5. A GEOID ÉS A FIZIKAI FÖLDFELSZÍN MEGHATÁROZÁSA

51. A feladat leírása

Láttuk, hogy a földalakot általában pontonként határozzuk meg [152.]. A meghatározandó felületen, a Föld *elméleti* vagy a *fizikai* alakjának felszínén kiválasztott pontok – a felsőgeodéziában általában a geodéziai alaphálózatok pontjainak, illetve geoidi megfelelőiknek – térbeli helyzetét a jelenlegi gyakorlatban általában *ellipszoidi felületi koordinátákka*l adjuk meg. Az eddigiekben megismertük azokat a módszereket, amelyekkel a Föld alakját jól megközelítő vonatkoztatási ellipszoid méretét és alakját, valamint a hozzá kapcsolódó – a Föld valódi nehézségi erőterét jól megközelítő – normál nehézségi erőtér jellemzőit meg lehet határozni [3.]. Megismertük továbbá a kiválasztott vonatkoztatási ellipszoid térbeli elhelyezésének megoldásait [4.].

Mesterséges holdak észlelésére támaszkodó módszerek (pl. a GPS) alkalmazásával a létesített geodéziai alapponthálózat pontjainak teljes értékű *térbeli* (háromdimenziós) *helymeghatározását* kapjuk eredményül. Ez azt jelenti, hogy egyetlen eljárásban meghatározzuk a hálózat pontjainak φ_i, λ_i ellipszoidi földrajzi koordinátáit és az ellipszoid feletti h_i magasságát. Ezzel a *fizikai földfelszín* geometriai meghatározását (legalábbis a felsőgeodézia feladatát képező részben) elvégeztük, de a felhasználó részére a földfelszíni pontok geoid (tengerszint) feletti magasságát is meg kell adnunk. A mesterséges holdas technikák esetén ezt akkor tudjuk megtenni, ha ismerjük (meghatározzuk) a *geoid* alakját is.

Hagyományos (szög- és távolságmérésekkel meghatározott) földfelszíni geodéziai hálózat esetében különválik a vonatkoztatási ellipszoid felszínén végzett *vízszintes* és a rá merőleges irányú *magassági* értelmű helymeghatározás.

Az ellipszoid és a hálózat egymáshoz viszonyított elhelyezésével és tájékozásával meghatározzuk a hálózat legalább egy pontjának (a csillagászati kiindulópontnak) a φ_1, λ_1 ellipszoidi földrajzi koordinátáit és a kiinduló oldal ellipszoidi azimútját. Ebből kiindulva, a hálózat mérési eredményei (szögek és távolságok) alapján, az I. geodéziai főfeladatnak (a Geodéziai alaphálózatok tantárgyban megismert) összefüggéseivel számíthatók a többi hálózati pontok φ_i, λ_i ellipszoidi földrajzi koordinátái. Ezzel az alaphálózati pontok *vízszintes* értelmű helymeghatározását elvégeztük.

A térbeli (háromdimenziós) helymeghatározáshoz azonban még hozzátartozik a harmadik koordináta, az ellipszoid feletti *magasság* meghatározása is. Ennek módszereit fogjuk tárgyalni ebben a részben. Az eljárások különböznek attól függően, hogy a Föld elméleti alakján (a geoidon), vagy a fizikai földfelszínen fekvő pontok helyzetét akarjuk magassági értelemben meghatározni. Ezért a két kérdést külön tárgyaljuk.

Először, a *geoid* meghatározására szolgáló módszerekkel ismerkedünk meg, mert erre egyaránt szükség van akár hagyományos, akár mesterséges holdas technikával dolgozunk.

52. A geoid meghatározása

A Föld elméleti alakjának vizsgálatához általában nem jelölünk ki külön e célra szolgáló pontokat (néhány kivételes esettől eltekintve), hanem erre a célra is a geodéziai alaphálózat pontjait – pontosabban geoidi megfelelőjüket – használjuk. Ez azt jelenti, hogy a geoidi pontok *vízszintes helyzetének* meghatározásával általában nem kell külön foglalkoznunk, mert ezek az alaphálózati pontok ellipszoidi normálisán, a geoidon fekvő pontok, ezért φ, λ ellipszoidi földrajzi koordinátáik megegyeznek a földfelszíni hálózati pontéval. Így a kérdés csak a harmadik koordináta, a geoidi pont *ellipszoid feletti magasságának*, más szóval az *N* geoid-ellipszoid távolságnak, vagy *geoidundulációnak* a meghatározása.

Ennek a feladatnak a megoldására a történelmi fejlődés során *geometriai* és *fizikai* módszerek alakultak ki.

521. A csillagászati szintezés

Ez az eljárás a geoid meghatározásának *geometriai* módszere, mely kizárólag szög és távolság jellegű mennyiségekre támaszkodik.

521.1. A csillagászati szintezés elve

A módszer alkalmazásakor mind a vonatkoztatási ellipszoidot, mind pedig a geoidot *tisztán geometriai felületként* kezeljük (elvonatkoztatva minden fizikai tartalomtól). Térbeli helyzetüket felületi normálisaik irányával jellemezzük. A geoidi felületi normális (a geoidi helyi függőleges) irányát a csillagászati-geodéziai módszerrel mért és a geoidra átszámított Φ, Λ *szintfelületi* (geoidi) *földrajzi koordinátákkal*, míg az ellipszoidi normális irányát a *φ, λ ellipszoidi földrajzi koordinátákkal* adjuk meg a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS megvalósulásának) *Z* tengelyéhez és *XZ* síkjához, a kezdő meridiánsíkhoz viszonyítva.

A módszer használatának előfeltétele tehát, hogy legyenek olyan pontjaink, amelyekben *mindkét fajta koordinátákat ismerjük.* Ezek a gyakorlatban a geodéziai alaphálózat pontjai közül azok, ahol földrajzi helymeghatározás mérést is végeztünk (csillagászati-geodéziai pontok). Ilyenek általában egymástól, néhányszor 10 km távolságban állnak rendelkezésre (a földrajzi helymeghatározások magas idő-és költségigénye miatt nem sűrűbben).

A geoid alakját gyakran metszetek mentén tanulmányozzuk. (Mint később látni fogjuk, egymásra merőleges metszetekből valamely terület geoidképe is megszerkeszthető lesz.) A két felület, a *geoid* és az *ellipszoid* egymáshoz viszonyított helyzetét a felületi normálisok által bezárt szög, a $\theta(\xi,\eta)$ *függővonal-elhajlás* jellemzi.

A geoid-ellipszoid távolság $\Delta N_{1,k} = N_k - N_1$ megváltozását a P_1,P_k szakaszon a függővonal-elhajlás metszet irányába eső ϑ vetületének

$$\Delta N_{1,k} = N_k - N_1 = -\int_1^k \vartheta \; ds \approx \sum_{i=1}^{k} \tilde{\vartheta}_{i,i+1}\, s_{i,i+1} \qquad (5211.1)$$

vonalintegrálja adja meg, ahol $\vartheta = \xi \cos \alpha + \eta \sin\alpha$ *és* α a metszet azimútja. Ebből látható, hogy ezzel a módszerrel a geoid-ellipszoid távolságoknak *csak a különbsége* (vagy megváltozása) számítható ki, hasonlóan a szintezéshez, amely magasság*különbségeket* eredményez. (Innen van az eljárás elnevezése.)

Az (5211.1)-ben szereplő vonalintegrál analitikus kiszámításához ismerni kellene a függővonal-elhajlás ívhossz szerinti eloszlásának $\vartheta = \vartheta(s)$ függvényét. Ennek hiányában a metszetet a P_i ismert pontokkal $s_{i,\,i+1}$ véges hosszúságú szakaszokra osztva numerikus integrálást végzünk, ahol a szakaszok $\tilde{\vartheta}_{i,i+1}$ *átlagos függővonal-elhajlás* értékét az ismert értékek alapján valamilyen predikciós eljárással, számszerű, vagy rajzi úton határozzuk meg.

A geoid alakját legtöbbször É-D-i (azaz meridián), és K-Ny-i (azaz I. vertikális) irányú metszetben vizsgáljuk. Ekkor a függővonal-elhajlás megfelelő vetületét éppen a meridián irányú ξ és az I. vertikális irányú η összetevője adja.

521.2. A csillagászati szintezés gyakorlati végrehajtása

A geoid metszetének szerkesztésekor elsősorban az szükséges, hogy a kiválasztott metszet mentén csillagászati-geodéziai pontokat határozzunk meg, vagy ilyenek más munkálatok eredményeként már rendelkezésre álljanak. A szóban lévő csillagászati geodéziai pontok *ellipszoidi* földrajzi koordinátákat általában alaphálózati, vagy ehhez kapcsolódó szög- és távolságmérések alapján határozzuk meg, míg *szintfelületi* földrajzi koordinátáit a Kozmikus geodézia tantárgyban megismert földrajzi helymeghatározási módszerekkel mérjük. A kétféle koordináták különbségéből számítjuk a metszetbe eső P_i csillagászati-geodéziai pontok függővonal-elhajlás értékét. Szükség esetén (ha a metszet általános irányú), az így nyert értékeket a metszet síkjára vetítjük. Az egymás utáni csillagászati-geodéziai pontok közötti véges szakaszokra határozzuk meg a geoid-ellipszoid távolság megváltozását a (5211.1) alapján, numerikus integrálással.

Ennek egyik megoldása a *rajzi eljárás*. Ez esetben derékszögű síkkoordinátarendszerben ábrázoljuk az ismert függővonal-elhajlás értékeket a pontok ellipszoidi földrajzi koordinátáiból kiszámított metszetirányú ívhossz (távolság) függvényében. Az így kapott pontok összekötésével állítjuk elő a $\vartheta = \vartheta(s)$ függvénygörbe gyakorlati megközelítőjét. Az (5211.1)-ben szereplő integrál geometriai értelme éppen az ez alatti terület, amelynek nagyságát a rajzolt területek meghatározására szolgáló módszerek egyikével (pl. lamellázás, vagy planiméterrel lemérés) határozhatjuk meg.

Két csillagászati-geodéziai pont között a görbe alatti terület mérőszáma, megfelelő méretarány szorzóval ellátva, adja a geoid-ellipszoid távolságnak a két pont közötti megváltozását.

Ezeket a metszet kezdőpontjától folyamatosan összegezzük, és az így kapott értékeket a metszetbe eső ívhosszak függvényében ismét derékszögű síkkoordinátarendszerbe felrakjuk. A kapott ponthelyeket folytonos görbe vonallal összekötve kapjuk a geoidnak a kiválasztott irányba eső metszetét. A görbe megrajzolásakor figyelembe kell venni, hogy ez a függővonal-elhajlások függvénygörbéjének integrálgörbéje, melynek például szélső értéke ott lehet, ahol a függővonal-elhajlások görbéje előjelet vált (nullahelye van) stb.

Valamely *terület geoidtérképének* előállításakor úgy járunk el, hogy először három példányban, megfelelő méretarányban papírlapra felszerkesztjük a szóban lévő területre a földrajzi koordinátahálózat képét (alkalmas vetületben). Az így elkészített lapok közül kettőre koordinátáik alapján felrakjuk a vizsgált területre eső csillagászati-geodéziai pontok helyét. Ezután beírjuk a kapott ponthelyek mellé az egyik lapra a ξ_i,

a másik lapra az η_i függővonal-elhajlás összetevő számértékét. Ezek között lineáris interpolálással megszerkesztjük a ξ = állandó és az η = állandó értékű helyeket összekötő görbéket (izovonalakat).

