

A FÖLD PRECESSZIÓS MOZGÁSÁNAK FIZIKAI ALAPJAI

*Völgyesi Lajos**

Physical backgrounds of the Earth's precession. Rotation of the Earth is a quite involved process. Deep knowledge of certain areas of physics is indispensable for its understanding and research. It is necessary to clarify the physical elements of rotation of rigid bodies because the usage of elements connecting to precession and nutation by experts are generally not suitable, and are confused. After the discussion some important aspects of rotational mechanics, certain elements of precession of the Earth (lunisolar precession, planetary precession, disturbed precession) will be defined and discussed. A new terminology is proposed, e.g. disturbed precession instead of the widely spreaded deceptive expression astronomical nutation.

A Föld meglehetősen bonyolult forgási jelenségeinek megismeréséhez és kutatásához pontos fizikai alapismeretek szükségesek. A szakemberek által a precesszióval kapcsolatosan használt bizonyos fogalmak nem egységes - időnként hibás - használata, a precesszió és a nutáció jelenségének keveredése szükségessé teszi a fizikai alapfogalmak tisztázását. A tanulmányban a szimmetrikus súlyos pörgettyűk precessziós és a nutációs mozgásának áttekintését követően a Föld precessziós mozgásának részletes ismertetésével foglalkozunk. Az alapfogalmak tisztázását követően javasoljuk a szaknyelvben széleskörűen elterjedt hibás elnevezések helyett újak, pl. a csillagászati nutáció helyett a precessziózavar fogalmának bevezetését és használatát.

Kulcsszavak: a Föld forgása, precesszió, nutáció, luniszoláris precesszió, planetáris precesszió, csillagászati nutáció, normálpörcsszió, precessziózavar

Szimmetrikus súlyos pörgettyű precessziós mozgása

Minden merev test forgása során a forgási tehetetlensége miatt igyekszik megtartani forgási állapotát, más szóval az impulzusnyomaték megmaradási törvénye értelmében bármely zárt rendszer **N** impulzusnyomatéka állandó, tehát időbeli változása:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = 0 . \quad (1)$$

Ha a forgó merev testre külső erők is hatnak, akkor az impulzusnyomaték megváltozása a külső erők **M** forgatónyomatékával egyenlő:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} . \quad (2)$$

A forgatónyomaték vektora az **F** erő és az **r** erőkar vektoriális szorzata:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} \quad (3)$$

*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, H-1521 Budapest
E-mail: volgyesi@sci.fgt.bme.hu

az impulzusnyomaték pedig a mechanikából ismert összefüggés szerint:

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} \vec{\omega} \quad (4)$$

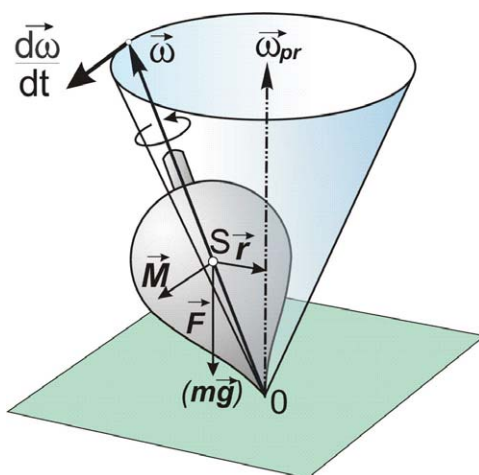
ahol \mathbf{I} a merev test tehetetlenségi nyomaték tenzora, $\vec{\omega}$ pedig a forgási szögsebesség vektora. Behelyettesítve a (3) és a (4) összefüggést a (2)-be:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I} \vec{\omega} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} \quad (5)$$

Mivel adott merev test esetén $\mathbf{I} = \text{áll.}$, ezért az \mathbf{I} kiemelhető a differenciálási jel elé, tehát (5) az

$$\mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} \quad (6)$$

formában is írható. Ebből viszont már közvetlenül látható, hogy külső forgatónyomaték hatására a nehézségi erőterben megfelelően gyorsan forgó merev testek (az ún. súlyos pörgettyűk) $\vec{\omega}$ szögsebesség vektorának térbeli iránya folyamatosan változik; az $\vec{\omega}$ vektor mindenkor az \mathbf{F} és az \mathbf{r} irányára merőleges irányban mozdul el. Ennek megfelelően az 1. ábrán látható ferde tengelyű gyorsan forgó pörgettyű (pl. a mindenki által jól ismert játék: a bűgőcsiga) nem dől el, hanem a forgástengelye függőleges tengelyű körkúp palástja mentén állandó $\vec{\omega}_{pr} \ll \vec{\omega}$ precessziós szögsebességgel lassan körbevándorol. A pörgettyű forgástengelyének ezt a mozgását *precessziós mozgásnak* nevezzük.



1. ábra. A súlyos pörgettyű precessziós mozgása.

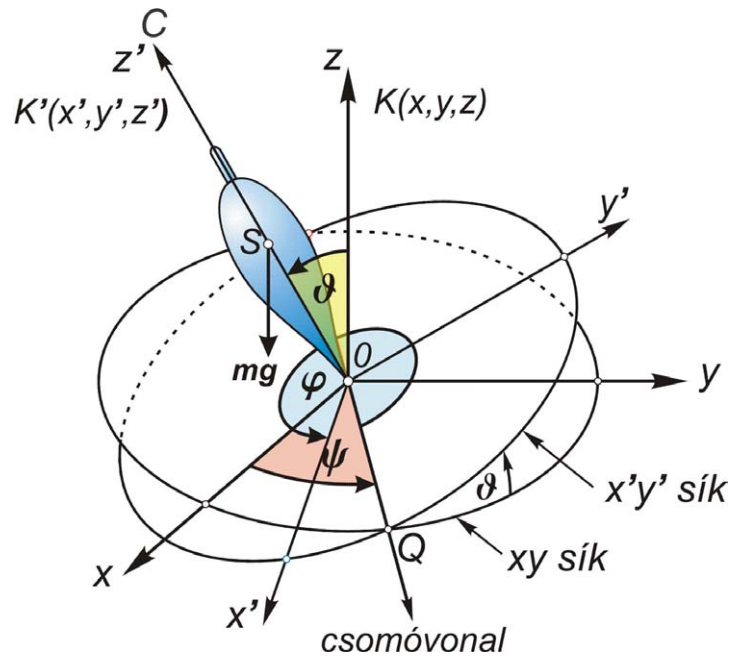
Ettől teljesen független az *erőmentes* (forgatónyomaték nélküli, súlypontjában alátámasztott) szimmetrikus pörgettyűk *nutációs* mozgása. A precesszióval ellentétben a nutáció során a test forgástengelye a szimmetriatengely körüli kúppalást mentén vándorol egyen-

