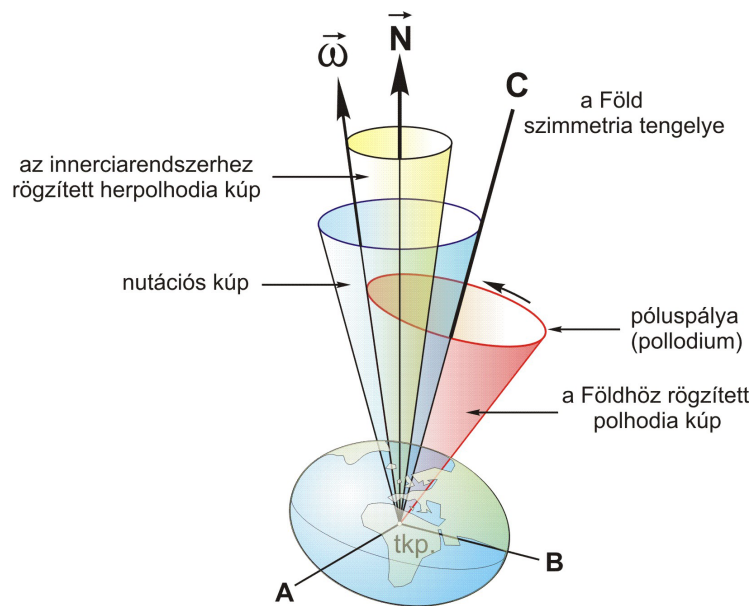
így tehát

$$T_E \approx 303 \text{ nap} .$$

Mivel a mozgásegyenletek fenti levezetése EULERTŐL származik, a forgástengely állandó szögsebességű körbevándorlásának 303 napos periódusát *Euler-féle periódusnak* (gyakran Euler-féle *szabadnutációs* periódusnak) nevezzük. Az elnevezésben a "szabad" jelző arra utal, hogy a jelenség külső erőhatásoktól teljesen független és a kialakult mozgás periódusidejét kizárólag a merev test (esetünkben a Föld) tömegeloszlása határozza meg.

Mindezekből az következik, hogy ha valamely merev test tengelykörüli forgása nem a  $C$  főtehetetlenségi nyomaték tengelye körül indult meg, akkor ez a mozgási állapot megmarad, tehát a forgástengely nem billen vissza olyan állapotba, hogy a főtehetetlenségi tengellyel egybeesék. Ekkor viszont a pillanatnyi forgástengely állandó szöggel hajlik a főtehetetlenségi tengelyhez, miközben állandó sebességgel járja körül.

Amikor a forgástengely pontosan egybeesik a szimmetriatengellyel ( $\beta = 0$ ), vagy az  $A = B = C$  esetén a mozgás ugyan olyan mint egy rögzített tengely körüli állandó szögsebességű forgás, azaz nutáció nem lép fel.



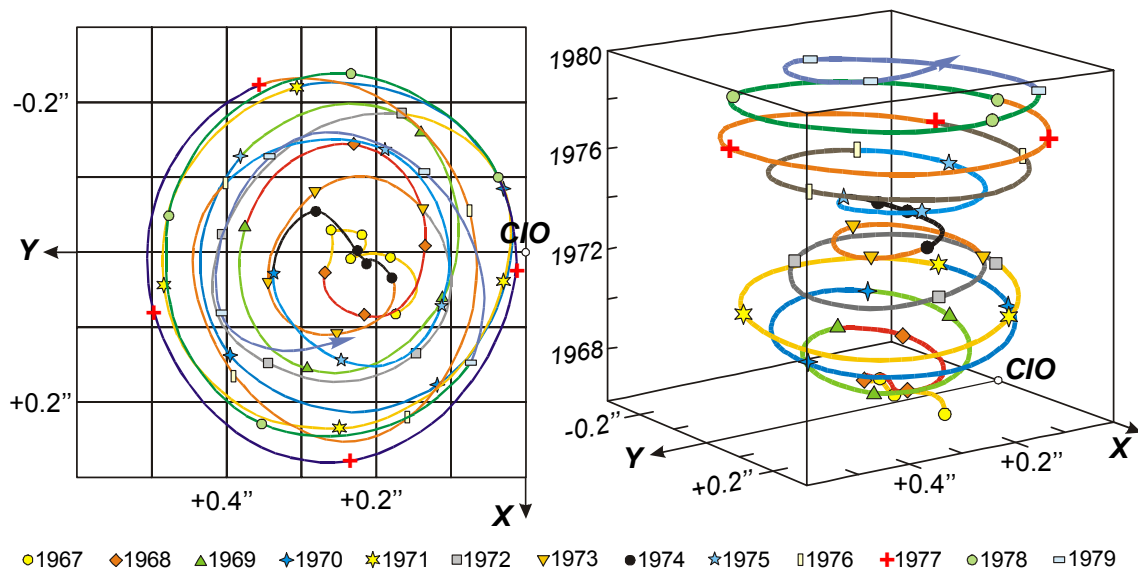
3. ábra. Az Euler-féle szabadnutáció külső inerciarendszerből szemlélve.