Az így előállított izovonalas ξ és η ábráról, az izovonalak közötti lineáris interpolálással leolvasható a megfelelő sűrűségben megrajzolt hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjaihoz tartozó függővonal-elhajlás összetevő értékek. Ezek alapján most már a megrajzolt hosszúsági vonalak mentén egymással párhuzamos meridiánirányú, a szélességi vonalak mentén pedig K-Ny irányú geoid-metszeteket tudunk szerkeszteni. Ennek során egyenként számítjuk a szélességi és a hosszúsági vonalak által határolt négyszögek sarokpontjai közötti geoid-ellipszoid távolság változásokat. Ezeket négyszögenként összegezve természetesen általában nullától különböző „záróhibára" jutunk.

Következő lépésként a szintezési hálózathoz hasonló módon, a közvetlen mérések kiegyenlítési módszerével, kiegyenlítjük a négyszögekből álló „magassági hálózatunkat”. Ennek eredményeként kapjuk az egyes oldalak kiegyenlített geoid-ellipszoid távolság különbségét, amelyeket valamely kiválasztott kiindulóponttól összegezve, megkapjuk a metszéspontok végleges geoid-ellipszoid távolságát a kiindulópontbeli értékhez viszonyítva.

A kiindulópont geoid-ellipszoid távolságát ezzel a módszerrel meghatározni nem lehet, ezt vagy önkényesen nulla, vagy valamilyen véges értékben felvesszük, vagy más (későbben tárgyalandó fizikai) módszerrel határozzuk meg.

A metszéspontok így nyert végleges geoid-ellipszoid távolság értékét a harmadik előkészített lapra, a megfelelő helyre beírjuk, majd a kapott értékek közötti lineáris interpolálással, megszerkesztjük a geoidnak a koordináta-számítás vonatkoztatási ellipszoidjához viszonyított izovonalas ábráját.

Hangsúlyozzuk, hogy az így kapott geoidkép *relatív ábrázolás*, amelynek alakulása döntően függ a vonatkoztatási ellipszoid méretétől, alakjától és elhelyezésétől, ezért alapvetően fontos, hogy ahhoz a *geodéziai dátumot is megadjuk*. Ugyanazon geoiddarab izovonalas ábrázolása lényegesen eltérő képet mutat, különböző dátumok mellett. (Jó példa erre, Nagy-Britannia geoidjának különböző vonatkoztatási rendszerekhez viszonyított, az előadási órán bemutatott, ábrázolása.) Ezért a kapott geoidkép esetleges fizikai (geofizikai, geológiai, stb.) értelmezésekor nagyon elővigyázatosnak kell lenni.

Ezzel a módszerrel készült 1967-ben, a felületi asztrogeodéziai hálózatunk (FAGH) mintegy 80 csillagászati-geodéziai pontjára támaszkodva, a geoid magyarországi darabjának az S42/58 pulkovói elhelyezésű Kraszovszkij-ellipszoidra vonatkoztatott ábrázolása (azzal az eltéréssel, hogy a geoid magassági elhelyezését az ország ÉNy szélén fekvő kiinduló pontban $N_1 = 0$ értékkel választották meg).

A módszer természetéből következik, hogy egységes geoidábrázolás csak azonos vonatkoztatási rendszerben kiszámított összefüggő geodéziai hálózat területéről készíthető. A különböző geodéziai dátumokra vonatkozó mozaikok összeillesztése csak más módszerekkel lehetséges (pl. [522.]). Ily módon az egész Föld geoidképe nem szerkeszthető meg tisztán csillagászati szintezéssel.

Az említett hátrány mellett a módszer előnye, hogy az ábrázolás megbízhatósága a pontsűrűséggel szinte tetszés szerint fokozható, így megfelelő pontsűrűség esetén ez az eddig ismert legmegbízhatóbb eljárás.

A *pontsűrűség* és *a geoidábrázolás megbízhatóságána*k (m_N középhibájának) kapcsolatára jó becslés *Muminagič* $m_N = 2{,}1^{[cm]}\sqrt{s^{[km]}}$ tapasztalati képlete (ahol s a csillagászati-geodéziai pontok átlagos távolsága). Vizsgálataink szerint általában 80÷100 km-es pontsűrűséggel a geoid fő formáit kaphatjuk meg mintegy ±0,4÷0,5 m középhibával. A részletek meghatározásához ennél nagyobb pontsűrűség kell, a domborzati viszonyoktól függően. *Síkvidéken* és H<1000 m *középhegységben* <15 km pontsűrűséggel érhető el ±0,1 m –nél jobb megbízhatóság, míg H>1000 m *magashegységben* ugyanilyen megbízhatóság eléréséhez 1,5÷3 km átlagos ponttávolság szükséges.

A nagy pontsűrűség előállítása azonban tetemes munkával és magas költségekkel jár, ezért csak kisebb kiterjedésű területeken jöhet szóba. Itt viszont kiválóan alkalmas a geoid helyi részleteinek (finomszerkezetének) meghatározására. Ilyen célú földrajzi helymeghatározás mérési munkákhoz előnyösen használható asztrolábiumként a 60°-os előtétprizmával ellátott automata szintezőműszer is, de az utóbbi időben, kimondottan erre a célra fejlesztették ki a könnyen szállítható, *automatizált digitális zenitkamarákat.*

A csillagászati szintezéssel meghatározandó geoidkép megbízhatósága, részletgazdagsága tovább növelhető akkor, ha a meghatározásba az eddigi tisztán geometriai adatok mellett *fizikai* jellegű mennyiségeket, nevezetesen *nehézségi mérések* eredményeit *is* bevonjuk. Ezeket többféle úton tudjuk erre a célra hasznosítani:

- a csillagászati-geodéziai mérésekkel meghatározott függővonal-elhajlás értékek *sűrítése* nehézségi rendellenességek, vagy gradiométeres mérések alapján,
- a függővonal-elhajlásoknak a szomszédos pontok közötti lineáris interpolálása helyett a környező nehézségi erőtér finomszerkezetének a figyelembe vétele (*csillagászati-gravimetriai szintezés.* Így készült, pl. a geoid magyarországi darabjának, még mindig az S42/58 elhelyezésű Kraszovszkij ellipszoidra vonatkoztatott, de már gravimetriai mérési eredmények bevonásával finomított, *„asztro-gravimetriai geoidnak”* nevezett FAGRG80 ábrázolása),
- a geometriai és a fizikai jellegű mennyiségek együttes feldolgozása (*kollokáció).*

Ezeket a módszereket a Fizikai geodézia tantárgy tárgyalja.

Feladatok:

- Mutassuk be vázlat segítségével, és bizonyítsuk a csillagászati szintezés alapelvét.
- Tudjuk-e biztosítani a gyakorlatban azt, hogy a geoid meghatározására szolgáló csillagászati-geodéziai pontok helyét a geoid jellemző formáinak figyelembevételével válasszuk meg?
- Mi határozza meg mértékadó módon a nyert geoidkép megbízhatóságát? Milyen tapasztalati összefüggéseket ismerünk ezzel kapcsolatban?

- Miért mondjuk a csillagászati szintezéssel nyert geoidképet többszörösen relatívnak?

- Mik a csillagászati szintezés előnyei és hátrányai?

522. A geoidmeghatározás fizikai módszereinek alapjai

A már megismert csillagászati szintezésben alapvetően geometriai (szög és távolság) jellegű mennyiségeket használtunk a geoid meghatározására [521.]. Láttuk, hogy ezzel a módszerrel mindig a geodéziai alaphálózat (a felhasznált csillagászati-geodéziai pontok) koordináta-számításának alapfelületeként bevezetett vonatkoztatási ellipszoidhoz viszonyított geoidábrázolást kapunk. Mivel a geometriai módszerek alkalmazásakor a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezése általában önkényes, vagy relatív (helyi simuló), ezért minden egyes önálló hálózat területén, az alkalmazott geodéziai dátumnak megfelelően, más és más a geoidkép viszonyítási alapja.

Ahhoz, hogy az egész Földön közös, geocentrikus elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidhoz viszonyított geoid-ellipszoid távolságokat és ezzel egységes geoidképet (legalábbis ennek az egységes képnek egyes pontjait, vagy felületdarabjait) tudjuk előállítani, *fizikai geodéziai módszereket* kell igénybe venni.

Ezek közös jellemzője, hogy a geoidmeghatározást *fizikai feladatként* oldják meg. Ez azt jelenti, hogy a geoidot a valódi földi nehézségi erőtér valamilyen kiválasztott W_0 *potenciálértékű szintfelületeként* határozzuk meg. A feladat megoldási módszereinek egyik csoportja a nehézségi mérésekre támaszkodó *gravimetriai módszerek*, az eljárások másik csoportja a *Föld mesterséges holdjait* használja fel erre a célra. A fizikai geodéziai eljárások nagyobb részének közös kiindulópontja a következőkben tárgyalandó nevezetes összefüggés.

522.1. A *Bruns*-féle összefüggés

Keressük a valódi földi nehézségi erőtér W_0 potenciálértékű (fizikailag létező) szintfelületének (a geoidnak) az alakját. Ehhez viszonyítási alapként elképzelünk valamely normál nehézségi erőteret, amely a valódit elég jól megközelíti, de ennél szabályosabb (forgási és egyenlítői szimmetriás) eloszlású. Nem feltétlenül szükséges, de gyakorlati okokból még azt is megkötjük, hogy az elképzelt normál nehézségi erőterünk egyik szintfelülete a Föld méretéhez és alakjához közelálló ellipszoid alakú szintfelület (szintellipszoid) legyen [343.]. Ennek potenciálértékét jelöljük U_0-val. (Az előbbi megkötés gyakorlati haszna az, hogy ugyanezt az ellipszoidot használjuk célszerűen a vízszintes koordináta-számításaink vonatkoztatási ellipszoidjának is).

Keressük tehát a *valódi erőtér W_0 és a normál nehézségi erőtér U_0 potenciálértékű szintfelületének távolságát* valamely P földfelszíni ponthoz tartozó ismert φ, λ ellipszoidi földrajzi koordinátákkal jellemzett ellipszoidi normális mentén mérve.

A földfelszíni P pont P' geoidi megfelelőjében a *valódi* és a *normál* nehézségi erőtér potenciáljának $T_{P'}$, különbségét nevezzük a P' pontbeli *potenciálzavarnak*.

Ennek kiszámításához szükséges a normálpotenciálnak a P' geoidi pontbeli $U_{P'}$ értéke. Ha a geoid – a Föld méreteihez viszonyítva – közel van a szintellipszoidhoz, vagyis a keresett N geoid-ellipszoid távolság viszonylag kicsi, akkor $U_{P'}$-t számíthatjuk az U függvénynek a P″ pontbeli N szerinti hatványsorából lineáris (1. fokú) közelítéssel. (P″-vel a földfelszíni P pont ellipszoidi megfelelőjét jelöljük). Felismerjük, hogy az ebben szereplő $(\partial U/\partial N)_{P''}$ első differenciálhányados éppen a normál nehézségi erőtér negatív gradiensének abszolút értéke, ami pedig a P″ pontbeli $\gamma_{P''}$, normál nehézségi térerősség nagyságát adja. A potenciálzavar kifejezésében az $U_{P''}$ normál potenciálértéket az ily módon előállított kéttagú sorral helyettesítve és összefüggésünket N-re megoldva, kapjuk *Bruns* nevezetes összefüggésének *általános* alakját, miszerint

$$N = \frac{T_{P'}}{\gamma_{P''}} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma_{P''}}. \qquad (5221.1)$$

Ha kikötjük, mint általában, hogy a szintellipszoid és a geoid a normál ill. a valódi nehézségi erőtérnek azonos potenciálértékű szintfelülete, azaz $W_0 - U_0 \equiv 0$, akkor az (5221.1) *egyszerűsített* alakja

$$N = \frac{T_{P'}}{\gamma_{P''}}. \qquad (5221.2)$$

Az egyszerűsített *Bruns*-féle összefüggés tehát megadja a *valódi és a normál nehézségi erőtér azonos potenciálértékű szintfelületének távolságát,* és azt mutatja, hogy ez egyenesen arányos a geoidi potenciálzavar értékével. Ez a fizikai geodéziai módszerek többségének alapvető összefüggése.