letes sebességgel körbe, amennyiben forgástengely és a szimmetriatengely nem esik egybe (VÖLGYESI, 2002).

Szimmetrikus súlyos pörgettyű mozgásának analitikus tárgyalása

A szimmetrikus súlyos pörgettyű mozgásáról az eddigieknél pontosabb képet nyerhetünk az analitikus tárgyalás során.

Vizsgáljuk meg a súlyos pörgettyű mozgását abban az esetben, amikor mind a rögzített O pontja, mind az S súlypontja a szimmetriatengelyen van, és jelölje s az OS távolságot. A térben rögzített $K(x, y, z)$ koordináta-rendszer z tengelye mutasson a 2. ábrán látható módon függőlegesen felfelé, a testhez rögzített $K'(x', y', z')$ rendszer tengelyei pedig mutassanak rendre az A, A, C fő tehetetlenségi nyomatékok irányába. Legyenek a K' rendszerben az $\vec{\omega}$ forgási szögsebesség-vektor összetevői $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$ és jellemezzük a K' rendszer helyzetét a K -ban a 2. ábrán látható módon a ϑ, ψ, φ Euler-féle szögekkel. A feladatunk ezek után a szimmetrikus súlyos pörgettyű mozgásának leírása a K rendszerben.



2. ábra. A súlyos pörgettyű mozgásának leírásához használt koordináták.

A feladat megoldásához induljunk ki az energia megmaradásának törvényéből. Eszerint a súlyos pörgettyűre a forgási és a 2. ábra szerinti $mgs \cos \vartheta$ potenciális energia összege állandó:

$$\frac{I}{2} \left(A\omega_{x'}^2 + A\omega_{y'}^2 + C\omega_{z'}^2 \right) + mgs \cos \vartheta = \text{áll.} \quad (7)$$

Emellett - amint a 2. ábrán is látható - a nehézségi erő \mathbf{M} forgatónyomaték vektora a z és a z' tengelyre is merőleges, ezért az \mathbf{M} -nek e két tengelyre vonatkozó összetevője zérus:

$$M_z = 0 \quad (8)$$

és

$$M_{z'} = 0. \quad (9)$$

Ebből további fontos összefüggés következik az

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - B) \omega_y \omega_z &= M_x \\ B \frac{d\omega_y}{dt} + (A - C) \omega_x \omega_z &= M_y \\ C \frac{d\omega_z}{dt} + (B - A) \omega_x \omega_y &= M_z \end{aligned} \right\}$$

Euler-féle pörgettyű egyenletek harmadik tagjának felhasználásával. Figyelembe véve a (9)-et, illetve a szimmetria miatti $A = B$ egyenlőséget:

$$C \frac{d\omega_{z'}}{dt} = 0$$

amiből a $C \neq 0$ miatt:

$$\omega_{z'} = \omega_{z'0} = \text{áll.} \quad (10)$$

Ugyanakkor a (8) összefüggésből az impulzusnyomaték megmaradására vonatkozó (2) összefüggés alapján:

$$N_z = \text{áll.}$$

amiből további fontos megállapítások tehetők, ha ezt a 2. ábra alapján a K' koordináta-irányok szerinti összetevőkre felbontva átírjuk:

$$N_z = N_{x'} \cos(x', z) + N_{y'} \cos(y', z) + N_{z'} \cos(z', z) = \text{áll.}$$

Ebből az $N_{x'} = A\omega_{x'}$, $N_{y'} = A\omega_{y'}$ és $N_{z'} = C\omega_{z'}$ figyelembe vételével:

$$N_z = A\omega_{x'} \cos(x', z) + A\omega_{y'} \cos(y', z) + C\omega_{z'} \cos(z', z) = \text{áll.} \quad (11)$$

Fejezzük ki a (11)-ben szereplő iránykoszinuszokat az Euler-féle szögekkel. Megfelelő gömbháromszögtani összefüggések felhasználásával (BUDÓ, 1964) szerint az egyes

iránykoszinuszok az Euler-féle szögekkel az 1. táblázatban összefoglalt módon fejezhetők ki. (A táblázat alapján pl. $\cos(x', z) = \sin \varphi \sin \vartheta$.)

1. táblázat. Iránykoszinuszok kifejezése az Euler-féle szögekkel.

	x'	y'	z'
x	$\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta$	$-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta$	$\sin \psi \sin \vartheta$
y	$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta$	$-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta$	$-\cos \psi \sin \vartheta$
z	$\sin \varphi \sin \vartheta$	$\cos \varphi \sin \vartheta$	$\cos \vartheta$

Beírva a (11) összefüggésbe az 1. táblázatból a megfelelő iránykoszinuszokat:

$$N_z = A(\omega_{x'} \sin \varphi \sin \vartheta + \omega_{y'} \cos \varphi \sin \vartheta) + C\omega_{z'} \cos \vartheta = \text{áll.} \quad (12)$$

Mivel a testtel együtt forgó K' koordinátarendszerben az $\vec{\omega}$ szögsebesség-vektor összetevői az Euler-féle szögekkel (LANDAU-LIFSIC, 1974; illetve BUDÓ, 1964) szerint az

