3. GEODÉZIAI VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK MEGHATÁROZÁSA

31. A vonatkoztatási ellipszoid

Felsőgeodéziai munkákban a meghatározott földfelszíni, vagy felszínközeli (többnyire az I. rendű alaphálózati) pontok helyzetét általános használatra *ellipszoidi felületi koordinátákkal* [162.1] adjuk meg. Kiszámításukhoz célszerűen választott méretű, alakú, elhelyezésű és tájékozású forgási ellipszoidot, ún. *vonatkoztatási (referencia) ellipszoidot* vezetünk be (amire a koordinátákat vonatkoztatjuk).

Az ellipszoid méretét és alakját elvileg szabadon választhatnánk meg, de gyakorlati célszerűségi okokból őket úgy határozzuk meg, hogy a vonatkoztatási ellipszoidunk *a Föld (elméleti) alakját jól megközelítse*. Ezt a feltételt azért szabjuk magunknak, hogy

- egyrészt a fizikai valóság leképezése az ellipszoidra minél kisebb torzulásokkal járjon,
- másrészt az ellipszoid feletti magasságok viszonylag kis értékek legyenek és így, egyszerű – lineáris – összefüggésekkel legyenek számíthatók.

Magát a forgási ellipszoid alakot, pedig az indokolja, hogy a mellett, hogy méretének és alakjának megfelelő megválasztásával a Föld alakjához igen közel áll, viszonylag egyszerűen kezelhető matematikai felület, amelyen a felületi koordináták kiszámítása nem túlzottan nehézkes.

A vonatkoztatási ellipszoid meghatározásakor keressük a forgási ellipszoid a és e^2 paraméterének azt az értékpárját, amellyel az alakzat a megszabott feltételünket lehető legjobban kielégíti. Ha ezt a feladatot pusztán geometriai (szög és távolság jellegű) mérési eredményekre támaszkodva oldjuk meg, akkor beszélünk a vonatkoztatási ellipszoid meghatározásának *geometriai* vagy *csillagászati-geodéziai* (idegen szóval asztrogeodéziai) *módszereiről.* Ezek között klasszikus eljárás a fokmérés módszere, melynek elvét már az ókor egyes természettudósai is alkalmazták.

32. A vonatkoztatási ellipszoid meghatározása geometriai módszerekkel

321. A fokmérés és alkalmazásának eredményei

321.1 A fokmérés elve

Ha valamely görbe felületen megmérjük a felületre merőleges sík által kimetszett rövid felületi ívdarab hosszúságát és meghatározzuk az ívdarab két végpontjához tartozó görbületi sugarak által bezárt középponti szöget, akkor ezekből az adatokból – az ív, a sugár és a középponti szög összefüggésével – kiszámítható a felületi ívdarabnak – és egyidejűleg a felületnek az ívdarab irányába eső – görbületi sugara. Ez a *fokmérés alapelve.*

A fokmérés elvét az ókorban a gömb alakúnak képzelt Föld R sugarának meghatározására használták. Ehhez elegendő volt egyetlen s ívdarab és a hozzátartozó $\Delta\varphi$ középponti szög megmérése, amiből a gömb sugarát ki tudták számítani. (A mérést – gyakorlati okból – meridiánban, vagy közvetlen közelében végezték.)

A XVII. századtól, amikor *Newton* és *Huygens* felismerései alapján a Föld (elméleti) alakját forgási ellipszoidnak tekintették [12.], a feladat a forgási ellipszoid a és b tengelyhosszának, vagy a és e^2 paraméterének meghatározása volt. Ekkor feltételezték, hogy

- a nyugalomban képzelt tengerfelszínek *ugyanazon forgási ellipszoid* egyes felületdarabjai,
- a helyi függőleges irányok *ellipszoidi felületi normálisokkal* azonosak (így a csillagészleléssel meghatározott földrajzi koordinátákat *ellipszoidi földrajzi koordinátáknak* tartották),
- a tengerszintre átszámított ívhosszak *ellipszoidi felületi ívhosszaka*t eredményeznek.

Mivel akkoriban a pólusmozgás fogalmát még nem ismerték, a XIX. század végéig az előbbiekhez hozzájárult még az a hallgatólagos feltételezés is, hogy

- a földtestnek a forgástengelyen elfoglalt helyzete az időben változatlan, és a csillagészleléssel meghatározott földrajzi szélesség értékeket a *forgástengelyre* vonatkoztatták.