Mindez, amit eddig tárgyaltunk, a Földdel együtt forgó  $K'$  koordinátarendszerből szemlélve látható. Külső inerciarendszerből szemlélve (a  $K$  inerciarendszerben) mind a Föld forgástengelyének, mind a Föld  $C$  szimmetriatengelyének az iránya folyamatosan változik, csupán az  $\mathbf{N}$  impulzustengely iránya változatlan, az impulzusnyomaték (1) szerinti megmaradási törvénye értelmében. A mozgást legegyszerűbben a 3. ábra alapján értelmezzük meg. A Föld pillanatnyi forgástengelye (a  $C > A$  esetén) a kisebb nyílásszögű ún. herpoloida kúp palástja mentén, a  $C$  szimmetriatengely (a Föld tehetetlenségi főiránya)

pedig a nagyobb nyílásszögű ún. nutációs kúp palástja mentén kerüli meg az  $\mathbf{N}$  impulzusnyomaték vektort. Eközben az  $\vec{\omega}$  vektor az ún. polhodia kúp palástja mentén a  $C$  tengely körül is vándorol. A mozgás során az  $\vec{\omega}$ , az  $\mathbf{N}$  és a  $C$  mindig egy síkban van, miközben a Föld tömegéhez rögzített helyzetű polhodia kúp és az inerciarendszerben rögzített helyzetű herpolhodia kúp palástja állandóan az  $\vec{\omega}$  vektor iránya mentén érintkezve csúszásmentesen gördül egymáson.

## A pólusingadozás valódi periódusa

A valódi Föld pillanatnyi forgástengelyének a főtehetetlenségi irányát jól közelítő (megállapodással definiált) tengelyéhez viszonyított – mérésekkel meghatározható – mozgását *pólusingadozásnak* nevezzük. Az eddigi feltevések (pl. merev és forgásszimmetrikus Föld esete) a valóságban nem érvényesek, ezért a megfigyelt pólusingadozás jelentősen eltér az elméleti megfontolások fenti eredményeitől.



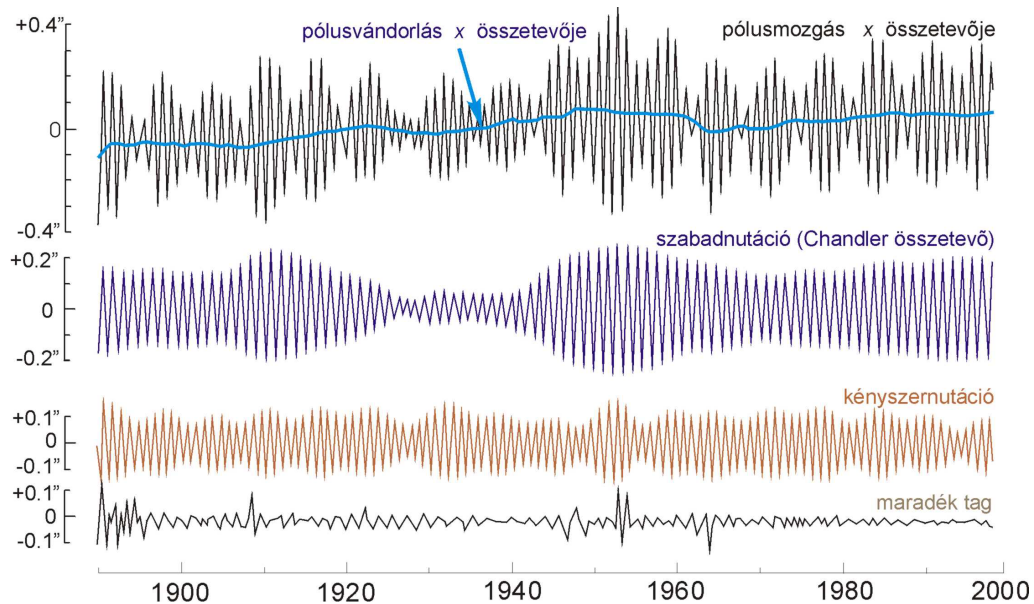
4. ábra. A póluspálya 1967-1979 között.