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi \\ \omega_{y'} &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \cos \varphi - \frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi \\ \omega_{z'} &= \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

összefüggésekkel fejezhetők ki, ezért lehetőségünk van a (7), (10) és a (12) összefüggésekben az $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ szögsebesség összetevőket az Euler-szögek felhasználásával átírni. Így a (7), (10) és a (12) összefüggések:

$$\left. \begin{aligned} A \left(\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin^2 \vartheta + \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right) + 2mgs \cos \vartheta &= \text{áll.} \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{z'0} &= \text{áll.} \\ A \frac{d\psi}{dt} \sin^2 \vartheta + C \omega_{z'0} \cos \vartheta &= \text{áll.} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ahol az első egyenlet áll. értékében már benne szerepel a $C\omega_{z'0}^2$ is. Ez három egymástól független elsőrendű differenciálegyenlet, amelyekből a három ismeretlen $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ numerikus integrálással meghatározható, vagyis a súlyos szimmetrikus pörgettyű mozgása a térben rögzített K rendszerben megadható.

A (14) differenciálegyenlet rendszer megoldásához először megfelelő kezdeti feltételeket kell választanunk. Kezdeti feltételként válasszuk azt az esetet, amikor a súlyos pörgettyű szimmetriatengelye ϑ_0 szöget zár be a függőleges irányú z tengellyel, és ekkor a pörgettyűnek csak a szimmetriatengelye körül legyen $\omega_{z'0}$ forgási szögsebessége. Vagyis a

$$t = 0 \text{ idődőpontban: } \vartheta = \vartheta_0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega_{z'0}.$$

Beírva a (14)-be a kezdeti feltételeknek megfelelő állandók (sorrendben: $2mgs \cos \vartheta_0$, $\omega_{z'0}$ és $C \omega_{z'0} \cos \vartheta_0$) értékét, átrendezés után:

$$\left. \begin{aligned} A \left(\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin^2 \vartheta + \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right) &= 2mgs(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta + \frac{d\phi}{dt} &= \omega_{z'0} \\ A \frac{d\psi}{dt} \sin^2 \vartheta &= C \omega_{z'0} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

A (15) harmadik egyenletéből a $d\psi/dt$ -t kifejezve és beírva (15) első egyenletébe, kisebb átrendezés után:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{A} \left(2mgs - \frac{C^2 \omega_{z'0}^2 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}{A \sin^2 \vartheta} \right)}.$$

Ennek egy jól közelítő megoldása a megfelelően gyorsan forgó pörgettyűk esetére (BUDÓ, 1964):

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{A mgs \sin \vartheta_0}{C^2 \omega_{z'0}^2} \left(1 - \cos \frac{C}{A} \omega_{z'0} t \right). \quad (16)$$

Bevezetve az

$$\omega_{pr} = \frac{mgs}{C \omega_{z'0}} \quad \left(= \frac{M}{N_z \sin \vartheta} \right) \quad (17)$$

(átlagos precessziós szögsebesség) és az

$$\omega_{nu} = \frac{C}{A} \omega_{z'0} \quad (18)$$

(nutációs szögsebesség) jelöléseket:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{\omega_{pr}}{\omega_{nu}} \sin \vartheta_0 (1 - \cos \omega_{nu} t). \quad (19)$$

Ennek felhasználásával:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_{pr} (1 - \cos \omega_{nu} t), \quad (20)$$

majd integrálással a $t = 0$ -ra a $\psi = \psi_0$ kezdeti feltétellel:

$$\psi = \psi_0 + \omega_{pr} \left(t - \frac{\sin \omega_{nu} t}{\omega_{nu}} \right) \quad (21)$$

Végül a (15) második egyenletéből (20) helyettesítésével:

$$\varphi = \omega_{z'0} t - \omega_{pr} \cos \vartheta_0 \left(t - \frac{\sin \omega_{nu} t}{\omega_{nu}} \right) \quad (22)$$

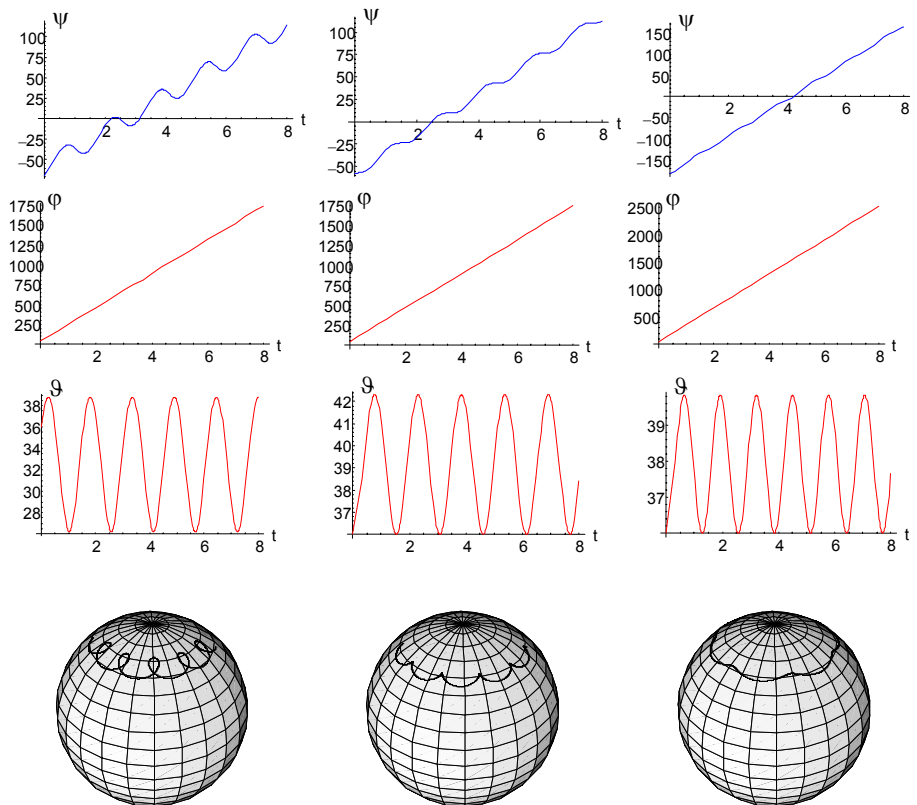
Összefoglalva az eddigi eredményeket, a (19), (21) és a (22) összefüggések a $t = 0$ időpontban az $\vec{\omega}$ szögsebességgel megpörgetett és a $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $d\psi/dt = \omega_{z'0}$ Euler-szögeknek megfelelő kezdeti helyzetű súlyos szimmetrikus pörgettyű mozgását írják le a térhez rögzített K inerciarendszerben.