A fokmérés módszere az ellipszoid méretének és alakjának meghatározására is alkalmazható, de mivel ez esetben két paramétert kell meghatározni, a fokméréshez tartozó méréseket legalább két helyen kell elvégezni. Mivel a felületi normálisok (görbületi sugarak) által bezárt középponti szöget legkönnyebben (és így legrégebb óta) az ív két végpontjának földrajzi szélesség különbségeként tudták meghatározni, ezért kezdetben csaknem kizárólag **meridián irányú fokmérést** végeztek. Különböző földrajzi szélességű helyeken (az ellipszoid méretéhez viszonyítva elemi hosszúságú) két meridián ívdarabot tűztek ki, melynek megmérték az s_{m1} és s_{m2} hosszúságát, továbbá végpontjaik φ_1 és $\varphi_{1'}$, valamint φ_2 és $\varphi_{2'}$ földrajzi szélességét. Ha az ívdarabok végpontjainak $\Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_{1'}$,ill. $\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_{2'}$ szélességkülönbségét elosztjuk a megfelelő s_{m1} ,ill. s_{m2} ívhosszal, akkor kiszámíthatjuk az ellipszoidnak az egyes, elemi hosszúságúnak tekintett ívdarabokhoz tartozó M_1 illetve M_2 közepes meridián irányú görbületi sugarát. Ez viszont az ellipszoid geometriájából ismert

$$M = M(a, e^2, \varphi)$$

kapcsolatban van az ellipszoid paramétereivel és a földrajzi helyzettel. Így a két ívdarabhoz az $\tilde{M}_1$ és az $\tilde{M}_2$ ismert számértékkel és az ívhosszak $\tilde{\varphi}_1$, ill. $\tilde{\varphi}_2$ ismert közepes szélességével kétismeretlenes egyenletrendszert írhatunk fel, amelyből az a és az e^2 két ismeretlen kiszámítható.

Az ívhosszaknak a meghatározására *Snellius* 1615-ben bevezette a háromszögelés módszerét, amit azóta is kiterjedten alkalmazunk a geodéziai gyakorlatban.

A földrajzi hosszúságkülönbségek mérésének fejlődésével lehetővé vált a **paralelkör irányú fokmérés** is. Ez esetben azonos paralelkörön fekvő két pont között kell megmérni az s_p (paralelkör) ívdarab hosszát, továbbá szükséges a végpontok $\Delta\lambda$ ellipszoidi földrajzi hosszúságkülönbségének és φ ellipszoidi földrajzi szélességének ismerete.

A paralelkör sugarát egyrészt a mérési eredményekből az $s_p/\Delta\lambda$ hányadosként, másrészt az ellipszoid geometriájából ismert $N\cdot\cos\varphi$ összefüggéssel fejezhetjük ki, ahol az N harántgörbületi sugár az

$$N = N(a, e^2, \varphi)$$

kapcsolatban áll az ellipszoid paramétereivel és a földrajzi helyzettel.

A gyakorlati megoldáshoz ismét két ívdarabot kell megmérni φ_1 és φ_2 különböző földrajzi szélességen. Az így felírható két egyenletből az a és e^2 két ismeretlen számítható.

Végül a fokmérés elve harmadik változatban, **általános irányú (vagy ferde ívű) fokmérésként** is hasznosítható. Ez esetben a P_1 és a P_2 tetszőleges helyzetű végpontok közötti $s_{1,2}$ ívhosszat, a végpontok φ_1 és φ_2 ellipszoidi földrajzi szélességét, $\Delta\lambda_{1,2}$ ellipszoidi földrajzi hosszúságkülönbségét, valamint az ív két végérintőjének a helyi meridián irányával bezárt $\alpha_{1,2}$ és $\alpha_{2,1}$ ellipszoidi azimútját kell meghatározni.

Ily módon ismertté válik a PP_1P_2 ellipszoidi pólusháromszögnek 6 adata. Mivel ennek geometriai meghatározásához 3 adat és az ellipszoid megadásához további 2 adat, összesen tehát 5 adat szükséges, ezért még fölös mérésünk is van. Így a mérési eredményekből megfelelő geometriai összefüggésekkel az ellipszoid keresett két meghatározó adata kiszámítható.