A következő kérdés, ennek megfelelően a potenciálzavar meghatározása. Erre már több módszer is rendelkezésünkre áll, mi most először a gravimetriai megoldást fogjuk megismerni, mely a potenciálelmélet harmadik peremérték-feladatának megoldásán alapul.

Feladatok:

- Bizonyítsuk a *Bruns*-féle összefüggést!
- Elevenítsük fel a szintellipszoid és a normál nehézségi erőtér fogalmát [341.] és [343.]!

522.2. A poteciálelmélet peremérték-feladatai

A matematika peremérték-feladaton érti adott tartományban értelmezett függvények közül annak megkeresését, amely az adott tartomány határán (a peremfelületen) előirt feltételeknek eleget tesz. Esetünkben a potenciálzavar $T = W - U$ függvényét keressük. Erről mindenesetre tudjuk azt, hogy – mivel a centrifugális erőtér potenciálja a különbségképzésből kiesik – tömegvonzási potenciálok (nevezetesen a valódi földtömeg és a normál nehézségi erőtér forrását képező, a Föld tömegével egyenlő nagyságú, de szabályos eloszlású tömeg vonzási potenciáljának) különbsége.

Ez pedig akkor a Föld külső terében ki kell elégítse a rávonatkozóan felírható $\Delta T = 0$ *Laplace*-egyenletet (ahol Δ a *Laplace*-féle másodrendű differenciáloperátor), ami viszont másodrendű differenciálegyenlet a T függvény meghatározására. Korábbról [331.] tudjuk, hogy ennek általános megoldása végtelen sok gömbfüggvényből álló sor.

A *Laplace*-egyenlet megoldását képező harmonikus függvények összességéből (a gömbfüggvények végtelen sokaságából) ki kell választanunk azt, amely a Föld elméleti, vagy későbben majd a fizikai alakjának felszínén, a *peremfelületen*, előre számszerűen megadott feltételt (*peremfeltételt*) kielégít.

A matematika három peremérték-feladatot különbőztet meg attól függően, hogy mik az adott peremértékek. Az *első peremérték-feladat* (*Dirichlet-probléma*) esetében a peremfelületen a keresett függvény által ott felveendő függvényértékek adottak.

Második peremérték-feladatról (*Neumann-problémáról*) beszélünk akkor, ha a peremfelületen a keresett függvény felületi normális irányú első differenciálhányadosának számértékei ismertek.

Végül *harmadik peremérték-feladattal* állunk szemben, ha a peremfelületen a keresett függvény ottani függvényértékei és felületi normális irányú első differenciálhányadosa valamilyen lineáris kombinációjának számértékei adottak.

A peremérték-feladatok különböző fajtáira a matematikában kidolgozott megoldások állnak rendelkezésre.

522.3. Peremfeltétel felállítása a geoidra

Keressünk olyan matematikai kapcsolatot, amely a T potenciálzavar egyelőre ismeretlen függvénye és a geoidon mérhető (vagy pontosabban a földfelszínen mérhető és a geoidra átszámítható) mennyiségek között fennáll.

Írjuk fel a geoidi P′ pontban az ottani valódi és a normál nehézségi térerősség különbségét. Vegyük figyelembe, hogy mindkettő a megfelelő potenciálfüggvény negatív gradiensének abszolút értékeként fogható fel, amely utóbbiak a megfelelő potenciálfüggvény függőleges (magasság) irányú első differenciálhányadosaként értelmezhetők. Ezeknek különbsége viszont a potenciálzavar függvényének függőlegesirányú differenciálhányadosával egyenlő.

Másrészt a P′ pontbeli nehézségi értékek különbségében szereplő $\gamma_{P'}$ geoidi normál nehézségi térerősség a γ függvénynek az ellipszoidi P″ pontban végzett N szerinti sorbafejtésével számítható ki.

Ha a $\overline{P'P''} = N$ távolság (azaz a geoid-ellipszoid távolság) a Föld méreteihez viszonyítva kicsi (*1. feltétel*), akkor elegendő a sorbafejtést a lineáris (1. fokú) tagig végezni és a sor többi tagjai elhanyagolhatók.

Helyettesítsük N értékét a *Bruns*-féle összefüggés egyszerűsített alakjával (*2. feltétel:* $U_0 = W_0$), és rendezzük a kapott tagokat a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P'} - \frac{1}{\gamma_{P''}}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_{P''} T_{P'} = -(g_{P'} - \gamma_{P''}) = -\Delta g_{P'} \qquad (5223.1)$$

alakra. Ennek jobb oldalán ismert kifejezés, a *geoidi nehézségi rendellenesség* áll, amelyben g_{P}', a földfelszínen mérhető és a geoidra átszámítással nyerhető *valódi* és $\gamma_{P''}$ pedig a vonatkoztatási rendszernek megfelelő képletből a szintellipszoid felszínén fekvő P″ ponthoz kiszámítható *normál* nehézségi érték. (Ezek különbségét neveztük már korábban [333.] (és a Geofizika tantárgyban is) nehézségi rendellenességnek, vagy anomáliának.)

Számítsuk ki a (5223.1) bal oldali második tagjában a T függvény együtthatóját azzal a közelítéssel, hogy a lapultság elhanyagolásával az ellipszoidot a Föld tömegével megegyező M tömegű (*3. feltétel*), az ellipszoidéval azonos térfogatú homogén gömbbel helyettesítjük, amelynek sugara R. A keresett együtthatót ennek külső erőterében számítva az (5223.1)-nek a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P'} + \frac{2}{R}\, T_{P'} = -(g_{P'} - \gamma_{P''}) = -\Delta g_{P'} \qquad (5223.2)$$

jó közelítő alakjára jutunk, amelyben az elhanyagolás a lapultság ($f \approx 1/300$) nagyságrendjének felel meg.

A jobb oldal számszerű ismeretében az (5223.1) vagy az (5223.2) közelítő alak elsőrendű lineáris differenciálegyenlet az ismeretlen T függvény meghatározására, amit a *fizikai geodézia alap differenciálegyenletének* szokás nevezni.

Mivel azonban a Δg nehézségi rendellenességek nem az egész térben, hanem *zárt felület (a geoid) mentén* tekinthetők ismertnek, az (5223.1)-ből, vagy az (5223.2) közelítő alakból, a T függvény *térbeli* eloszlása közvetlenül nem határozható meg. Alkalmas ez az egyenlet azonban arra, hogy, ha ismerjük a T függvény általános alakját, akkor *peremfeltételként* szolgáljon az azt kielégítő konkrét függvény kikereséséhez.

Korábban már megállapítottuk [331.], hogy ha a külső térre korlátozódunk (*4. feltétel*), akkor a potenciálzavar T függvényének általános alakja a ΔT = 0 *Laplace*-egyenlet megoldásainak összességét tartalmazó végtelen gömbfüggvénysor (amely a [331.]-ben, megismert alakból származtatható, ha ezt mind a valódi, mind a normálpotenciál függvényre alkalmazzuk). Ebből az (5223.1), vagy az (5223.2) kifejezést peremfeltételként használva, a mért peremértékek alapján meghatározható az ezt kielégítő gömbfüggvénysor együtthatóinak számszerű értéke. Az (5223.1), vagy az (5223.2) alakilag a *harmadik peremérték-feladat* peremfeltételének felel meg.

Megjegyezzük, hogy a 4. érvényességi feltétellel előírtuk a földfelszínen mért nehézségi értékek geoidra átszámításának módját is. Ennek olyannak kell lennie, hogy eredményül azt a nehézségi értéket adja, amit a *geoidon mérnénk, ha fölötte tömegek nem lennének.*

Felírva a T függvény térbeli gömbfüggvénysorának általános alakját a geoidot közelítő R sugarú gömb külső terére, képezzük ennek a helyvektor (azaz a magasság) irányú első differenciálhányadosát, és az így nyert alakokban a geoidi P′ pont helyvektorát a geoidot közelítő gömb R sugarával helyettesítve, előállíthatjuk a T függvény és első differenciálhányadosa P′ geoidi pontbeli értékét gömbfüggvény alakban. Ezeket az (5223.2) peremfeltételben szereplő $(\partial T/\partial H)_{P'}$ és $T_{P'}$ helyére beírva, a lehetséges összevonások után (és az előjelet megfordítva) megkapjuk az

$$\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\; T_n(\vartheta,\lambda) = \Delta g_{P'} \qquad (5223.3)$$

peremfeltételt a geoidra gömbfüggvénysor alakjában.

Keressük tehát a potenciálzavar T függvényének azt az alakját, amelyik a geoidon az (5223.2), vagy az (5223.3) alakban most felállított peremfeltételt kielégíti.

522.4. Megoldás a potenciálfüggvény gömbfüggvénysorával

A potenciálzavart a valódi és a normál nehézségi erőtér potenciáljának $T = W - U$ különbségeként értelmeztük.

A *valódi földi nehézségi erőtér W* potenciálja a külső térben (a *Laplace*-egyenlet általános megoldásaként) a [331.2.]-ben tárgyalt feltételek mellett a (3312.15) alakú gömbfüggvénysor és a forgásból származó V_F potenciál összegeként fejezhető ki.

A *normál nehézségi erőtér* forgási és egyenlítői szimmetriás *U* normál potenciálfüggvénye az

$$U = \frac{kM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} J^{*}_{2n}\, P_{2n}(\sin\psi)\right] + V_F \qquad (5224.1)$$

alakban írható, ahol *a* az ellipszoid egyenlítői fél nagytengely hossza, J^{*}_{2n} pedig a normál nehézségi erőtér forrását képező tömeg külső mechanikai hatásait jellemző gömbfüggvény-együtthatók. Ez az alak burkoltan, az eddigieken túl, további három feltételt tartalmaz. Nevezetesen azt, hogy a normál erőtér leírásához használt koordináta-rendszer *O* kezdőpontját a forrását képező tömeg tömegközéppontjába helyezzük (*5. feltétel*), továbbá, hogy ez a tömeg a Föld tömegével megegyező nagyságú (*6. feltétel*), és ezt a tömeget, képzeletben, a Föld valódi forgási sebességével forgatjuk meg (*7. feltétel*).

A *T* függvény gömbfüggvénysorának a geoidi P′ pontbeli *általános* alakját megkapjuk, ha az előbbi két potenciálfüggvény különbségét képezzük ebben a P′ pontban. Ebből V_F kiesik, és élünk az $r_{P'} \approx a \approx R$ közelítéssel, így

$$T_{P'} = T(R,\psi,\lambda) = -\frac{kM}{R}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\delta J_n\, P_n(\sin\psi) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right)P_{n,m}(\sin\psi)\right], \qquad (5224.2)$$

ahol

$$\delta J_2 = J_2 - J^{*}_2$$

$$\delta J_3 = J_3$$

$$\delta J_4 = J_4 - J^{*}_4$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Az így nyert gömbfüggvénysor lesz tehát a potenciálzavar *T* függvénye. Ebben az *általános* alakban szereplő δJ_n, $C_{n,m}$ és $S_{n,m}$ együtthatók számértékének meghatározásával kell kikeresnünk azt a konkrét, *számszerű függvényalakot*, amely a geoidra felállított peremfeltételnek eleget tesz.