A (21) összefüggés azt mutatja, hogy a szimmetriatengely vízszintes vetülete folyamatosan egy irányban mozog a z tengely körül a (20) szerint ω_{pr} átlagos precessziós szögsebességgel. Ehhez a (19) szerint hozzájárul egy másik mozgás, ugyanis a szimmetriatengelynek a függőlegessel bezárt ϑ hajlásszöge periodikusan ingadozik a kezdeti ϑ_0 és ettől kissé eltérő érték között. Ennek az ingadozásnak, vagy *nutációnak* az amplitúdója $(\omega_{pr} / \omega_{nu}) \sin \vartheta_0$, szögsebessége pedig ω_{nu} . A megoldásból világosan látszik, hogy a precesszió annál lassúbb, a nutáció viszont annál gyorsabb és annál kisebb amplitúdójú, minél nagyobb az $\omega_{z'0}$ kezdeti forgási szögsebesség értéke. Mivel (17) szerint a precesszió szögsebessége $\omega_{z'0}$ értékével-, a nutáció amplitúdója viszont (16) szerint $\omega_{z'0}$ értékének négyzetével fordítva arányos, ezért megfelelően nagy forgási szögsebesség esetén a nutáció már alig figyelhető meg, a precesszió látszólag szabályos (pseudoreguláris precesszió). Fontos megjegyezni, hogy alkalmas kezdőfeltételek mellett szigorúan szabályos precesszió is lehetséges (BUDÓ, 1964).

Jól lehet szemléltetni a szimmetrikus súlyos pörgettyű mozgását, ha a pörgettyű alátámasztási pontja köré egység sugarú gömböt képzelünk el, amelynek felületére a pörgettyű szimmetriatengelye felrajzolja a mozgásának megfelelő görbét. Ilyen görbék a (14) differenciálegyenlet-rendszer különböző

$$A, C, mgs, \omega_{x'0}, \omega_{y'0}, \omega_{z'0}, \Psi_0, \Phi_0, \Theta_0$$

értékű kezdeti feltételek melletti numerikus integrálásával állíthatók elő. Számításainkat a *Mathematica* szoftver alkalmazásával (BELLOMO, PREZIOSI, ROMANO 2000) számítógépen végeztük el. A megoldások szerint a pörgettyű szimmetriatengelye minden esetben ciklois-szerű görbét rajzol az elképzelt gömb felületére, a görbék alakja a kezdeti feltételektől függően hurkolt ciklois, ciklois vagy elnyújtott ciklois lehet. Tisztán szinuszos jellegű görbét a megoldások között nem találunk – aminek azért van jelentősége, mert a későbbiekben tárgyalásra kerülő „csillagászati nutáció” szinuszos változás, ami szintén arra utal, hogy a csillagászati nutáció az elnevezésével ellentétben nem nutáció, hanem precessziós mozgás. A 3. ábrán feltüntetve a Ψ , a Φ és a Θ Euler-féle szögek időbeli változását is, az egyes oszlopokban a (14) differenciálegyenlet-rendszer megoldásainak három legfontosabb alapesetét szemléltettük.



3. ábra. Szimmetrikus súlyos pörgettyű mozgásának fontosabb alapesetei.

A luniszoláris precesszió

Alkalmazzuk az eddigi elméleti megfontolásainkat a Föld esetére! Földünk forgástengelye a külső erők hatására a fentiekben tárgyalt súlyos pörgettyű mozgásához teljesen hasonló mozgást végez, a különbség mindössze annyi, hogy a Föld esetében az $\vec{\omega}$ vektor iránya (a forgástengely körbevándorlásának iránya) ellentétes. Ennek oka az, hogy az 1. ábrán látható pörgettyűre olyan irányú forgatónyomaték hat, ami a forgástengelyét fekvő helyzetbe igyekszik hozni; a Föld esetében viszont a Napnak és a Holdnak az egyenlítői tömegtöbbletre gyakorolt vonzása olyan erőpárt hoz létre, amely a Föld forgástengelyének irányát az ekliptika síkjának normálisa irányába felállítani igyekszik.

Ezek után vizsgáljuk meg kissé részletesebben a Föld precessziós mozgását és ennek okát.

A Föld jó közelítéssel forgási ellipszoid alakú, melynek az egyenlítői sugara (fél nagytengelyének hossza) mintegy 21 km-rel nagyobb a sarkok felé mérhető távolságnál (a fél kistengelyének hosszánál). Ugyanakkor a Föld egyenlítői síkja mintegy 23.5 fokkal hajlik a Föld pályasíkjához (azaz az ekliptika síkjához), amelyben a Nap, és amelynek közelében a Hold és valamennyi bolygó található. A Föld tömegeloszlásának a gömb-szimmetrikus tömegeloszláshoz viszonyított eltérése miatt főleg a Hold és a Nap olyan forgatónyomatékokat fejt ki a Föld egyenlítői tömegtöbbletére, amely ezt az ekliptika síkjába igyekszik beforgatni, azaz a forgástengelyt az ekliptika normálisának irányába igyekszik állítani. Ha a Föld nem forogna, akkor ez be is következne - pontosabban már régen bekövetkezett volna. A Föld azonban saját tengelye körül kellőképpen gyorsan forog, ezért a forgatónyomaték hatására a bemutatott ún. súlyos pörgettyű mozgásához hasonló precessziós mozgást végez.