A gyakorlatban – az elkerülhetetlen mérési hibák hatásának csökkentése érdekében – általában a szükségesnél több mennyiség mérésével határozzuk meg a keresett ismeretleneket, ha az elérhető szélső pontosságra törekszünk. A fokmérés esetében is, a gyakorlatban lehetőleg hosszabb ívdarabokat mértek, amelyeket közbenső pontokkal több szakaszra osztottak. Így a keresett ismeretlenek meghatározása szempontjából ún. fölös méréseik is voltak. Ilyenkor az ismeretlenek legmegbízhatóbb értékét valamilyen négyzetösszeg minimumfeltétel bevezetésével a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával számították ki.

Feladat:

- Mutassuk be vázlaton a meridián, a paralelkör és az általános irányú fokmérés elvét.

321.2. Nevezetes fokmérések

A nevezetesebb *meridián-fokmérések:*

1. Az angol-francia-spanyol ív Saxavordtól (+60°50') Laghouatig (+33°48') 27°2' amplitúdóval kb. 3000 km hosszban. Ennek a fokmérésnek különös nevezetessége a Földközi-tengert Spanyolország és Észak-Afrika között áthidaló néhány háromszög, amelyben 270 ÷ 280 km hosszú oldalak fordulnak elő, s így a háromszögek szögeinek megmérése annak idején - a XIX. század utolsó évtizedeiben - rendkívüli nehézségeket okozott. Érdekességként megemlítjük, hogy ennek a meridiánívnek Dunkerque és Barcelona közötti középső szakasza azonos a méterfokmérés ívével, amelynek 1792-1808 között végrehajtott mérése alapján vezette le *Méchain* és *Dalambre* a méter hosszát.

2. A *Struve-Tanner*-féle orosz-skandináv ív a Fekete-tengertől az Északi-Jeges-tengerig (+45°20' és +70°40' között) 25°20' amplitúdóval 2800 km hosszban.

3. Az afrikai ív a 30°-os meridián mentén a Fokvárostól Kairóig 61° amplitúdóval (6750 km), amelynek középső kb. 18° hosszúságú ívét csak 1953-ban mérték meg.

4. Az indiai főív a 73°-os meridián mentén 21° amplitúdóval.

5. Az indiai 2. ív a 75°-os meridián mentén 19° amplitúdóval.

6. A 98° menti meridiánív az USA-ban, illetőleg Mexikóban, amelynek kész szakasza egy 23°-os és egy 6°-os ív.

7. A kelet-európai ív az Északi-Jeges-tengertől Kairóig, amely csatlakozik az afrikai ívhez. Nagy része, amely átszeli Norvégiát, Finnországot, Oroszországot, Ukrajnát, a második világháborúig elkészült. A Földközi-tenger áthidalását Krétán át azonban csak későbben oldották meg a SHORAN mérési technika (radar) eszközeivel.

A nevezetesebb *paralelkör menti fokmérések:*

1. A francia közép paralelív csaknem 15° amplitúdóval a 31°-os paralelkör mentén egész az Adriai-tengerig.

2. A párizsi paralelív Bresttől Münchenig.

3. Az 52°-os paralelív~ 69° amplitúdóval, Írországtól az Urálig.

4. Az észak-afrikai ív.

5. Az indiai paralelívek a 13, 18 és 24°-os paralelkör mentén.

6. Négy amerikai paralelív (32, 39, 42, és 46° mentén) 60° amplitúdóval.

7. Az amerikai ferde ív a keleti part mentén 23,5° amplitúdóval.

321.3 A fokmérések eredményei

A nevezetesebb fokmérések eredményei közül számszerűen a már említett ún. ***méterfokmérés*** (1792-1798) ellipszoidjának jellemzőit mutatjuk be (itt és egyéb helyeken is a numerikus excentricitás helyett a szemléletesebb *f* geometriai lapultság értéket adjuk meg):

$$a = 6\ 375\ 738{,}7 \text{ m},$$

$$f = 1/334{,}29.$$

Ennek, és más fokméréseknek az eredményei is arra a gyakorlati tapasztalatra vezettek, hogy a kettőnél több ívdarab mérési eredményeinek együttes feldolgozásakor a maradék ellentmondások általában lényegesen nagyobbra adódtak, mint amit a mérések szórása (középhibája) alapján várni lehetett.