Ha mérésekkel bármikor meghatározzuk a valódi póluspályát, a *pollodiumot* (a forgástengely mozgásának földfelszíni nyomvonalát) akkor a 4. ábra baloldalán láthatóhoz hasonló képet kapunk. A 4. ábrán az 1967 és 1979 közötti póluspálya látható olyan koordinátarendszerben, amelynek  $+x$  tengelye a greenwichi kezdőmeridián irányába,  $+y$  tengelye pedig erre merőlegesen, nyugat felé mutat; a kezdőpontja pedig az 1900 és 1905 közötti időtartamra meghatározott közepes pólushely: a **CIO** (Conventional International Origin). Látható, hogy a pólus valóban periodikus mozgást végez, a pólus elmozdulása kb.  $0.5'' \approx 10$  m sugarú körön belül marad, de az amplitúdó nem állandó és a periódus sem egyenlő az Euler-féle 303 napos periódussal, hanem ennél lényegesen hosszabb: 405 és 457 nap között ingadozik – átlagosan mintegy 435 nap.

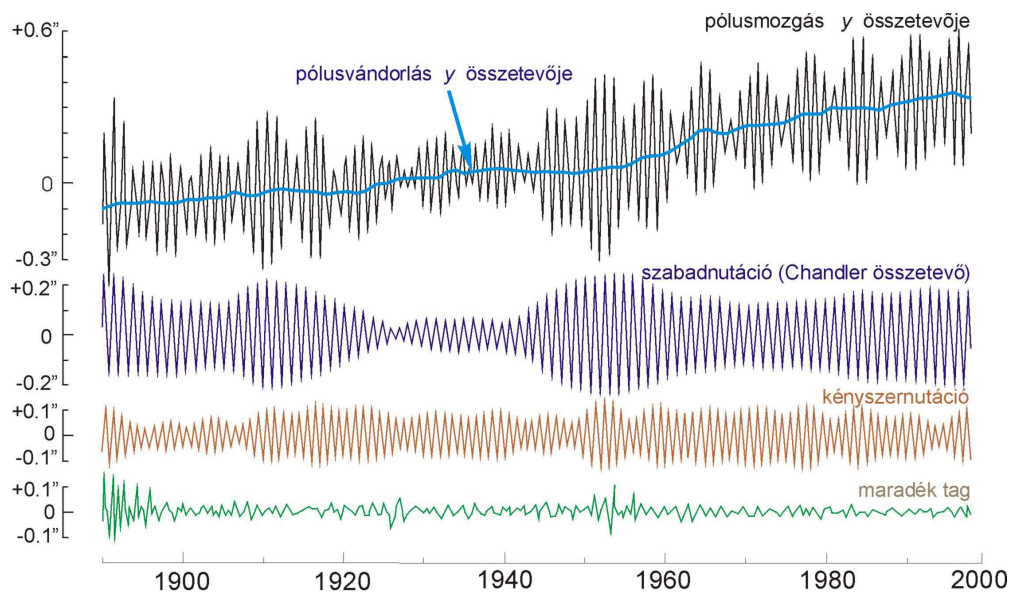
A pólusmozgás felfedezése utáni években CHANDLER amerikai csillagász kimutatta, hogy a pólusingadozás két domináns periódusból, egy 12 és egy 14 hónapos periódusból



tevődik össze. Az utóbbit tiszteletére *Chandler-periódusnak* nevezték el. Néhány hónappal CHANDLER felfedezése után NEWCOMB már elméleti magyarázattal is szolgált: a 14 hónapos összetevő a Föld *szabadnutációja*, míg a 12 hónapos összetevő az ún. *kényszernutáció*, mely az azonos periódusú globális meteorológiai jelenségek (pl. légtömegmozgások, hőtömegek olvadása és újraképződése stb.) következménye.