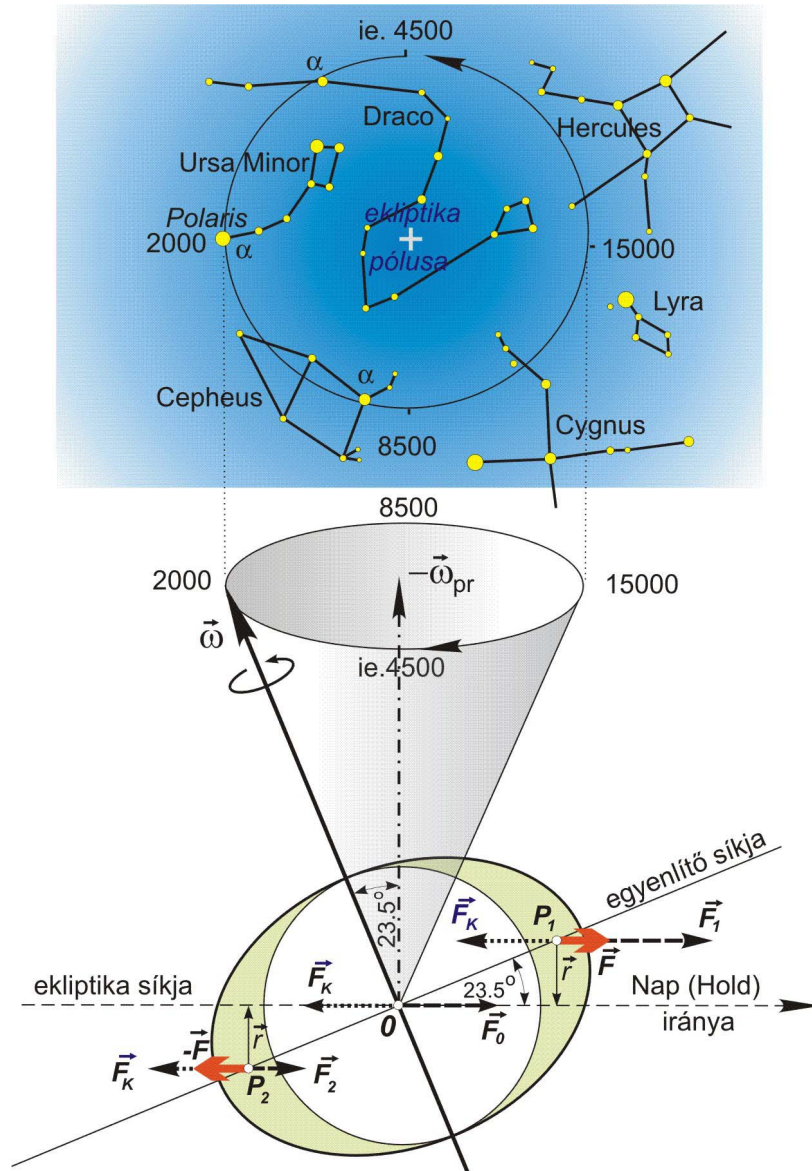
Egyelőre az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk meg csupán a Nap tömegvonzásából adódó forgatónyomaték hatását.

A Föld lényegében a Nap tömegvonzási erőterében kering és dinamikus egyensúlyban van; azaz a Napnak a Föld tömegközéppontjára ható \mathbf{F}_0 tömegvonzásával a Föld Nap körüli keringéséből származó - az \mathbf{F}_0 erővel egyenlő nagyságú, de a Nappal ellentétes irányú $-\mathbf{F}_K$ keringési centrifugális erő tart egyensúlyt.

Az \mathbf{F}_K keringési centrifugális erő a Nap-Föld közös tömegközéppontja körüli excenter mozgás következtében a Föld minden pontjában azonos irányú és egyenlő nagyságú (VÖLGYESI, 1999).

A gömbszimmetrikus tömegeloszlástól tapasztalható eltérés miatt osszuk a Földet a 4. ábrán látható belső gömbszimmetrikus tömegtartományra és az egyenlítő menti gyűrűszerű részre; majd ezt a gyűrűt vágjuk a forgástengelyen átmenő és a rajz síkjára merőleges síkkal két további tömegrészre. A Naphoz közelebb eső gyűrűrész tömegközéppontja legyen P_1 , a távolabbi részé pedig P_2 . A Napnak a Föld gömbszimmetrikus tömegtartományára ható tömegvonzását úgy értelmezhetjük, mintha ez csak a gömb O tömegközéppontjában lépne fel. A gyűrűrészekre ható vonzóerőt viszont a P_1 és a P_2 tömegközéppontban ható vonzóerőkkel helyettesíthetjük. A Newton-féle tömegvonzási törvénynek megfelelően a P_1 -ben nagyobb, a P_2 -ben pedig kisebb vonzóerő hat, mint az O tömegközéppontban. Mivel azonban a keringési centrifugális erő mindhárom pontban

ugyanakkora, ezért a P_1 -ben és a P_2 -ben a kétfajta erő nincs egymással egyensúlyban; a P_1 -ben a vonzóerő, a P_2 -ben a keringési centrifugális erő nagyobb. A két erő eredője a P_1 pontban: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_K$, a P_2 pontban pedig $\mathbf{F} = \mathbf{F}_K - \mathbf{F}_2$. Ez a két egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú erő a 4. ábra síkjából merőlegesen kifelé mutató \mathbf{M} forgatónyomaték-vektort eredményez.