Írjuk be a *T* függvénynek az előbbi különbségképzéssel nyert-általános gömbfüggvénysor alakját az (5223.3) peremfeltétel bal oldalára (és az oldalakat megcserélve) a

$$\Delta g_{P'} = -\frac{kM}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[\delta J_n\, P_n(\sin\psi) - \sum_{m=1}^{n}\left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right)P_{n,m}(\sin\psi)\right] \qquad (5224.3)$$

alakra jutunk. Annyi ilyen alakú egyenletet írhatunk fel, ahány pontban mért nehézségi érték alapján ismert $\Delta g_{P'}$, geoidi nehézségi rendellenességünk van. Ezek számértékét a bal oldalra beírva, a jobb oldalon álló ismeretlen δJ_n, $C_{n,m}$ és $S_{n,m}$ együtthatókból az egyenletek számának megfelelő mennyiségűt ki tudunk számítani. (A gyakorlatban a felírható igen nagyszámú egyenletből ennél lényegesen kevesebb számú ismeretlen számértékét határozzuk meg a legkisebb négyzetek módszere szerinti számítással.)

Az így kiszámított együtthatókkal már számszerűen felírhatjuk a *T* potenciálzavar gömbfüggvénysorának a kiszámított együtthatók számának megfelelő véges számú tagját. A ki nem számított együtthatók értékét ezúttal nullának tekintjük.)

Az így előállított gömbfüggvénysort az (5221.2) *Bruns*-féle összefüggés számlálójába beírva, kapjuk végeredményként az *N* geoid-ellipszoid távolságok $N(\psi,\lambda)$ gömbfüggvénysorát.

Ennek a meghatározásnak az az előnye, hogy $\psi\approx\varphi$, és λ helyére tetszőleges koordináta-párokat beírva, a Föld tetszőleges helyére számítható az $N(\varphi,\lambda)$ geoid-ellipszoid távolságok értéke. Így, például megfelelő programmal számíthatók a hosszúsági és a szélességi vonalak metszéspontjának tetszőleges sűrűségű hálózatához az *N* értékek, amelyek között azután izovonalakat szerkesztve, megrajzolhatjuk az egész Föld geoidjának izovonalas ábrázolását a felvett vonatkoztatási felülethez (szintellipszoidhoz) viszonyítva.

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a kapott geoid-ellipszoid távolságok *geocentrikus elhelyezésű* vonatkoztatási ellipszoidhoz viszonyítva értendők! Ezt azzal értük el, hogy a normálpotenciál (5224.1) gömbfüggvénysora (az 5. feltételnek megfelelően) nem tartalmaz 1. fokú tagot.

A geoidmeghatározás további gravimetriai módszereit, ahogyan pl. a magyarországi HGEO2000 jelű geoidábrázolás is készült, a Fizikai geodézia tantárgy tárgyalja.

Feladatok:

- Ismételjük át a földi tömegvonzás potenciálfüggvényének gömbfüggvény-soráról tanultakat [331.2.]!
- Vázlattal és matematikai gondolatsorral bizonyítsuk, hogy helyes a geoidra felállított peremfeltétel (5223.1) alakja!
- Esetünkben miért a harmadik peremérték-feladat megoldásáról beszélünk?
- Írjuk fel a potenciálzavar gömbfüggvénysorát a $W-U$ gömbfüggvény-sorok különbségeként!
- Írjuk össze *N* gömbfüggvénysorának érvényességi feltételeit!
- Számítsuk ki, hogy legalább hány egyenlet felírása (és ehhez hány mért nehézségi érték) szükséges, ha a potenciálzavar gömbfüggvénysorának együtthatóit $n = m = 8$ fok és rendig kívánjuk kiszámítani?

523. A geoid meghatározása szatellitageodéziai módszerekkel

Az utóbbi évtizedekben a Föld mesterséges holdjai és a rájuk vonatkozó geodéziai megfigyelések (észlelések) több geodéziai feladat megoldásához nyitottak új utakat. Így, a geoid meghatározása is lehetségessé vált a mesterséges holdakra végzett mérések geodéziai felhasználásával. Ennek több megoldása is kialakult az eltelt viszonylag rövid idő alatt.

523.1. A szatellitageodézia geometriai alkalmazása

Ez a megoldás már átmenet a geoid meghatározásának tisztán geometriai és fizikai módszerei között, mert a mesterséges holdak pályamozgása már fizikai törvényeken alapszik. Most azonban csak a mesterséges holdak geodéziai észleléséből meghatározott geometriai helymeghatározó adatokat (a helyvektort, vagy ennek térbeli derékszögű összetevőit) fogjuk a geoid meghatározására felhasználni.

A megoldást olyan földfelszíni pontokban tudjuk használni, melyeknek *térbeli* helyzetét mesterséges holdak észlelésével, a *geoidhoz viszonyított* (magassági) helyzetét pedig szintezéssel (GPS + szintezés) (esetleg trigonometriai magasságméréssel) meghatároztuk.

Ez esetben a pontnak a mesterséges holdas technikával meghatározott helyvektorából először kiszámítjuk a φ, λ, h ellipszoidi koordinátahármasát, majd az így kapott h ellipszoid feletti magasságából a pont geoid feletti H magasságát levonva, kapjuk a geoidnak az

$$N = h - H$$

ellipszoid feletti magasságát (a geoid-ellipszoid távolságot, a meghatározott földfelszíni pont ellipszoidi normálisán mérve). Ezt több pontban elvégezve, az így kapott geoidi pontokból metszetet, vagy izovonalas felületi ábrázolást szerkeszthetünk. Így készült, pl. a FÖMI KGO-ban a magyarországi „*GPS-geoid*” az OGPSH 275 szintezett pontja alapján.

Az így kapott geoidkép geodéziai dátumadatai *egyedi pontmeghatározások* esetében megegyeznek a mesterséges holdas helymeghatározás vonatkoztatási rendszere által meghatározott dátumadatokkal. (Pl. GPS-szel mért pontok esetén általában a WGS84 rendszer *geocentrikus elhelyezésű* ellipszoidja.) Ha a geoid meghatározásához felhasznált pontjaink helyzetét valamilyen más (pl. Európában az ETRS89) rendszerben adott koordinátájú hálózati pontokra támaszkodó *relatív* mérésekkel határozzuk meg, akkor a kapott geoidkép geodéziai dátumadatai, természetesen, ennek a rendszernek a dátumadataival egyeznek meg (pl. az ETRS89 *„kvázigeocentrikus” elhelyezésű* ellipszoidja). Ilyen az említett magyarországi *GPS-geoid* is.

A módszer alkalmazásának legnagyobb előnye abban rejlik, hogy a földfelszín bármely helyén így meghatározott geoidi pont ellipszoid feletti N magassága *ugyanazon geocentrikus elhelyezésű ellipszoidra* vonatkoztatható. Ezért előnyösen alkalmazható, pl. az egymástól független geodéziai hálózatokban csillagászati szintezéssel meghatározott és helyi geodéziai dátumra vonatkozó (relatív) geoidábrázolások közös geocentrikus rendszerbe kapcsolásához. Ezt a módszert a gyakorlatban egyrészt ez utóbbi célra, másrészt a geoidhoz simuló ellipszoid méretének és alakjának meghatározására használjuk [324.].

Hasonló módon alkalmazható a gravimetriai mérési eredményekből (a Fizikai geodézia tantárgyban tárgyalandó módszerrel) alkotott geoidképnek a szintezett GPS-pontokban meghatározott N értékekre illesztésére is. Így készült a magyarországi geoiddarab HGGGEO2000 jelű *GPS-gravimetriai* ábrázolása, mely jelenleg a hazai állami alapmunkálatokban „hivatalosan” használandó, és a Földmérési és Távérzékelési Intézet (FÖMI) adatszolgáltatási rendszeréből nyerhető. Ez az ETRS89 (európai) vonatkoztatási rendszer „kvázigeocentrikus” elhelyezésű, GRS80 méretű és alakú ellipszoidjára vonatkoztatott geoid-ellipszoid távolságokat ad. (2005-től várható ennek HGGGEO2004 jelű újabb változata.)

523.2. A dinamikai szatellitageodéziai módszerek alkalmazása

A bolygók mozgásának törvényszerűségeit már *Kepler* felismerte, és tapasztalati úton felállított törvényeivel leírta. Később *Newton* az általános tömegvonzás törvényének felismerése után, ennek alapján megadta a *Kepler*-féle törvények egységes fizikai magyarázatát. Ezzel világossá vált, hogy a Föld közelében mozgó égitestek pályáját a Föld nehézségi erőtere szabja meg. Így könnyen belátható, hogy ezeknek az égitesteknek a pályáját megfigyelve, következtetni lehet a földi nehézségi erőtér szerkezetére. (Ennek a módszernek a részleteivel a Dinamikai szatellitageodézia tantárgy foglalkozik, itt most vázlatosan csak a módszer lényegét foglaljuk össze. Emlékeztetünk, hogy a pályamozgással kapcsolatos elemi ismeretekkel pedig a Kozmikus geodézia tantárgyban [312.2.] találkoztunk.)

Az égitestek pályamozgását a dinamika *Newton*-féle alaptörvénye segítségével lehet leírni. A *dinamikai egyensúly* feltétele az ismert

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \qquad (5232.1)$$

összefüggés.

Legegyszerűbb esetben M tömegű, pontszerűnek tekinthető központi égitest körül (központos erőtérben) mozgó egységnyi (1 kg) tömegpont mozgására alkalmazzuk ezt az alapösszefüggést (ún. *kéttest-probléma*), azzal a feltétellel, hogy az erőtér csak *Newton*-féle tömegvonzásból származik.

Ez esetben a mozgó tömegpontra ható összes erő **F** eredője a tömegvonzási erőhatás, és fejezzük ki az eredő gyorsulást a helyvektor időszerinti második deriváltjaként. Így a

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (5232.2)$$

mozgásegyenletre jutunk. Ennek megoldásaként kapjuk a Kozmikus geodéziából ismert azt az eredményt, hogy a tömegpont *pályája* kúpszelet, a Föld természetes és mesterséges holdjai esetében ellipszis, amelynek térbeli helyzetét, méretét és alakját az Ω, ω, i, a_s, e_s és T, vagy röviden p_i (i = 1, 2, …6) *Kepler*-féle pályaelemek jellemzik. (Itt T a perigeum ponton áthaladás időpontját jelenti.)

Ezek az (5232.2) másodrendű differenciálegyenletnek a kétszeri integrálása során belépő integrálási állandók, illetve belőlük levezetett állandó mennyiségek. Ebből következik az, hogy *(központos) centrális erőtérben* a tömegpont *térben és időben állandó méretű, alakú és helyzetű ellipszis pályán mozog.*

Tudjuk azonban, hogy a Föld valóságos nehézségi erőtere nem centrális erőtér. Ennek eltéréseit a centrális erőtértől a potenciál gömbfüggvény-sorának zonális és tesszerális tagjai írják le, melyeket most röviden az R függvénybe foglaltunk össze. Ezt figyelembe véve az (5232.1) baloldalán szereplő erőhatás kifejezésében, a valóságos földi nehézségi erőtérben az

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{grad}\, R(J_n, C_{n,m}, S_{n,m}, \mathbf{r}) \qquad (5232 \bullet 3)$$

mozgásegyenletre jutunk. Ennek megoldása során már olyan *Kepler*-féle pályaelemeket kapunk, amelyek az idő függvényeként változnak. *A Föld valóságos nehézségi erőterében mozgó tömegpont pálya bonyolult térgörbe, melynek elemi szakaszai időben változó méretű alakú és helyzetű Kepler-féle ellipszis pályák elemi darabjainak tekinthetők.*

Tetszőleges p_i pályaelem $\dot{p}_i$ = dp_i/dt időbeli változása tehát a földi nehézségi erőtér nem centrális voltából következik. Matematikailag tehát az erőtérnek a központostól (centrálistól) való eltéréseit jellemző gömbfüggvény-együtthatókkal hozhatók

$$\dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \dot{p}_i(J_n, C_{n,m}, S_{n,m}) \qquad (5232.4)$$

alakú függvénykapcsolatba.