A későbbi időkben, amikor már több fokmérés eredményei is rendelkezésre állottak, megkísérelték ezeket együttes kiegyenlítéssel feldolgozni. Erre első példa ***Walbeck*** ellipszoidja (1819), mely 6 fokmérés együttes feldolgozásával jött létre. Ennek jellemzői:

$$a = 6\ 376\ 896 \text{ m},$$

$$f = 1/302{,}78.$$

Bessel, korának legjobb 10 fokméréséből vezette le ellipszoidjának jellemzőit (1837-41):

$$a = 6\ 377\ 397{,}15 \text{ m},$$

$$f = 1/299{,}1528.$$

(Ez volt hosszú ideig a magyarországi felmérések vonatkoztatási ellipszoidja [44.].)

A több fokmérés eredményének együttes feldolgozása arra a sajátos tapasztalatra vezetett, hogy a maradék ellentmondások ahelyett, hogy a mérési eredmények számának növelésével csökkentek volna, még inkább növekedtek, és nem véletlen eloszlást mutattak. Ez a tapasztalat arra a felismerésre vezetett, hogy a helyi függőlegesek nem ellipszoidi normális irányok. Akkor pedig a helyi függőleges irányokra merőleges felület nem ellipszoid, hanem valamilyen más felület. Így jutott el *Gauss* a szintfelületek és a Föld elméleti alakja új fogalmához, amit később *geoidnak* neveztek el (*Listing* 1878).

Földrajzi szélesség meghatározásaink közvetlen mérési eredményei az álláspont helyi függőlegesének, tehát szintfelületi normálisának irányát határozzák meg a térben. Így a maradék ellentmondások, a mérési hibák mellett, a helyi függőleges irányok és az ellipszoidi normálisok iránykülönbségét, vagyis a szintfelületek, (a geoid) és az ellipszoid egymástól eltérő görbületi viszonyait tükrözik.

Így mai ismereteink szerint a <u>*fokmérések eredményeként*</u> egyes (meridián, paralelkör, vagy általános irányú) ívek mentén a szintfelületek (a geoid) alakjához simuló ellipszoid méretét és alakját, azaz *helyi simuló ellipszoidokat* kapunk.

Mivel a geoid görbületi viszonyai meglehetősen változatosak, ezért a simuló ellipszoidok is különböző méretűek és alakúak, attól függően, hogy hol végezték a méréseket. A különböző helyeken simuló ellipszoidok geometriai középpontja sem esett egybe, sem egymással, sem a Föld tömegközéppontjával. Ily módon *fokméréssel gyakorlatilag nem lehet ún. földi (geocentrikus) elhelyezésű ellipszoidot meghatározni.*

A geoid fogalmának bevezetésével az ellipszoid meg is szűnt mint „a Föld elméleti alakja”, de megmaradt egyrészt a geodéziai helymeghatá*rozás vonatkoztatási felületeként,* másrészt a földalak egyik *szabályos megközelítőjeként*. Átvitt értelemben ezért ma is használjuk pl. a „Föld egyenlítői tengelyhossza” és a „Föld lapultsága” fogalmakat, amelyeken a Földet (a geoidot) helyettesítő (közelítő) valamelyik ellipszoid, szabatos értelemben az ún. *közepes földi ellipszoid* [343.3] megfelelő jellemzőjét értjük. (Ennek meghatározása azonban csak fizikai módszerek bevonásával lehetséges, amivel későbben fogunk foglalkozni [34.]) .

Feladatok:

- Hogyan határozzák meg a földrajzi koordináták a helyi függőleges, illetve az ellipszoidi normális térbeli helyzetét?
- Mely esetben kapnánk nulla maradék ellentmondás rendszert?

322. A függővonal-elhajlás fogalma és alapösszefüggései

A helyesen felállított teodolit állótengelye a helyi függőleges (a helyi szintfelületi normális) irányába mutat. Mint a fokmérések tapasztalatai alapján bebizonyosodott, a helyi függőleges irányok, amelyeknek térbeli helyzetét a földrajzi helymeghatározás méréseink eredményei mutatják, az álláspponton átmenő ellipszoidi normális iránnyal néhány (esetleg néhányszor 10) másodpercnyi szöget zárnak be. Ennek a szögnek ξ meridián irányú vetülete a fokmérésekkel kapcsolatban már említett maradék ellentmondás [321.]. Hasonló maradék ellentmondásokra jutunk a paralelkör irányú fokmérés számítása során is (ha fölös számú méréseink vannak). Ezek pedig a helyi függőleges irány és az ellipszoidi normális közötti szög meridiánra merőleges vetületét adják, amit η-val jelölünk.