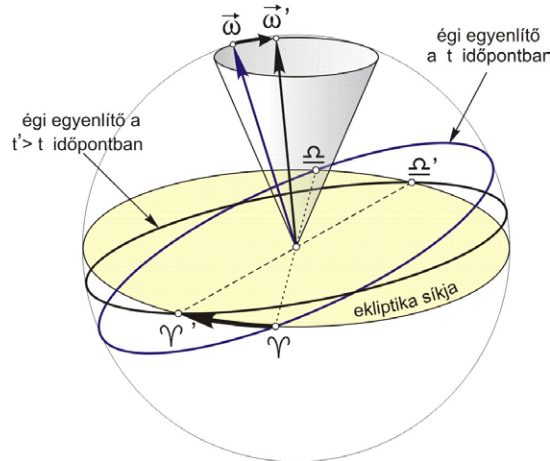


4. ábra. A Föld forgástengelyének precessziós mozgása (luniszoláris precesszió).

A Naphoz hasonlóan a Hold is forgatónyomatékokat fejt ki a Földre, sőt a Hold által keltett forgatónyomaték a Hold közelsége miatt jóval nagyobb.

Az ily módon keletkező forgatónyomatékok együttes hatásának eredménye a Földnek a 4. ábrán bemutatott precessziós mozgása: az ún. *luniszoláris precesszió*.

A luniszoláris precesszió a csillagászati megfigyelések szerint elsősorban abban nyilvánul meg, hogy az égi pólus (a Föld forgástengelyének és az éggömbnek a metszéspontja) az ekliptika pólusa körül lassan körbevándorol. Mivel az égi egyenlítő síkja merőleges a Föld forgástengelyére, ezért a forgástengely irányának elmozdulása az égi egyenlítő síkjának elfordulásával is jár. Ennek megfelelően az 5. ábrán látható módon az ekliptika és az égi egyenlítő síkjának metszévonalában levő Υ tavaszpont és Ω őszi pont is elmozdul az ekliptika mentén, mégpedig a Nap járásával ellentétes irányban. A tavaszpont eltolódása a luniszoláris precesszió hatására, nyugati irányban mintegy $50.37''/\text{év}$.



5. ábra. A tavaszpont precessziós vándorlása.

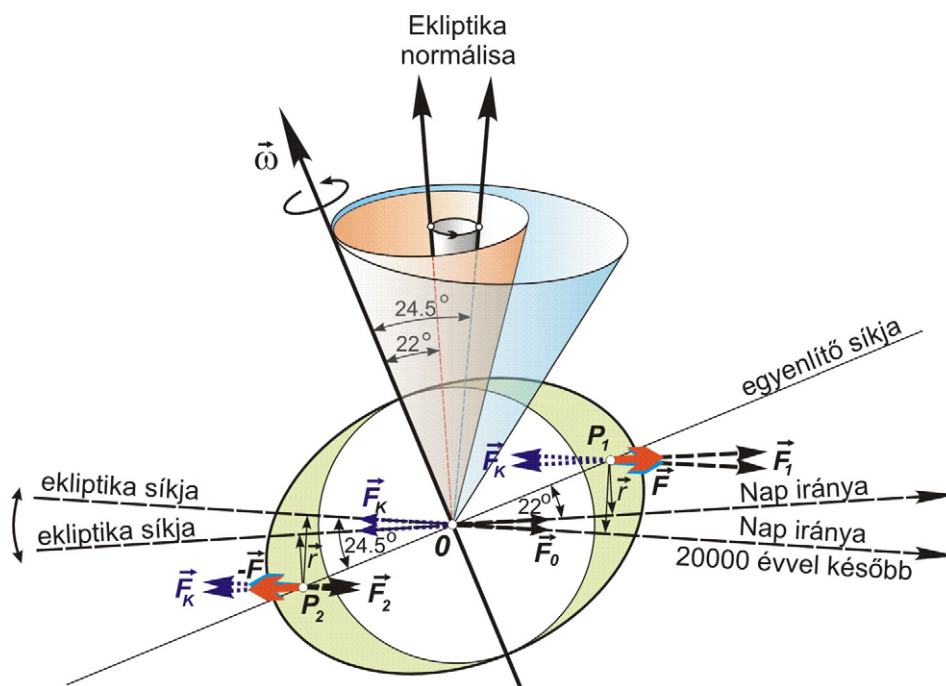
Összefoglalva az eddigieket: a luniszoláris precesszió során a Föld forgástengelye, az ekliptika és az égi egyenlítő síkja 23.5° -os hajlásszögének megfelelően, $2 \times 23.5^\circ = 47^\circ$ -os nyílásszögű kúp palástja mentén mozog úgy, hogy egy teljes körüljárást közel 25 730 év alatt végez. Ez az 5. ábra tanúsága szerint azt jelenti, hogy a Föld forgástengelyének északi iránya kb. 5000 évvel ezelőtt az α *Draconis* csillag közelébe mutatott, az égi pólus jelenleg az α *Ursae Minoris* (Polaris) közelében van és kb. 5000 év múlva az α *Cephei* közelében lesz. Így a jelenleg élő generációknak az éjszakai tájékozódás szempontjából csupán véletlen szerencséje, hogy az égi északi pólus helyéhez közel viszonylag fényes csillag, a Sarkcsillag található.

A planetáris precesszió

Mivel a csillagászati koordinátarendszereinkben a tavaszpont helyzete alapvető szerepet játszik, a precesszió következtében fellépő helyváltozásainak ismerete rendkívül fontos. Az előző pontban megállapítottuk, hogy a luniszoláris precesszió hatására a tavaszpont helyzete az ekliptika mentén folyamatosan, évente mintegy $50.37''$ értékkel nyugati irányban eltolódik.

A tavaszpont helyzete azonban nemcsak az égi egyenlítő síkjának elfordulása miatt, hanem az ekliptika síkjának mozgása következtében is változik. A Naprendszer bolygóinak hatására ugyanis a Föld keringési síkja állandóan lassú ingadozásban van a bolygók közepes pályasíkjához képest, tehát ennek következtében lassan változik az ekliptika pólusának helyzete is. Ha az égi pólus mozgását az ekliptika pólusához viszonyítjuk, akkor ennek mozgását is a forgástengely precessziós mozgásaként észleljük. Ezt a jelenséget *planetáris precesszió*nak nevezzük. A planetáris precesszió hatására a tavaszpont direkt irányban - azaz a luniszoláris precesszió hatására bekövetkező elmozdulással ellentétes irányban - évente mintegy $-0.11''$ értékkel tolódik el.