Ennek figyelembe vételével a mesterséges hold pillanatnyi pályaelemeit adott időpontra (pl. valamely észlelés időpontjára) úgy kapjuk meg, ha valamely korábbi időpontra megadott $p_{i,\mathrm{o}}$ ún. *simuló pályaelemekhez* hozzáadjuk az eltelt időre eső megváltozásukat (ami viszont a nehézségi erőtér szerkezetének függvénye). Az így kapott *pillanatnyi pályaelemekből* számíthatjuk a Kozmikus geodézia tantárgyban megismert összefüggésekkel az észlelés pillanatára a mesterséges hold $\mathbf{r}_\mathrm{S}$ *geocentrikus helyvektorát*.

Valamely időpontban a mesterséges holdra végzett észlelések eredményeként kapott **s** *észlelési vekto*r nem más, mint a mesterséges hold $\mathbf{r_S}$ és az észlelési hely $\mathbf{r_P}$ geocentrikus helyvektorának különbség-vektora.

Ennek megfelelően az **s** észlelési vektor az előrejelzés időpontjára vonatkozó $p_{i\mathrm{o}}$ pályaelemek, a földi nehézségi erőtér potenciálfüggvényének J_n, $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ együtthatói, az észlelés t időpontja és az észlelési hely (álláspont) $\mathbf{r}_P$ helyvektorának

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_\mathrm{S} - \mathbf{r}_\mathrm{P} = \mathbf{s}(\Omega_\mathrm{o}, \omega_\mathrm{o}, i_\mathrm{o}, a_\mathrm{o}, e_\mathrm{o}, T_\mathrm{o}; J_n, C_{n,m}, S_{n,m}; t, \mathbf{r}_\mathrm{P}) \qquad (5232.5)$$

függvényeként fejezhető ki.

Több mesterséges hold, több álásponton rendszeresen végzett nagyszámú megfigyelésének mindegyikére felírható egy-egy (5232.5) alakú egyenlet, amely így közvetítő egyenletként szolgálhat a jobb oldalán szereplő mennyiségeknek az észlelések alapján végzendő meghatározásához. A nagyszámú észlelés alapján felállítható javítási egyenletekből a legkisebb négyzetek módszere szerinti megoldással az egyenletek számánál minden esetre kevesebb számú ismeretlen mennyiség meghatározható.

A szatellitageodézia dinamikai módszerének legáltalánosabb alkalmazásakor az ismeretlenek mindhárom csoportjára keresünk megoldást. Gyakran azonban szétválasztjuk őket és egy-egy csoportra felvett korábbi értékekkel csak a fennmaradó ismeretleneket határozzuk meg, majd fordítva, és fokozatos közeledéssel finomítjuk az eredményt. Így végül megkapjuk a

- simuló pályaelemeket (valamely kijelölt időpontra),
- a nehézségi erőtér véges számú gömbfüggvény-együtthatóját és
- az álláspontok helyvektorát.

Az eredmények további finomítása érdekében a dinamikai megoldásokkal közös számítási eljárásba szokták bevonni a hálózati oldalakra a szatellitageodézia *geo-*

metriai eljárásaival (szinkron irány- és távolság meghatározásokkal, stb) meghatározott térbeli irány és távolságokat is. Ilyenkor *kombinált megoldásról* beszélünk.

Ezzel a módszerrel már az 1980-as évek elején $n = m = 30$ fok és rendig terjedő gömbfüggvény együtthatók számértékét és az egész Földet beborító, akkor néhányszor 10 állomásból álló hálózat pontjainak geocentrikus helyvektorát határozták meg.

A gömbfüggvény-együtthatók meghatározásába az (5232.5) alakú egyenletek mellett bevonhatók a földfelszíni nehézségi mérések alapján felírható (5224.3) alakú egyenletek is. Annyi ilyen egyenlet írható fel, ahány mérési pontban $\Delta g_{P'}$ geoidi nehézségi rendellenességet tudunk számítani. Ezzel a meghatározó egyenletek (egyébként is nagy) száma még jelentősen növelhető, ami még több gömbfüggvény-együttható meghatározását teszi lehetővé. Ennek a megoldásnak további előnye, hogy a földfelszíni nehézségi mérések eredményei az erőtér eloszlásának finomabb részleteivel egészítik ki a mesterséges holdak észleléséből nyerhető főbb szerkezeti formákat (a hosszabb hullámú eloszlás-képet).

Ma már a gömbfüggvény-együtthatókat $n = m = 360$ fok és rendig, sőt azon túl is ismerjük, és több különböző *szatellita-geodéziai világhálózat* készült. A gömbfüggvény-együtthatók meghatározott értéksorát *geopotenciál modellnek* szokták nevezni. Ezek ismeretében számszerűen felírhatóvá válik a *földi tömegvonzási erőtér potenciálfüggvénye* (3312.15) alakú gömbfüggvénysorának véges számú tagja. Ezeket az értéksorokat a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) *Nemzetközi Geopotenciál Modellek Központja* (International Centre of Global Earth Models = ICGEM) gyűjti, és teszi közzé (http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html).

Megfelelő vonatkoztatási rendszer (vonatkoztatási ellipszoid és normál nehézségi erőtér) felvételével (mint, pl. jelenleg a WGS84 rendszerben) fel tudjuk írni a *T potenciálzavar (5224.2) alakú gömbfüggvény-sorának*, ugyancsak, véges, de nagy számú tagját.

A potenciálzavar ily módon számszerűen megismert gömbfüggvény-sorából kiszámított értéket a (5221.2) *Bruns*-féle összefüggésbe beírva és $\gamma_{P''}$-vel osztva, kapjuk a φ, λ ellipszoidi koordinátájú P pontbeli helyen az *N geoid-ellipszoid távolságot*.

Ezt a számítást a számítógéppel a φ, λ földrajzi koordináták megfelelően megválasztott kerek értékeihez elvégeztetve, megszerkeszthetjük és kirajzoltathatjuk a *geoid izovonalas ábrázolásá*t a választott vonatkoztatási rendszer geocentrikus elhelyezésű ellipszoidjához viszonyítva. Ezzel a módszerrel jó áttekintő képet nyerhetünk az *egész Föld geoidjáról*. A jelenleg elérhető megbízhatóság méter nagyságrendű középhibával jellemezhető. Az így és további más mérések bevonásával készített egész földi (globális) geoidábrázolásokat az IAG *Nemzetközi Geoid Szolgálata* (International Geoid Service = IGeS) gyűjti, és adja közre (http://www.iges.polimi.it/).

Kisebb kiterjedésű, gravimetriailag jól felmért terület még pontosabb, részletgazdagabb geoidábrázolása készíthető el, ha az így nyert (globális) geoidképet a helyi gravimetriai mérési eredményekkel tovább finomítjuk. Így készült, pl. Magyarországra a BME Felsőgeodézia Tanszékén a HGTUB2000 jelű geoidábrázolás, amely a GPM98CR jelű geopotenciális modellből számítható (egész földi) geoidkép helyi finomítása a szűkebb környezetünkben rendelkezésre álló mintegy 300.000 gravimetriai mérésből közel 26.500 rácspontra interpolált nehézségi rendellenességre és digitális terepmodellekre támaszkodik.

Feladatok

- Mutassuk be vázlaton a *Kepler*-féle pályaelemeket! – Elevenítsük fel a bolygómozgás *Kepler*-féle törvényeit!
- Hasonlítsuk össze a J_2 és a többi gömbfüggvény-együtthatók nagyságrendjét!

523.3. A szatellita-altimetria

Mint a Kozmikus geodézia tantárgyból már tudjuk, ez lényegében a mesterséges holdról a Föld felé függőleges irányban végzett lézeres távolság- (azaz magasság-) mérést jelent. Kimérhető lézer impulzus a tengerek felszínéről verődik csak vissza, így az eljárást a szárazföldek felett nem lehet alkalmazni.

Ha ismerjük a mesterséges hold mozgását leíró pályaelemeket, akkor az észlelés pillanatára számíthatjuk a mesterséges hold geocentrikus helyvektorát. Ebből levonva a tengerfelszín felett mért magasságát, megkapjuk a tengerfelszíni pontok geocentrikus helyvektorát. Ha ebből levonjuk a vonatkoztatási ellipszoid felszínéig tartó helyvektor hosszát, kapjuk a tengerfelszín és az ellipszoid közötti távolságot. Ezt még meg kell javítani a pillanatnyi tengerfelszín és a középtengerszint magasságában kijelölt szintfelület közötti távolsággal, amit a tengerfelszín topográfiájának nevezünk. Ez utóbbi mennyiség meghatározása az ún. *tengeri geodézia* egyik fontos feladata.

A magasságmérésben elérhető igen nagy megbízhatóságot (ami ± 0,1 m-nél is kisebb középhibával jellemezhető), sajnos, még nem tudjuk teljesen kihasználni a pálya és a tengerfelszín topográfiájának ennél kisebb megbízhatóságú ismerete miatt.

Feladatok:

- Mutassuk be vázlaton a szatellitageodézia geometriai alkalmazásának elvét a geoid meghatározására! Mi szabja meg a geoid-ellipszoid távolság meghatározásának elérhető megbízhatóságát?
- Ismételjük át a szatellitageodézia dinamikai módszerének alapjait [Kozmikus geodézia 312.]!
- Mutassuk be vázlaton a szatellita-altimetria elvét! Milyen hatásokat tükröz a tengerfelszín topográfiája?

*

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy az eddigiek során négy olyan mennyiséggel ismerkedtünk meg, amelyek a valóságnak a képzeletbeli vonatkoztatási rendszerünkhöz viszonyított eltérését mutatják. Mindegyikük egy *természetbeni* (valódi) és egy, a vonatkoztatási rendszerben *számított* (képzeletbeli) érték különbsége, úm. :

- a függővonal-elhajlás: $\xi = \Phi - \varphi$; $\eta/\cos\varphi = (\Lambda - \lambda)$
- a geoid-ellipszoid távolság: $N = -(H - h)$
- a nehézségi rendellenesség: $\Delta g = g - \gamma$
- a potenciálzavar: $T = W - U.$

Ezek egymással rokon fogalmak, és egymásba átszámíthatók. Őket a Föld valóságos nehézségi erőtere és a normál nehézségi erőtér egymástól eltérésének, végső soron a geoid és a vonatkoztatási ellipszoid egymáshoz viszonyított helyzetének meghatározására használjuk. Elvileg bármelyik mennyiségre támaszkodva, végül ugyanarra az eredményre (geoidra) kell jutnunk. Hogy mikor, melyiket használjuk, azt a gyakorlati célszerűség szabja meg.

53. A fizikai földfelszín meghatározása

Emlékeztetünk arra, hogy a Föld fizikai alakjának, a fizikai földfelszínnek pontonkénti meghatározásakor a felsőgeodéziában a geodéziai alaphálózatok természetben kijelölt pontjainak térbeli helyzet-meghatározására gondolunk.

A meghatározandó földfelszíni pontok térbeli helyzetét általában a már megismert módon bevezetett vonatkoztatási ellipszoidhoz kapcsolódó φ, λ és *h* ellipszoidi koordináta-hármassal adjuk meg.

Ha a földfelszíni pont helyzetét *szatellitageodéziai módszerekkel* határozzuk meg, akkor közvetlenül a pont háromdimenziós helyvektorát (térbeli derékszögű koordinátáit kapjuk eredményül. Ezt a megoldást főként geodéziai világhálózatok egymástól akár több ezer kilométerre fekvő néhány pontjának, továbbá egymástól nagy távolságokra lévő, különleges rendeltetésű pontok hálózatának, vagy, egyre szélesedő körben, helyi hálózatok, sőt, egyes pontok helyzetének meghatározására is használjuk. Ez az eljárás különösebb elvi kérdést nem vet fel. A gyakorlati felhasználás céljára a helyvektorból – megfelelő vonatkoztatási felület bevezetésével – *ellipszoidi koordináták* φ, λ, h hármasát számítjuk. Ez a földfelszíni pont térbeli (3 dimenziós) helymeghatározásához elvileg elegendő, de a felhasználói gyakorlat, e mellett, a pont *tengerszint (geoid) feletti H magasságát* is igényli.