A két összetevőből előállítható

$$\Theta = (\xi^2+\eta^2)^{½} \tag{322.1}$$

szög tehát a *helyi függőleges és az álláspponton átmenő ellipszoidi normális iránykülönbsége*, amit <u>*függővonal-elhajlásnak*</u> nevezünk. (A függővonal-elhajlásnak ettől kissé eltérő, más értelmezésével is fogunk még találkozni [533.3.].)

Attól függően, hogy a függővonal-elhajlást valamely P földfelszíni pontban, vagy ennek P' geoidi megfelelőjében értelmezzük, megkülönböztetünk *földfelszíni* (*Helmert*-féle), illetve *geoidi* (*Pizetti*-féle) függővonal-elhajlásokat.

Másik megkülönböztetés szerint *relatív* függővonal-elhajlásról beszélünk, ha a vonatkoztatási ellipszoid geometriai középpontja általános helyzetű és *abszolút (geocentrikus)* függővonal-elhajlást mondunk, ha az ellipszoid középpontja a Föld tömegközéppontjával azonos. (Ezt a helyzetet csak fizikai módszerek alkalmazásával lehet elérni.)

A függővonal-elhajlás szögét, pontosabban ennek összetevőit a helyi függőleges, illetve az ellipszoidi normális térbeli helyzetét meghatározó földrajzi koordinátákból és/vagy a szintfelületi és ellipszoidi azimút értékekből számíthatjuk. (Emlékeztetünk arra, hogy mind a szintfelületi, mind az ellipszoidi földrajzi koordinátákat a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása, CIO-BIH, vagy ITRS) *Z* tengelyére, és *XZ* síkjára vonatkoztatjuk [16.].) Ezekből

$$\xi = \Phi - \varphi, \tag{322.2}$$

$$\eta = (\Lambda-\lambda)\cos\varphi, \tag{322.3}$$

$$\eta = (A - \alpha)\,\mathrm{ctg}\varphi. \tag{322.4}$$

A (322.3) és (322.4) egybevetéséből rendezés után az azimútokra vonatkozó Laplace-egyenletre jutunk

$$A - \alpha = (\Lambda - \lambda)\sin\varphi\,, \qquad (322.\ 5)$$

amely valamely irány szintfelületi és ellipszoidi azimútja közötti különbséget mutatja. Ennek fontos szerepe van a geodéziai alaphálózatok számításakor.

A függővonal-elhajlások alapvetően abból származnak, hogy a Föld tömegeloszlásának szabálytalanságai miatt a szintfelületek változatosabb alakú felületek, mint a szabályos forgási ellipszoid alak.

Feladatok:

- Szerkesszünk vázlatot a függővonal-elhajlás földfelszíni és geoidi értelmezésének bemutatására!
- Bizonyítsuk a függővonal-elhajlás összetevőkre felírt (322.2) és (322.3) összefüggés helyességét egységsugarú gömb segítségével.
- Állapítsuk meg, hogy mely esetben lesz valamely irány szintfelületi és ellipszoidi azimútja azonos nagyságú.
- Mi a geometriai értelme a ($\xi = 0$, $\eta \neq 0$); a ($\xi \neq 0$, $\eta = 0$) és a ($\xi = 0$, $\eta = 0$) értékpároknak?
- Mi a geometriai tartalma a nullaértékű függővonal-elhajlásnak?

323. A felületek módszere és alkalmazásának eredményei

Az emberi társadalom fejlődése során a XVIII.-XIX. században a gazdaságilag gyorsabban fejlődő földrészeken megkezdődött az országok területét beborító (nemzeti) geodéziai alaphálózatok kialakítása. Ezeken belül néhányszor 10 km-es átlagos távolságokra alappontokat létesítenek, és megmérik a szomszédos pontok közötti $s_{i,k}$ távolságokat valamint a pontokból kialakított geometriai alakzatok (általában háromszögek) $\beta_{h,i,k}$ belső szögeit. A mérési eredményeket a tengerszint magasságába számítják át, és a hálózatban felírható geometriai feltételek figyelembevételével kiegyenlítik.