5. ábra. A pólusmozgás  $x$  összetevője 1890-2000 között.



6. ábra. A pólusmozgás  $y$  összetevője 1890-2000 között.

A 4. ábrán látható, hogy a pólus az óramutató járásával ellentétes irányban többékevésbé szabályos spirális pályán mozog. Ezek a spirális pályák kb. hat évenként hasonló

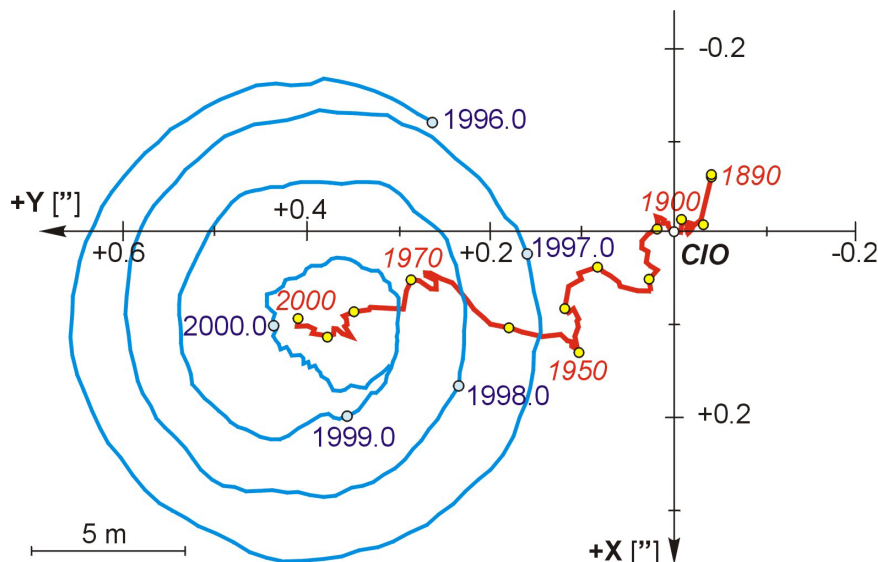
jellegűek, a két frekvencia összeadódásából kialakuló *lebegés* következtében. Jól látható ez a lebegés a 4. ábra jobb oldalán, a pólusingadozás 1967 és 1979 közötti időszakra vonatkozó 3 dimenziós képén. Ugyancsak ezt szemlélteti a 5. és a 6. ábra is, ahol a felső görbe a pólusmozgás  $x$  illetve  $y$  irányú összetevője, alatta pedig a szétválasztott 14 hónapos, 12 hónapos és a maradék összetevők láthatók. Megállapítható, hogy a szabadnutáció és a kényszernutáció külön-külön is meglehetősen bonyolult folyamat. A Chandler-összetevőn pl. felismerhető egy fél évszázad körüli periódus, amely több más földfizikai folyamatban is jelentkezik, okát azonban egyelőre nem ismerjük.

Az átlagosan 427 napos Chandler-periódus és a 303 napos Euler-periódus közötti különbség oka a Föld rugalmas viselkedése. Ha ugyanis a Föld nem merev – mint ahogyan Euler feltételezte – akkor a forgástengely elmozdulásának megfelelően a megváltozó centrifugális erő hatására úgy deformálódik a tömege, hogy a tehetetlenségi főtengelye közeledik a forgástengelyhez. (Szélső esetben, ha a Föld folyadékszerűen viselkedne, akkor a tehetetlenségi főtengelye teljes mértékben követné a forgástengely elmozdulását – tehát a periódus végtelen nagy lenne, és így pólusingadozásról nem is lehetne beszélni.)