A földfelszíni pontok helyzetének *hagyományos földfelszíni geodéziai mérésekkel* végzett meghatározásakor a pont vízszintes helyzetét jellemző φ *és* λ ellipszoidi földrajzi koordináták meghatározásának módját részben az Alaphálózatok tantárgy keretében, részben a korábbi részekben már megismertük.

A pontok ellipszoid feletti *h* magasságának meghatározásakor a feladatot általában két részre osztjuk, így *h*-t az *N geoid-ellipszoid távolságnak* és a pont *tengerszint feletti H* magasságának összegeként állítjuk elő. Ilyen értelemben a geoidnak az előzőekben [52.] tárgyalt meghatározása általában a fizikai földfelszíni pontok teljes értékű térbeli helyzet-meghatározásához is szükséges. (Megjegyezzük, hogy a későbbiek során olyan megoldást is meg fogunk ismerni, ahol a geoid meghatározására nem lesz szükség [533.].)

Az ellipszoid feletti magasság másik része pedig a földfelszíni pont geoid (tengerszint) feletti *H* magassága, melynek meghatározásával a következőkben foglalkozunk.

531. A geoid feletti magasság meghatározása

A Geodézia tantárgyból már tudjuk, hogy *magasságkülönbségen* a nehézségi erőtér szintfelületei között, a függővonal mentén mért távolságot, vagy röviden a két szintfelület távolságát értjük. *Magasságnak* valamely magassági alapszintfelülethez viszonyított magasságkülönbséget nevezzük. Attól függően, hogy a magassági alapszintfelületet önkényesen vagy valamely középtengerszint magasságában választjuk meg, relatív, illetve abszolút (tengerszint feletti magasságról beszélünk.

A magasságmeghatározás szabatos módszere a *geometriai szintezés* és különleges esetekben a *hidrosztatikai szintezés.* Megfelelő körülmények között alkalmazzuk még a *trigonometriai magasságmérést* is. (Ezzel későbbben külön fogunk foglalkozni.)

Ha geometriai szintezést végzünk, és követjük a szintezés szabályait, valamint feltételezzük, hogy a fénysugár terjedési görbéje és a szintfelületek alakja az előre és a hátra irányzáskor a műszerálláspontra szimmetriás, akkor elvileg minden műszerállásban, a leolvasások különbségeként, a kötőpontokon átmenő két szintfelület helyes függőleges távolságát, azaz a kötőpontok m_i magasságkülönbségét kapjuk.

Ha az egyes műszerállásokban kapott magasságkülönbségeket hosszú úton összegezzük, akkor a végpontok magasságkülönbségére, a szintfelületek nem párhuzamos volta miatt, a *szintezés útvonalától függő* eredményt kapunk. Ha pedig zárt szintezési kört (poligont) alakítunk ki, hibátlan mérési eredmények esetén is, nullától eltérő, ún. *elméleti záróhibára* jutunk.

Szintfelületek távolságának jellemzésére nagyobb kiterjedésű területen (a felsőgeodéziában) a szintezett (ún. *nyers*) magasságkülönbségek nem alkalmasak, ezért más magassági mérőszámokat kell bevezetni.

531.1. A geopotenciális érték

A nehézségi erőtér szintfelületei között – mint láttuk – nem a függőleges távolságok, hanem a potenciálkülönbségük állandó. Ezért méréseinkkel is ΔW *potenciálkülönbséget kell meghatározni,* ami munka jellegű mennyiség. Ehhez a szintezés útvonala mentén nehézségi méréseket is kell végezni, és a szakaszok $g_i \cdot m_i$ szorzatának összegezésével jutunk a keresett eredményre.

A geoidhoz, mint magassági alapszintfelülethez viszonyított potenciálkülönbséget nevezzük *geopotenciális értéknek,* és K-val jelöljük. Ezt elvileg a $g \cdot \mathrm{d}m$ elemi szorzatoknak az O magassági kiindulópont és a P pont közötti vonalintegráljaként értelmezzük (ahol $\mathrm{d}m$ a (nyers) szintezett elemi magasságkülönbségeket jelenti). Ezt gyakorlatilag a szintezési szakaszokra vonatkozó $g_i \cdot m_i$ szorzatoknak a két végpont közötti összegezésével tudjuk számszerűen előállítani.

Valamely P pont geopotenciális értéke, tehát

$$K_\mathrm{P} = W_0 - W_\mathrm{P} = \int_\mathrm{O}^\mathrm{P} g\,\mathrm{d}m \approx \sum_\mathrm{O}^\mathrm{P} g_i\, m_i\,. \qquad (5311.1)$$

A geopotenciális érték szabatos szintezéssel és hozzá kapcsolódó nehézségi mérésekkel *feltevésmentesen meghatározható*. Egyszerű, természetes mérőszám a magasságra, melynek egyetlen hátránya az, hogy nem hosszúság jellegű. A geodéziában alkalmazott mértékegysége a *geopotenciális egység* (GPU = Geopotential Unit), ami 1 dJ/kg (vagy 10 $\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$). Ennek a mértékegységnek előnye az, hogy a pontok geopotenciális értéke számszerűen csak mintegy 2%-kal különbözik a pontok – későbbiekben tárgyalandó – hosszegységben (m-ben) kifejezett magasságától.

A gyakorlatban a geopotenciális értéket különböző magassági mérőszámokat használó (nemzeti) magassági alapponthálózatok összekapcsolásakor (együttes kiegyenlítésekor) használjuk.

A felhasználó azonban hosszúság jellegű magassági mérőszámot igényel, ezért ilyen megoldást kell keresni.

531.2. Az ortométeres magasság

Valamely P pont *ortométeres magasságán* a P ponton átmenő szintfelület és a magassági alapszintfelület távolságát értjük <u>a P pont függővonalán mérve.</u> Ezzel az értelmezéssel kiküszöböltük a szintfelületek nem párhuzamosságából származó bizonytalanságot a magasság kérdésében.

Az ortométeres magasság kiszámítása érdekében írjuk fel a P pontnak a geoidon fekvő O magassági kiindulóponthoz viszonyított $W_0 - W_\mathrm{P}$ potenciálkülönbségét egyrészt a *fizikai földfelszínen,* a szintezés útvonala mentén, ennek eredményeként (ez éppen a pont geopotenciális értéke), másrészt az O pontból kiindulva a *geoidon* a P pont P′ geoidi megfelelőjéig, majd innen a P pont függővonalán a földfelszínig haladva. A kétféle úton felírt potenciálkülönbséget egymással egyenlővé téve, kiszámíthatjuk a PP′ függővonal-szakasz

$$H_\mathrm{P} = \frac{1}{\tilde{g}_\mathrm{P}} \int_\mathrm{O}^\mathrm{P} g\, dm = \frac{K_\mathrm{P}}{\tilde{g}_\mathrm{P}} \approx \frac{1}{\tilde{g}_\mathrm{P}} \sum_\mathrm{O}^\mathrm{P} g_i\, m_i \ , \qquad (5312.1)$$

ívhosszát, amit úgy kapunk, hogy az O és a P pont mért potenciálkülönbségét elosztjuk a nehézségi térerősségnek a P pont függővonala mentén, a geoid és földfelszín közötti $\tilde{g}_P$ *átlagértékével* (feltételezve azt, hogy a *g* nehézségi térerősség a tengerszint és a földfelszín között, a P pont függővonalán, a magassággal egyenletesen változik).

Ezt az átlagértéket közvetlenül mérni nem tudjuk. Számítása a mért földfelszíni érték és a geoid és a felszín közötti földtömeg eloszlására vonatkozóan felvett valamilyen modell alapján lehetséges. A modell meghatározása azonban a Föld belsejére vonatkozó ismereteinket pótló feltevéseket igényel, így ennek több módja is kialakult.

Egyik szokásos megoldás a (333.6) *Poicaré-Prey*-féle modell alkalmazása. Korábban gyakran megelégedtek azzal is, hogy a $\tilde{g}_P$ átlagértéket a *normál nehézségi képletből* a P pont függőlegesén, a *H/*2 magassághoz kiszámított $\tilde{\gamma}_\mathrm{P}$ *normálértékkel* közelítették (*normál-ortométeres magasság*).

Az ortométeres magasság általában jól használható, hosszúság jellegű magassági mérőszám, ami a gyakorlatban széles körben (korábban Magyarországon is) elterjedt. Hátránya, hogy a $\tilde{g}_P$ átlagérték számításán keresztül a valóságot közelítő feltételezésekhez kötött, továbbá, hogy a $H_1 = H_2 = \ldots = H_i =$ állandó ortométeres magassággal jellemzett pontok általában *nem fekszenek azonos szintfelületen* (a víz elfolyik közöttük).

Említett hátrányai ellenére több ország használja országos magassági alapponthálózata magassági adatainak megadására.

531.3. A dinamikai magasság

Az ortométeres magasságnak ezen legutóbb említett hátrányán segít a dinamikai magasság fogalmának a bevezetése. Erre úgy jutunk, hogy a P ponton átmenő szintfelületnek a geoidhoz viszonyított (mért) potenciálkülönbségét, azaz a P pont geopotenciális értékét elosztjuk valamely *megállapodásszerűen rögzített normál nehézségi értékkel*. Így a potenciálkülönbséggel arányos nagyságú, de hosszúság jellegű magassági mérőszámra jutunk.

A felvett normál nehézségi erő érték általában a φ = 45° szélességen (ill. *Rédey* professzor javaslata szerint a φ = 90° helyen, a sarkokon) az ellipszoid felszínére, valamely nemzetközileg elfogadott geodéziai vonatkoztatási rendszer normál nehézségi képletéből kiszámított érték. Ezzel a P pont *dinamikai magassága*

$$H_{\mathrm{P}}^{\mathrm{din}} = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} K_{\mathrm{P}} \approx \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \sum_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} g_i \, m_i \, . \qquad (5313.1)$$

A dinamikai magasság értelmezésének megfelelően, az *azonos szintfelületen fekvő pontok dinamikai magassága azonos.* Ezzel szemben hátránya, hogy a nyers (szintezett) magasságokat meglehetősen nagy javítással kell ellátni, ami országos szintezési hálózatok gyakorlati használatakor gondot jelenthet. A dinamikai magasságnak geometriai tartalma tulajdonképpen nincs, ez egyszerűen a pont geopotenciális értékével arányos, hosszúságjellegű mennyiség.

Az utóbbi évtizedekben még további magassági mérőszám is elterjedt a geodéziai gyakorlatban *normálmagasság* elnevezéssel. Ezt későbbben fogjuk tárgyalni [533.].

Feladatok

- Ismételjük át a szintezésnek a Geodézia és a Geodéziai alaphálózatok tantárgyban tanult szabályait és bizonyítsuk, hogy megtartásuk és további két feltétel mellett egyetlen műszerállásban a helyes magasságkülönbséget kapjuk eredményül!
- Nagy távolságokra szintezve miért függ a kapott eredmény a szintezés útvonalától?
- Miért kell a felsőgeodéziában a szintezés mellett nehézségi mérést is végezni?
- Mik a geopotenciális érték tulajdonságai? Bizonyítsuk az ortométeres magasság számítására szolgáló (5312.1) helyességét!
- Soroljuk fel az ortométeres magasság tulajdonságait!
- Mikor van szükség a dinamikai magasság használatára?
- Lehet-e a dinamikai magasságnak geometriai értelmezést találni?