A hálózat belső szögeinek és oldalhosszainak mérésén kívül, több (lehetőleg egyenletes területi elosztásban) kijelölt P_i (i = 1, 2,... n) ponton (a csillagászati-geodéziai pontokban) megmérik a Φ_i és Λ_i szintfelületi földrajzi koordinátákat és a pontból kiinduló valamelyik oldal $A_{i,k}$ szintfelületi azimútját. Ezeket a mérési eredményeket – a szintfelületek között vetítővonalként a függővonalat használva – a földfelszíni pontok *geoidi megfelelőjébe* számítják át.

A felsorolt mérési eredmények szükségesek és elégségesek ahhoz, hogy belőlük a szóban lévő hálózat területén a *geoid ezen felületdarabjához simuló $E(a, e^2)$ forgási ellipszoidnak* a jellemzőit számszerűen meghatározzuk. Az erre a célra szolgáló számítási eljárás a *felületek módszere*, vagy más néven a *csillagászati-geodéziai függővonal-elhajlás kiegyenlítés*. Ennek a fejlődés különböző fokát képviselő két változatát különböztetjük meg.

323.1. A *Helmert* (*Hayford*)-féle (transzlatív) függővonal-elhajlás kiegyenlítés

Ez az eljárás lényegében a fokmérés továbbfejlesztése (általánosítása) úgy, hogy nem csupán egyes meridián, ill. paralelkör *ívdarabokhoz*, hanem a geoid egyes *felületdarabjaihoz* számítunk simuló ellipszoidot.

A két felület simulásának geometriai feltételeként a két felület normálisai által bezárt szögek (azaz *a függővonal-elhajlások*) *négyzetösszegének minimumát* választjuk. (Ez vezet ugyanis a legegyszerűbb matematikai összefüggésekre a mérési eredményekkel kapcsolatban, és ugyanakkor geometriai tartalmában megegyezik azzal a feltétellel, mintha a két felület merőleges távolságainak nulla összegét, vagy négyzetösszegének minimumát írnánk elő.)

A *geoidi normálisok* térbeli helyzetét egyes hálózati pontokban a földfelszínen mért és a geoidra átszámított Φ_i és Λ_i szintfelületi földrajzi koordináták segítségével adjuk meg.

Az *ellipszoidi felületi normálisok* helyzetét ugyanezen pontok ellipszoidi földrajzi koordinátái mutatják. Ez utóbbiak kiszámításához fel kell venni az (a) és (e^2) előzetes értékekkel jellemzett ellipszoidot *előzetes vonatkoztatási felület* céljára. Fel kell venni továbbá a hálózat egyik csillagászati-geodéziai pontjának (φ_1), (λ_1) *előzetes ellipszoidi koordinátáit* és végül az ebből kiinduló egyik oldal (amelyre szintfelületi azimútot mértek) (α_1) *előzetes ellipszoidi azimútját*. Ezen felvett 5 kiinduló adat és a hálózatban végzett szög- és távolságmérések kiegyenlített eredményeinek függvényében számíthatók a hálózat valamennyi csillagászati geodéziai pontjának (φ_i) és (λ_i) *előzetes ellipszoidi koordinátái*. Ezek adják meg az előzetesen felvett ellipszoidnak a hálózati pontokon átmenő felületi normálisai térbeli helyzetét. E mellett a hálózati pontok előzetes ellipszoidi koordinátáiból számítható az egyes hálózati oldalak ($\alpha_{i,k}$) előzetes ellipszoidi azimútja is, amely szintén a felületi normálishoz kapcsolódó geometriai mennyiség.

Az egymáshoz illesztendő két felület, a geoid és az ellipszoid felületi normálisai által bezárt szögeket, a (geoidi) függővonal-elhajlásokat a geoidi pontok szintfelületi és ellipszoidi földrajzi koordinátáinak összevetéséből (illetve az η összetevőt még az azimútok alapján is) lehet számítani a (322.2), (322.3) és (322.4) összefüggéssel.

Nyilvánvaló, hogy a függővonal-elhajlások (a felületi normálisok által bezárt szögek) ily módon kiszámított értéksorozata még nem fogja a simulás feltételeként választott négyzetösszeg-minimum feltételt kielégíteni. Ahhoz, hogy ezt elérhessük, a felvett 5 kiinduló mennyiségnek $d\varphi_1$, $d\lambda_1$, $d\alpha_1$, da és de^2 *kis változásait* kell megengednünk, és keressük ezen kis változásoknak (közöttük az ellipszoidi jellemzők változásának) azt az értéksorát, amellyel az előzetes értékrendszert megváltoztatva a nyert ellipszoidi koordinátákkal számított függővonal-elhajlások négyzetösszege már a legkisebb.