Ennek megfelelően a  $T_E$  Euler-féle, és a  $T_C$  Chandler-periódus hányadosa kapcsolatba hozható a Föld rugalmasságával.

### A pólusvándorlás

Ha meghatározzuk egy-egy teljes periódushoz a 4. ábrán látható póluspályák közepes pólushelyzeteit, akkor azt tapasztaljuk, hogy ezek a közepes pólushelyek az idő függvényében folyamatosan eltolódnak. A jelenséget szekuláris pólusmozgásnak, vagy *pólusvándorlásnak* nevezzük. A 7. ábrán látható, hogy pl. az 1890 és 2000 közötti póluspálya már teljes egészében az 1900 és 1905 között meghatározott CIO középpóluson kívül halad. Az ábrán látható, hogy a közepes pólus 110 év alatt több mint 10m-t mozdult el Kanada irányában.



7. ábra. A pólus vándorlása 1890 és 2000 között.

A megfigyelések szerint a pólusvándorlás mértéke viszonylag csekély, – évente legfeljebb néhány  $dm$  (néhány ezred szögmásodperc) nagyságrendű – a földtörténeti időskálán azonban ez az elmozdulás jelentős (több  $10^0$ ) mértékű is lehet. Ezért a pólusvándorlás problémája a geológia és a geofizika sokat tárgyalt kérdése; különösen a paleoklimatológiai és újabban néhány globális tektonikai kérdés megválaszolása szempontjából igen fontos.

## A pólusmozgás geodéziai és csillagászati hatása

Kizárólag a pólusmozgás hatását figyelembe véve az  $\vec{\omega}$  forgási szögsebesség-vektornak az állócsillagokhoz viszonyított helyzetét gyakorlatilag állandónak tekinthetjük. Ekkor viszont állandó az égi egyenlítő síkjának helyzete is, tehát a csillagok saját mozgásától eltekintve, ezek égi egyenlítői (ekvatoriális) koordinátái az időben változatlanok.

Ugyanakkor a Föld felszínén fekvő pontoknak a forgástengelyhez viszonyított helyzete a Föld tömegének a forgástengelyhez viszonyított elmozdulásával folyamatosan változik, így a pontok szintfelületi földrajzi koordinátái is folyamatosan változnak.

## A pólusmozgás oka

A pörgettyűmozgás elmélete szerint a szabad tengely körül forgó merev testek helyzete akkor stabil, ha a forgás megindulásakor a test forgástengelye megegyezik a tehetetlenségi főtengelyével. Ellenkező esetben, vagyis ha a forgás nem a tehetetlenségi főtengely körül indul meg, akkor a forgó test helyzete – erőmentes térben is – állandóan változik, azaz a test szabadnutációs mozgást végez. Így ha valamely merev bolygó esetében valamikor kialakult a szabadnutációs mozgás, akkor ennek fenntartásához semmiféle mechanizmusra nincs szükség.

Mivel a Föld nem merev test, rá ez a megállapítás nem érvényes. A Föld esetében a minimális mozgási energiájú állapot a tehetetlenségi főtengely körüli forgás. Ettől eltérő helyzetű forgástengely esetén olyan belső tömegátrendeződések lépnek fel, amelyek a két tengely közeledését illetve egybeesését igyekeznek előidézni. A Chandler-összetevő vizsgálata alapján az a csillapítási idő, amely alatt a mozgás amplitúdója  $e$ -ed részére csökken kb. 10-30 év közötti értékre becsülhető. Az ennél jóval hosszabb idejű megfigyelések azt bizonyítják, hogy léteznie kell valamilyen gerjesztő folyamatnak, amely a pólusmozgás ismeretlen módon elnyelődő energiáját valamilyen formában pótolja.

A lehetséges disszipációs és gerjesztési folyamatok napjainkban még tisztázatlanok, mivel az eddig felmerült lehetőségek általában más módon nehezen ellenőrizhetők és a számítások igen bonyolultak.

*A fentiek szerint az viszont nyilvánvaló, hogy a Föld nutációs mozgásának oka a Föld bonyolult belső tömegeloszlása és a tömegek állandó mozgása, áthelyeződése. A Földön kívüli tömegek eloszlásának, a különböző égitesteknek a pólusmozgásra semmilyen hatása nincs!*