A planetáris precessziót tehát az ekliptika síkjának elmozdulása okozza. A planetáris precesszió során az egyenlítő és az ekliptika síkjának hajlásszöge közel 40000 éves periódussal kb. 22° és 24.5° között ingadozik. Hatása a 6. ábra segítségével kétféleképpen is megérthető. Egyrészt mivel a precessziós kúp tengelye az ekliptika normálisa, nyilvánvalóan az ekliptika síkjának billegésével az ekliptika normálisa kb. 2.5 fokos nyílásszögű körkúp palástja mentén közel 40000 éves periódussal körbevándorol. Ez a precesszió szemszögéből úgy mutatkozik, mintha az a "koordináta irány" változtatná folyamatosan a helyzetét, amelyhez a precessziós mozgást viszonyítjuk, vagyis a precessziós kúp tengelyének ezzel a mozgásával 40000 éves periódussal hol kissé szétnyílik, hol kissé összezáródik a precessziós kúp palástja, ily módon a luniszoláris precessziós kúp nyílásszöge nem stabilan 47 fokos, hanem közel 40000 éves periódussal kb. 44 és 49 fok között változik.



6. ábra. A planetáris precesszió

Valójában az történik, hogy az ekliptika síkjának mozgása miatt 40000 éves periódussal folyamatosan más-más irányban látható a Földről a Nap és a Hold, és ezzel a 6. ábra ta-

núsága szerint folyamatosan változik a P_1 és a P_2 rész-tömegközéppontok távolsága az ekliptika síkjától. Ezzel pedig folyamatosan változik (ingadozik) a precessziós mozgást előidéző forgatónyomaték, mivel folyamatosan változik az erő karja.

A luniszoláris és a planetáris precessziós mozgás eredője az *általános precesszió*, más néven a *normálprecesszió*. A normálprecessziós mozgás során az ekliptika pólusának billegése miatt az égi pólus nem pontosan az 5. ábra felső részén látható körpálya mentén mozdul el, hanem az állócsillagokhoz viszonyítva a körpályát jól közelítő, de valójában *önmagában nem záródó görbe* mentén vándorol. A normálprecesszió hatására a tavasz-pont az ekliptika mentén évente mintegy $50.26''$ értékkel nyugati irányban tolódik el; ennek megfelelően egy teljes körüljárás ideje kb. 25786 év, azaz közel 26000 év.

A precessziózavar

A Hold, a Nap és a bolygók Földhöz viszonyított relatív helyzetváltozásai következtében a Földre időben változó forgatónyomaték hat, ezért a normálprecessziós mozgás különböző rövidebb periódusú ingadozásokat mutat. A forgástengely precessziós mozgásának ezen rövidperiódusú változásait sokan helytelenül *csillagászati nutációnak* nevezik. A továbbiakban ezt a jelenséget inkább *precessziózavarnak* tekintjük.

A precessziózavar több különböző periódusú és amplitúdójú mozgásból tevődik össze és rakódik rá a hosszúperiódusú (szekuláris) precessziós mozgásra.

A Nap és a Föld egymáshoz viszonyított helyzetváltozásai miatt két fontosabb periódusa van. A Nap által a Föld egyenlítői tömegtöbbletére kifejtett forgatónyomaték nagysága a Nap deklinációjának szögétől (a Föld egyenlítő síkja feletti magasságától) függ. A 4. ábra pl. a téli napforduló helyzetében ábrázolja a Földet, amikor $\delta = -23.5^\circ$.

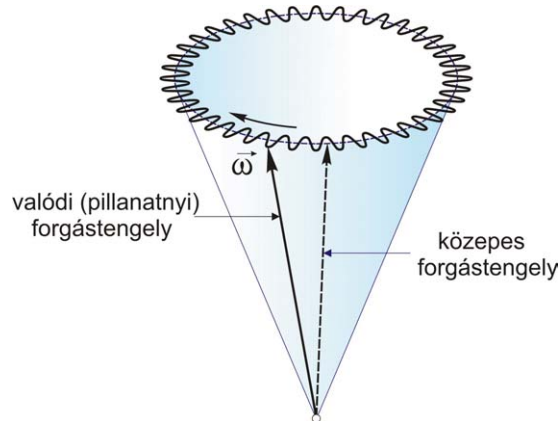
Ekkor és a nyári napforduló napján (amikor $\delta = +23.5^\circ$) a Nap maximális forgatónyomatékot fejt ki a Földre. A két helyzet között csökken, illetve növekszik a forgatónyomaték. A tavaszi és az őszi napéjegyenlőség pillanatában a Föld két egyenlítő tömegtöbbletének 2. ábrán értelmezett P_1 és P_2 súlypontja azonos távolságra van a Naptól, ekkor tehát a precessziót okozó forgatónyomaték nulla. Ennek megfelelően, a Nap deklinációjának változása miatt, féléves periódussal változik a Föld precessziós mozgása. Ehhez egyéves periódusú precessziós változás is járul, ami annak a következménye, hogy a Föld ellipszis alakú pályán kering a Nap körül és ezáltal egyéves periódussal változik a Naptól mért távolsága, illetve ennek megfelelően a forgatónyomaték.

Többek között teljesen hasonló jellegű, de rövidebb periódusú és nagyobb amplitúdójú változásokat okoz a Hold a Föld körüli keringése során. A Hold a Föld körüli pályáját közel 28 nap alatt futja be, ezért a Hold deklinációjának változása miatt adódó precessziós periódus kb. 14 napos, az ellipszis pályán történő keringés miatti változó Föld-Hold távolságból származó periódus pedig 28 napos.