Mivel a feladat megoldását négyzetösszeg-minimum kereséshez kötöttük, előnyösen alkalmazható itt is a legkisebb négyzetek módszerének a kiegyenlítő számításokból megismert formanyelve. (Jóllehet, itt tudjuk, hogy a függővonal-elhajlások nem tekinthetők valószínűségi változónak, mert nagyon is szabályos területi eloszlást mutatnak. Így tulajdonképpen nem helyes kiegyenlítésről beszélni, de a gyakorlatban ez a számítási eljárás mégis függővonal-elhajlás kiegyenlítés néven vált ismertté.)

A közvetítő egyenleteket a függővonal-elhajlás már említett (322.2), (322.3) és (322.4) összefüggései szolgáltatják, azzal a különbséggel, hogy a φ_i, λ_i és $\alpha_{i,k}$ *végle-*

ges ellipszoidi földrajzi koordinátákat és ellipszoidi azimútokat a (φ_i), (λ_i), ($\alpha_{i,k}$) *előzetes* ellipszoidi koordináták és azimútok és ezek egyelőre ismeretlen $d\varphi_i$, $d\lambda_i$, $d\alpha_{i,k}$ változásainak összegeként írjuk be.

Kis átalakítással és a $d\varphi_i$, $d\lambda_i$, $d\alpha_{i,k}$ változásokat az 5 kiinduló mennyiség szerinti parciális differenciálok összegéből alkotott teljes differenciállal helyettesítve, kapjuk a javítási egyenleteket a

$$\underset{(\max 3n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(\max 3n,5)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(5,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(\max.\ 3n,1)}{\mathbf{l}} \qquad (323.1)$$

alakban. Ebben

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \dfrac{\eta_i}{\cos\varphi_i} \\ \dfrac{\mu_i}{\mathrm{ctg}\,\varphi_i} \end{bmatrix} \qquad (323.2)$$

a kiegyenlítő számítás formanyelvén a *javítások vektora*, ahol az $\eta_i/\cos\varphi_i$-ket a földrajzi hosszúságból és az $\eta_i/\mathrm{ctg}\varphi_i$-ket az azimútokból számítjuk. A javítási egyenletek száma legfeljebb $3n$, ahol n a hálózatban mért csillagászati-geodéziai pontok száma (és mindegyikük *Laplace*-pont, azaz mindegyikükön mértek szintfelületi szélességet, hosszúságot és azimútot is).

A *tisztatagok* **l** vektorának elemeit a mért szintfelületi és a számított előzetes ellipszoidi földrajzi koordináták, valamint azimútok különbsége adja.

Az **A** *együtthatómátrix* elemeit a φ, λ ellipszoidi földrajzi szélesség és hosszúság, valamint az α ellipszoidi azimút kiszámítására szolgáló függvényeknek az 5 kiinduló mennyiség szerinti parciális első differenciálhányadosai adják az *i.*-ik mérési eredmény helyén, negatív előjellel. (Itt jegyezzük meg, hogy ebben a számítási eljárásban sem a szintfelületi földrajzi koordinátákhoz és azimútokhoz, sem pedig a hálózati szög- és távolságmérésekhez nem rendelünk változást, azaz ezeket gyakorlatilag hibátlannak tekintjük.)

Az ismeretlenek

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ d\lambda_1 \\ d\alpha_1 \\ da \\ de^2 \end{bmatrix} \qquad (323.3)$$

vektora az 5 kiinduló adat kis változásait tartalmazza, melyekkel a kiinduló adatok előzetesen felvett értékét meg kell változtatni ahhoz, hogy az ellipszoid a mérési helyeken a geoidhoz a legjobban simuljon.

Az ismeretlen vektor elemeit a (323.1) szerinti, legfeljebb $3n$ számú javítási egyenletből a

$$\sum\left(\xi^2 + \eta^2\right) = \min. \qquad (331.4)$$

feltétel mellett az

$$\mathbf{x} = -\,(\mathbf{A^*A})^{-1}\ \mathbf{A^*l} \qquad (331.5)$$

alakból számíthatjuk, ha a javítási egyenletek száma nagyobb 5-nél.