532. A trigonometriai magasságmérés alkalmazása

Trigonometriai magasságméréskor az ismert vízszintes helyzetű P_1 és P_2 pontban megmérjük a két pont között haladó fénysugár terjedési görbéjének Z_1 és Z_2 *szintfelületi zenitszögét*. A pontok s_{12} ellipszoidi távolsága (ívhossza) a koordinátáikból számítható, tehát ismert.

A fénysugár terjedési görbéjének végérintői a két pontot összekötő húrral a δ_1 és a δ_2 fénytörési (refrakciós) szöget zárják be. A helyi függőleges (a helyi szintfelületi normális) iránya a ponton átmenő ellipszoidi felületi normális irányával a függővonalelhajlás P_1 és a P_2 pontot összekötő irányra vonatkozó vetületének megfelelő ϑ_1 és ϑ_2 szöget zárja be. A pontoknak az ellipszoid feletti magassága h_1, ill. h_2.

Az ellipszoid $s_{1,2}$ ívdarabját helyettesítjük az R átlagos középgörbületi sugarú gömbi ívvel. Az $s_{1,2}$ gömbi ívhosszhoz tartozó középponti szög a K metszéspontban legyen a γ szög.

A P_1, P_2, K síkháromszögre felírt tangenstételből, a háromszög belső szögösszegét kifejező összefüggésből tg $\gamma/2$-et hatványsorba fejtve, ennek első két tagjára korlátozódva és a $\gamma/2 = s_{1,2}/2R$ helyettesítéssel kifejezhetjük a két pont *ellipszoid feletti magasságának* különbségét a

$$\Delta h_{1,2} = h_2 - h_1 = s_{1,2}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}+\frac{s_{1,2}^2}{12R^2}\right)\mathrm{tg}\frac{(z_2+\delta_2)-(z_1+\delta_1)}{2} \qquad (532.1)$$

alakban, ahol z_1 és z_2 a megfelelő *ellipszoidi zenitszöget* jelöli, amit a mért szintfelületi zenitszögből a függővonal-elhajlás megfelelő irányú vetületének figyelembe vételével számíthatunk ki. (Megjegyezzük, hogy az (532.1)-ben a függővonal-elhajlás elhanyagolásával az ellipszoidi zenitszög helyett a *Z mért szintfelületi zenitszöget* írjuk, akkor eredményül értelemszerűen a pontok *tengerszint feletti magasságának* $\Delta H_{1,2} = H_2 - H_1$ különbségét kapjuk.)

A trigonometriai magasságmérés legkényesebb pontja a δ_1 és a δ_2 refrakciós szög meghatározása. A gyakorlatban általában a fénysugár terjedési görbéjét R/k sugarú körívvel helyettesítjük, ahol k a fénytörési (refrakciós) együttható és általában $k < 1$. A zenitszögek mérését pedig célszerűen mindkét végpontról egyidejűen végezzük. Ez esetben jó közelítéssel feltételezhetjük, hogy $\delta_1 = \delta_2$, miáltal ez a hatás az (532.1)-ből a különbségképzés révén kiesik.

Ezzel szemben lehetővé válik a k fénytörési együttható számértékének kísérleti meghatározása a

$$k = 1 - \frac{z_1 + z_2 - 180°}{\gamma} \qquad (532.2)$$

összefüggés alapján, ahol $\gamma = s_{1,2}/R$ helyettesítéssel élünk. A k együttható értéke, különösen a talaj közelében, viszonylag tág határok között változik. A talajtól távolabb, nagyobb magasságban már kisebb változást mutat, és magashegységekben pedig igen kevéssé változó kis érték. Ezért a trigonometriai magasságmérés elsősorban ez utóbbi környezetben vezet jó eredményre. Ilyen körülmények között előnyösen alkalmazható a *függővonal-elhajlások sűrítésére* is. A P_1, P_2, K háromszög szögösszegét kifejező összefüggésnek a megfelelő átrendezésével ugyanis a

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = (z_1+z_2) - \gamma - 180° + (\delta_1+\delta_2) \qquad (532.3)$$

alakra jutunk, ahol $\gamma = s_{1,2}/R$ és ismét a $\delta_1 = \delta_2$ feltevéssel élve $\delta_1+\delta_2 = k\gamma$ helyettesítést végzünk.

Ha ismert függővonal-elhajlású végpontok között pontpáronként egyidejű trigonometriai magasságméréssel magassági sokszögvonalat vezetünk, akkor a közbenső pontokra számítható lesz a függővonal-elhajlás és a k fénytörési együttható pillanatnyi értéke.

A trigonometriai magasságmérés (főként magas hegyvidéken) alkalmazható a geoid-ellipszoid távolságok különbségének meghatározására is a

$$\Delta N_{1,2} = N_2 - N_1 = (h_2 - h_1) - (H_2 - H_1) \qquad (532.4)$$

összefüggés alapján, ahol a *h* ellipszoid feletti magasságokat trigonometriai magasságméréssel és a *H* tengerszint feletti magasságokat szabatos szintezéssel határozzuk meg.

Feladatok

- Vázlat és geometriai megfontolás segítségével bizonyítsuk az (532.1) helyességét!
- Milyen közelítéseket tartalmaz az (532:1)?
- Milyen feltételezés mellett tudjuk az (532.1)-et gyakorlatilag hasznosítani és mikor várható ezek teljesedése?
- Mutassuk be az (532.3) gyakorlati alkalmazását két oldalból álló magassági sokszögvonal példáján!
- Vázlattal bizonyítsuk az (532.4) helyességét!

533. Magasságmeghatározás mesterséges hold észleléssel

Mint tudjuk, mesterséges holdak geodéziai észlelésével az álláspontunk (geocentrikus) helyvektorát tudjuk közvetlenül meghatározni. Földi térbeli derékszögű koordináta-rendszerünk tengelyeire E(*a,f*) paraméterű vonatkoztatási ellipszoidot illesztve, egyszerű átszámítással megkaphatjuk a pont (φ, λ, h) *ellipszoidi* koordinátahármasát. Ha a pontunk geoid (tengerszint) feletti *H* magasságát is meghatározzuk, pl. szintezéssel, akkor ebben a pontban megkaphatjuk az

$$N = h - H$$

geoid-ellipszoid távolságot. (Ezt az összefüggést használtuk már a geoid meghatározására a szatellitageodézia geometriai módszerének alkalmazásakor [523.1].)

Most ezt a módszert arra fogjuk használni, hogy a mesterséges hold észleléssel (GPS-méréssel) és szintezéssel (is) így meghatározott P_i és P_j pont közötti további P_k pont (pontok) *geoid (tengerszint) feletti magasságát* meghatározzuk további *mesterséges hold észleléssel* (GPS-szintezés).

A közbenső P_k pont H_k *geoid (tengerszint) feletti magasságát* a

$$H_k = h_k - N_k$$

alakból számítjuk ki, ahol tehát h_k a pont mesterséges hold észleléssel meghatározott ellipszoid feletti magassága és $N_k = N_k(N_i, N_j)$ a P_i és a P_j pont előbbi módon meghatározott geoid-ellipszoid távolságából valamilyen predikciós eljárással a P_k közbenső pontra kiszámított érték. (A gyakorlatban ez a predikciós eljárás többnyire az egyszerű lineáris predikció.)

Ezzel a megoldással a munka-, és így, költségigényes szintezés helyett sokkal gyorsabb és olcsóbb GPS-méréssel tudjuk közbenső pontok *geoid (tengerszint) feletti magasságát* meghatározni. Az eljárás megbízhatósága (a GPS-mérés megbízhatóságán túl) alapvetően a közbenső pont (interpolált) *geoid-ellipszoid távolságának* megbízhatóságától függ. A módszer alkalmazható, természetesen, több szintezett GPS-pont felhasználásával, akár vonal mentén, akár felületdarabra kiterjesztve, és a geoid-ellipszoid távolságok interpolálásába más információk is bevonhatók.

A hazai gyakorlatban már egyes területeken a 3. rendű szintezés kiváltására eredményesen használjuk ezt az eljárást.

A módszer általánosítása az, ha nagyobb felületdarabon mind a szintezett GPS-pontokra (GPS-geoid [523.1.]), mind a csillagászati-geodéziai [521.], mind a nehézségi, valamint gradiométeres mérésekre támaszkodó *kombinált megoldással* (pl. kollokációval) előállítjuk a lehető legrészletesebb geoidábrázolást (az ún. „*centiméter-geoidot*"), és ezt használjuk fel a területen végzett további GPS-mérésekkel terepi pontok tengerszint (geoid) feletti magasságának meghatározására (GPS-szintezésre).

534. A peremérték-feladat megoldása a fizikai földfelszínre

Ebben a fejezetben a fizikai földfelszín meghatározásának újabb módszerét ismerjük meg, amely a harmadik peremérték-feladatnak a fizikai földfelszínre vonatkozó megoldásán alapszik. Az eljárás nagy előnye elvi tisztasága, vagyis az, hogy a fizikai valóságban mérhető mennyiségekre közvetlenül támaszkodva teszi lehetővé a feladat megoldását, elkerülve az ismereteink hiányait pótló feltevéseket. Ez azáltal válik lehetővé, hogy a helymeghatározó adatok mindegyikét a *normál nehézségi erőtérben* értelmezi, melynek matematikai összefüggéseit pontosan ismerjük, hiszen magunk választhatjuk meg. Így, ebben az eljárásban a normál nehézségi erőtérnek még nagyobb jelentősége lesz az eddiginél.

A földfelszíni P pont helyzetének meghatározására a fizikai valóságban mérni tudjuk a pont Φ_i és Λ_i *szintfelületi földrajzi szélességét és hosszúságát*, valamint a tengerszintről kiinduló szintezéssel és nehézségi mérésekkel a geoidhoz viszonyított $W_0 - W_P$ *potenciálkülönbségét.* Ezen túlmenően még az is szükséges, hogy a Föld egész felszínéről legyenek *nehézségi mérési eredményeink.*

Keressük a földfelszíni P pont φ, λ és h ellipszoidi koordinátáit, amelyek a geodéziai dátum ismeretében a pont térbeli helyzetét meghatározzák.

A feladat megoldásához felvett geodéziai vonatkoztatási rendszer normál nehézségi erőterének ellipszoid alakú szintfelülete (a Föld normál alakja) lesz helymeghatározó koordináta-számításaink vonatkoztatási ellipszoidja. A szintellipszoid U_0 normál- és a geoid W_0 valódi potenciálértékét számszerűen azonosnak tekintjük.

A P földfelszíni pont ellipszoidi P″ megfelelőjét most úgy állítjuk elő, hogy a P pontot a *normál nehézségi erőtér* rajta átmenő *függővonalával* (erővonalával) vetítjük az ellipszoid felszínére. A P pont ellipszoidi földrajzi szélességét és hosszúságát a P″ pontbeli ellipszoidi felületi normális térbeli helyzetét jellemző φ és λ szöggel értelmezzük.