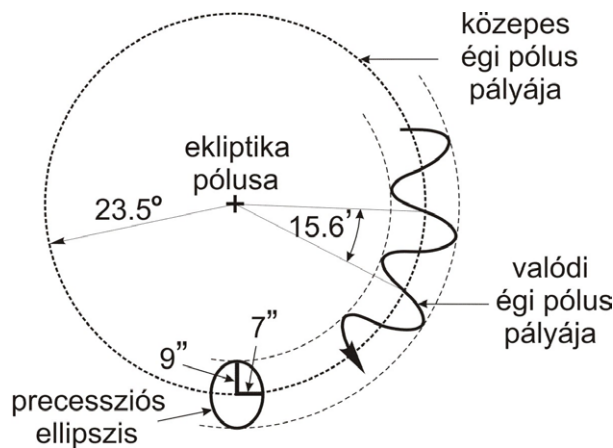
Van azonban a Hold mozgásának az eddigieknél jóval fontosabb hatása is. Ez annak a következménye, hogy a Hold nem ugyanabban a síkban kering a Föld körül, mint amelyben a Föld kering a Nap körül. Így a Hold pályasíkja közel $5^\circ 09'$ szöveget zár be az ekliptika síkjával és a Hold pályasíkjának az ekliptika síkjával alkotott metszévonal (a holdpálya csomóvonal) az ekliptika síkjában 18.6 éves periódussal hátráló irányban körbevándorol. Ennek következménye a precesszió szempontjából jól látható a 7. ábrán.

A hatás kísértetiesen hasonlít a planetáris precesszió 6. ábrán bemutatott hatásához. Valójában itt is az történik, hogy a holdpálya síkjának mozgása miatt 18.6 éves peri-

mentén mozog 18.6 éves periódussal. A precessziós ellipszis $9''$ távolságú fél nagytengelye mindig az ekliptika pólusa irányába mutat, a $7''$ távolságú fél kistengelye pedig erre merőleges.



8. ábra. A valódi és a közepes forgástengely.



9. ábra. A precessziós ellipszis.

A fenti megfontolásokból, illetve a pólusmozgás fizikai alapjainak tisztázása után (VÖLGYESI, 2002) világosan látható, hogy a Hold, a Nap és a bolygók Földhöz viszonyított relatív helyzetváltozásai miatt az időben változó forgatónyomaték következtében kialakuló rövidebb periódusú ingadozások nem nevezhetők fizikai értelemben nutációnak. Az érintett égitestek bonyolult mozgása miatt ugyanis a precessziót előidéző forgatónyomaték változik, ami következtében a Föld tömege a hozzá képest rögzített helyzetű forgástengelyével együtt végzi a *változó* precessziós mozgását. Ezzel szemben a nutációs mozgás során a Föld forgástengelye nem együtt mozog a Föld tömegével, hanem mindenféle forgatónyomaték hatásától függetlenül, a Föld tömege illetve a szimmetriatengelye különválva a forgástengelytől végzi a bonyolult sajátmozgását (ami pusztán abból adódik, hogy a forgás nem a szimmetriatengely körül történik). Egyszerűbben fogalmazva a *pre-*

cessziós mozgás felelősei a Földön kívüli tömegek, a nutációs mozgásért viszont kizárólag a Föld saját tömege (tömegeloszlása) a felelős.

Ennélfogva indokoltnak tűnik a félrevezető *csillagászati (asztronómiai) nutáció* helyett a továbbiakban a *precessziózavar* fogalmát használni.

A precesszió csillagászati és geodéziai hatása

A Föld precessziós mozgása a csillagászati megfigyelések szempontjából abban nyilvánul meg, hogy az égi pólus (a Föld forgástengelyének és az éggömbnek a metszéspontja) az ekliptika pólusa körül lassan körbevándorol. Mivel az égi egyenlítő síkja merőleges a Föld forgástengelyére, ezért a forgástengely irányának elmozdulása az égi egyenlítő síkjának elfordulásával is jár. Ennek megfelelően a 5. ábrán látható módon az ekliptika és az égi egyenlítő síkjának metszévonalában levő Υ tavaszpont is elmozdul az ekliptika mentén, ami viszont a csillagászatban használatos ekvatoriális (égi egyenlítői) koordinátarendszer kiinduló iránya. Így a normálprecesszió és a precessziózavar az égitestek égi egyenlítői koordinátáinak (α rektaszenciójának és δ deklinációjának) folyamatos változását okozzák.

Mivel a Föld tömege a forgástengelyével együtt végzi a leírt precessziós mozgásokat, a földfelszíni pontoknak a forgástengelyhez viszonyított földrajzi koordinátái a precessziós mozgástól függetlenek. Így a szintfelületi földrajzi szélesség és hosszúság értékek a normálprecesszió és a precessziózavar hatására nem változnak (BIRÓ, 1971).

Megjegyzés

A Föld forgásával kapcsolatos kutatásaink az MTA Fizikai Geodézia és Geodinamika Kutatócsoport, valamint a T-038123 és a T-037929 sz. OTKA anyagi támogatásával folynak. A támogatást ezúton is köszönjük.

Hivatkozások

- Bellomo N, Preziosi L, Romano A** (2000): *Mechanics and Dynamical Systems with Mathematica*. Birkhauser, Boston.
- Biró P** (1971): A felszínmozgások vizsgálata és a Föld geodinamikai folyamatai. *Geodézia és Kartográfia*, 29, 9-18.
- Budó Á** (1964): *Mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Landau LD, Lifsic EM** (1974): *Elméleti Fizika I*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Völgyesi L** (1999): *Geofizika*. Műegyetemi Kiadó, Budapest.
- Völgyesi L** (2002): A pólusmozgás fizikai alapjai. *Geomatikai Közlemények V.*, Sopron.

* * *

Völgyesi L. (2003) [A Föld precessziós mozgásának fizikai alapjai](#). Geomatikai Közlemények V, pp. 74-89.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.
Web: <http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi> E-mail: volgyesi@eik.bme.hu