Ez utóbbiakra a következő módon jutunk. A földfelszíni P pontban a valódi és a normál nehézségi térerősség vektornak hatásvonala által bezárt szöget (vagyis a valódi és a normálpotenciál szintfelületének felületi normálisa által bezárt szöget) *földfelszíni,* vagy *Mologyenszkij-féle függővonal-elhajlásnak* nevezzük. Ennek ξ^M meridián és η^M I. vertikális irányú összetevőjének figyelembe vételével könnyen számítható a P pont φ^{n} *normálszélessége* és λ^{n} *normálhosszúsága*, melyek a normál nehézségi erőtér függővonala P pontbeli érintőjének térbeli helyzetét adják meg

$$\varphi^{n} = \Phi - \xi^{M} \qquad \text{és} \qquad \lambda^{n} = \Lambda - \eta^{M}/\cos\Phi.$$

A *P pont ellipszoidi földrajzi koordinátáit* pedig úgy kapjuk, hogy a normálszélességet és a normálhosszúságot a normál nehézségi erőtér függővonalának görbültsége miatt megjavítjuk. Mivel a normál nehézségi erőtér forgási szimmetriás eloszlású, függővonala a meridiánsíkban fekvő síkgörbe, így a javítás csak a φ^{n} koordinátát változtatja a függővonal P és P″ pontbeli érintőjének κ iránykülönbségével. Így

$$\varphi = \varphi^{n} - \kappa \qquad \text{és} \qquad \lambda \equiv \lambda^{n}.$$

A vonatkoztatási ellipszoid *geocentrikus elhelyezésű.*

Harmadik koordinátaként most is az *ellipszoid feletti h magasságot* használjuk, amit két részből teszünk össze. Ennek érdekében keressük meg a normál erőtérnek a P ponton átmenő függővonalán azt a P‴ pontot, amelyben a normálpotenciál $U_{P'''}$ számértéke éppen a P pont valódi W_P potenciálértékével egyenlő. A P pont függővonalának a P″ P‴ szakaszát nevezzük a P pont H^{n} *normálmagasságának* és a P‴ P függőleges távolság pedig az N^{n} *magassági rendellenesség*. E két utóbbi mennyiség

$$h = H^{n} + N^{n}$$

összege teszi ki a P pont ellipszoid feletti *h* magasságát.

Megjegyezzük, hogy a külföldi szakirodalomban gyakran találkozhatunk a magassági rendellenességre a ζ jelöléssel, továbbá a valódi nehézségi erőtér szintfelületeire a *geop* és a normál nehézségi erőtér szintfelületeire a *szferop* elnevezéssel.

Egész földi viszonylatban a P‴ pontok összessége által alkotott felület a *fizikai földfelszín első közelítése*, amit *telluroidnak* is szokás nevezni. (Az első közelítés itt a magassági rendellenesség elhanyagolását jelenti.)

A továbbiakban bemutatjuk, hogy a földfelszíni pont magassági helyzetét jellemző, most ismertetett mennyiségekre hogyan juthatunk a mérési eredmények alapján.

534.1. A normálmagasság

Láttuk a korábbiakban, hogy a Föld valóságos nehézségi erőterének szintfelületei között értelmezett *ortométeres magasság* kiszámításához a nehézségi térerősségnek a P pont függővonala mentén a pont és a geoid közötti $\tilde{g}_P$ átlagértékének ismerete szükséges [531.2]. Mivel ezt a Föld belsejében mérni nem tudjuk a felszínközeli tömegek sűrűségeloszlására vonatkozó feltevések mellett, számítással tudjuk csak megközelíteni.

Hogy az ezzel járó bizonytalanságokat elkerüljük, inkább lemondunk arról, hogy a magasságot a Föld valóságos nehézségi erőterében értelmezzük. Így jutunk arra a megoldásra, hogy magassági mérőszámként a *normálmagasságot* vezetjük be. Ez pedig a pont geoidhoz viszonyított $W_0 - W_P$ valódi potenciálkülönbségének a normál nehézségi erőtérben megfelelő függőleges távolság (vagy magasságkülönbség), amit a

$$H_P^{n} = \frac{K_P}{\tilde{\gamma}_P} = \frac{1}{\tilde{\gamma}_P}\int_O^P g\,dm = \approx \frac{1}{\tilde{\gamma}_P}\sum_O^P g_i\,m_i \qquad (5341.1)$$

összefüggésből számíthatunk.

A nevezőben szereplő $\tilde{\gamma}_P$ *átlagos normál nehézségi értéket* úgy kapjuk, hogy a felvett normál nehézségi képletből az ellipszoid felszínére kiszámítható értéket a tiszta magassági hatással az ellipszoid fölé $H_P/2$ magasságra átszámítjuk. (Ez most nem tartalmaz semmiféle közelítést, mert a vonatkoztatási rendszert úgy alkottuk meg, hogy a Föld normálalakja (a szintellipszoid) a Föld össztömegét magába zárja, így felette már tömegek nincsenek! Ebben rejlik a normálmagasság feltevésmentessége.)

Az (5331.1)-ben m_i most is az *i.* szintezési szakasz szintezett (nyers) magasságkülönbségét, g_i a hozzá tartozó mért nehézségi értéket és K_P a pont geopotenciális értékét jelenti.

A normálmagasság tehát a mérési eredményekből feltevésmentesen, tetszőleges pontossággal számítható. Gyakorlati célra, pl. országos magassági alapponthálózat számára, jól megfelelő magassági mérőszám. Közel áll az ortométeres magasság értékéhez, eltérése ettől, hazai viszonylatban 0,1 m-nél, egész földi viszonylatban 2 m-nél kisebb. A gyakorlatban széles körben elterjedt, az európai országok, közöttük Magyarország hivatalosan használt magassági mérőszáma.

Egyetlen hátránya, hogy a valóságban azonos szintfelületen fekvő pontok normálmagassága csak akkor azonos, ha a pontok azonos szélességi vonalon fekszenek.

534.2. A magassági rendellenesség

A földfelszíni P pont ellipszoid feletti magasságának másik része a P‴ P távolság, a *magassági rendellenesség*. Mivel a normál nehézségi erőtér P‴ ponton átmenő szintfelületének $U_{P'''}$ potenciálértéke megegyezik a P pont W_P valódi potenciáljával (mert így választottuk ki), ezért a feladat most is – mint a geoid meghatározásakor – azonos potenciálértékű valódi és normál szintfelület egymástól mért távolságának meghatározása a földfelszínen nyert mérési eredményekből.

A feladat lényegében a *potenciálelmélet 3. peremérték-feladatának megoldása a földfelszínre.* A megoldásnak több útja ismeretes.

Az egyik megoldási utat követve a földfelszínt a telluroiddal közelítjük, és lineáris integrálegyenletet állítunk fel a T potenciálzavar meghatározására.

Ennek megoldása sor alakjában kapható, a következő feltételek mellett

- a vonatkoztatási (szint)ellipszoid U_0 és a geoid W_0 valódi potenciálértéke számszerűen azonos,
- a normál nehézségi erőtér forrását képező tömeg megegyezik a Föld M össztömegével,
- a koordináta-rendszerünk kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába helyezzük és
- egyes lépésekben az ellipszoidot gömbbel helyettesítjük.

Az így nyert T potenciálzavart *Bruns* képletébe helyettesítve, jutunk a magassági rendellenességre. A sor első két tagjára korlátozódva *Mologyenszkij* megoldása a telluroid felszínére kiterjesztett felületi integrál

$$N^n = N^n(\Delta g_i,\ G1_i,\ \tilde{\gamma}), \qquad (5342.1)$$

ahol

$$\Delta g_i = (g_P - \gamma_{P'''})_i \qquad (5342.2)$$

a *földfelszíni nehézségi rendellenesség*, és

$$G1_i = G1((H_i^n - H_P^n), \Delta g_i) \qquad (5342.3)$$

az (5342.2)-nek a földfelszíni *domborzat hatását* kifejező első fokú javítása, ami gyakorlatilag csak magasabb hegyvidéken ér el figyelembe veendő mértéket.

Megjegyezzük, hogy az (5332.1) határesetként a geoidra vonatkozó megoldást is tartalmazza, ha ebbe a

$$\Delta g = g_{P'} - \gamma_{P''}$$

geoidi nehézségi rendellenességet és a P pont és a felszín *i* futópontja közötti magasságkülönbségre

$$H_i^n - H_P^n = 0$$

értéket írunk (mivel a geoidon fekvő pontok között magasságkülönbség nincs).

(Az (5342.1)-ben előírt felületi integrál alakjával a Fizikai geodézia tantárgyban fognak megismerkedni.)

Ha a terepszinti P pontok normál függővonalára a vonatkoztatási ellipszoidtól először a magassági rendellenességet mérjük fel, (vagy ha a P pontokból lefelé a normálmagasságot mérjük vissza,) akkor olyan P'''' pontokra jutunk, amelyeknek összessége a *kvázigeoidot* alkotja. Ennek az ellipszoidtól mért távolsága olyan mértékben különbözik a geoid-ellipszoid távolságtól mint a normálmagasság az ortométerestől (ugyanis a P tereppontnak az ellipszoid feletti *h* magassága, függetlenül a meghatározás módjától, ugyanannyi).

A megoldás elvi előnye, hogy egyrészt elkerüli a földfelszíni mért *g* értékek geoidra átszámítását, másrészt lehetőséget ad a domborzat hatásának figyelembevételére.

534.3. A földfelszíni függővonal-elhajlás

A csillagászati szintezés (5211.1) alapösszefüggéséből látható, hogy a geoid-ellipszoid távolság megváltozása a függővonal-elhajlás vonalintegrálja. Ennek megfordításával kapjuk, hogy a függővonal-elhajlás összetevők pedig, a geoid-ellipszoid távolságok meridián- illetve erre merőleges irányú ívhossz szerinti differenciálásával származtathatók. Ennek a kapcsolatnak az alapján az (5342.1) megfelelő irányú differenciálásával kaphatjuk a *földfelszíni függővonal-elhajlás* kiszámítására alkalmas

$$\xi^M = \xi\left(\Delta g_i, \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial H}\right)_i, H_i - H_P\right) \quad \text{és} \quad \eta^M = \eta\left(\Delta g_i, \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial H}\right)_i, H_i - H_P\right) \qquad (5343.1)$$

(felületi integrál) összefüggést.

Ez az összefüggés is – szükség esetén – lehetővé teszi a domborzat hatásának figyelembe vételét. (Határesetként tartalmazza a geoidi függővonal-elhajlás kiszámítására szolgáló ún. *Vening Meinesz*-féle képletet is, amelyet a Fizikai geodézia tantárgy tárgyal.)

*

A peremérték-feladat megoldása a fizikai földfelszínre végül is olyan helymeghatározási lehetőséget nyújt, amely a φ, λ, h ellipszoidi koordináta-hármas feltevésmentes meghatározását teszi lehetővé, ténylegesen mért *földfelszíni* mérési eredményekből.

A jelenlegi gyakorlatban a *vízszintes helyzet* (φ és λ) meghatározása tekintetében a megoldás inkább elvi jelentőségű, mert a nehézségi mérések nem egyenletes földfelszíni eloszlása miatt az (5343.1)-ből számított függővonal-elhajlás összetevők megbízhatósága meglehetősen változó a Föld különböző helyein, és nem éri el egyelőre a szükségest. Ezért erre a célra ma már a GPS használata sokkal jobb eredményre vezet.

Ezzel szemben a *normálmagasság* jól meghatározott, feltevésmentes, egyértelmű magassági mérőszám, ami a gyakorlatban széles körben elterjedt.

Így a *magassági rendellenesség* is nagyobb megbízhatósággal nyerhető, a GPS-méréssel meghatározott h ellipszoid feletti magasság és a H^n normálmagasság

$$N^n = h - H^n$$

különbségeként, mint az (5342.1) szerinti meghatározásával. Ezzel a megoldással most a *kvázigeoidnak* az ellipszoidtól mért távolságát kapjuk, pl. szintezett GPS-pontokban.

A mai gyakorlatban találkozunk mind a *geoid*, mind a *kvázigeoid* fogalmával. A kettő a tengereken egybeesik, a szárazföldeken pedig annyira különbözik, mint az ortométeres magasság a normálmagasságtól (<2 m). A két felület pontjait ugyanis úgy értelmezhetjük, hogy a fizikai földfelszínen lévő pontból vagy az *ortométeres* magasságot, vagy a *normálmagasságot* mérjük vissza a pont függővonalán. Első esetben a *geoid,* második esetben a *kvázigeoid* pontjaira jutunk.