Az ismeretlen vektor elemeinek kiszámítása után végeredményként kapjuk egyrészt annak az ellipszoidnak az

$$a = (a) + da \quad \text{és} \quad e^2 = (e^2) + de^2 \qquad (323.6)$$

jellemzőit, amelynek a felületi normálisai úgy illeszkednek a mérési helyeken a geoidi normálisok közé, hogy az általuk bezárt maradék szögek (a függővonal-elhajlások) négyzetösszege minimumot adjon, azaz a két felület egymáshoz legjobban simuljon.

A végeredmények másik csoportja a hálózat P_1 kiválasztott pontjának a (323.6) adatokkal jellemzett simuló méretű és alakú ellipszoidra vonatkozó

$$\varphi_1 = (\varphi_1) + d\varphi_1 \quad \text{és} \quad \lambda_1 = (\lambda_1) + d\lambda_1 \qquad (323.7)$$

végleges ellipszoidi koordinátáit, valamint az ebből a pontból kiinduló kiválasztott hálózati oldal

$$\alpha_1 = (\alpha_1) + d\alpha_1 \qquad (323.8)$$

végleges ellipszoidi azimútját adja.

Ez utóbbi eredmények a kapott (323.6) méretű és alakú ellipszoidnak a geoidhoz viszonyított simuló *elhelyezését és tájékozását* [42.] adják meg.

Ez a számítási eljárás hallgatólagosan feltételezi azt, hogy a hálózat kiválasztott P_1 pontjában a geoid és az ellipszoid egymáshoz viszonyított merőleges távolsága $N_1 \equiv 0$, és mivel ehhez változást sem rendel ($dN_1 \equiv 0$), a simuló elhelyezés után is az marad. Geometriailag ez azt a kötöttséget jelenti, hogy a (323.6) méretű és alakú ellipszoidot a simuló helyzet elérése érdekében *csak a felület irányában* (két dimenzióban) mozgathatjuk (tolhatjuk el) úgy, hogy *minden helyzetében a P_1 pont geoidi megfelelőjén átmenjen.* Ezért ezt a megoldást két dimenziós függővonal-elhajlás kiegyenlítésnek is nevezik. Erre utal a címben szereplő „transzlatív” jelző is (transzláció = eltolás).

323.2. A Vening Meinesz-féle (projektív) függővonal-elhajlás kiegyenlítés

Az előbbi megoldásnál tökéletesebb simuló helyzetet érhetünk el, ha eggyel több szabadságfokot megengedve, az ellipszoidnak a geoidhoz viszonyított három dimenziós mozgatását tesszük lehetővé. A harmadik irány ez esetben az ellipszoid felületére merőleges. Ilyen irányú mozgatás azzal érhető el matematikailag, hogy a kezdetben felvett előzetes (N_1) geoid-ellipszoid távolságnak (ami nulla is lehet) simuló helyzet elérése érdekében dN_1 változását engedjük meg, és ezt is felvesszük a kiszámítandó ismeretlenek közé. Ily módon az ismeretlenek **x** vektora a (323.3)-hoz viszonyítva, bővül a dN_1 hatodik sorral.

Mivel a geoid-ellipszoid távolságok változása az ellipszoidi földrajzi koordináták és az azimút értékét (és velük együtt a függővonal-elhajlás összetevőket) is befolyásolja, ezért az **A** együttható mátrix is bővül az ellipszoidi szélesség, hosszúság és azimút függvénynek N szerinti parciális differenciálhányadosaiból álló hatodik oszloppal.

Végeredményként itt is megkapjuk a simuló ellipszoid méretét és alakját, továbbá a simuló helyzetben az ellipszoidnak és a geoidnak egymáshoz viszonyított elhelyezését megadó φ_1, λ_1 és $N_1 = (N_1) + dN_1$ értékhármast, valamint az ellipszoid tájékozását jellemző kiinduló azimútot.

323.3. A felületek módszerének eredményei

A felületek módszerét eredményesen alkalmazta ***Hayford*** (1909-1912) az Észak-Amerikai Egyesült Államok területén létesített csillagászati-geodéziai hálózat eredményeinek alapján simuló ellipszoid meghatározására.

Szándéka az volt, hogy ellipszoidja az egész Föld alakját jól képviselje. Így, ennek érdekében a mérés útján levezetett függővonal-elhajlásokat *izosztatikus* javítással látta el. (Az izosztázia elvével a Geofizika tantárgyban ismerkedtek meg.) Ez azt jelenti, hogy a mérési pontokra kiszámította a látható és az izosztázia modellje alapján őket kiegyenlítő tömegek által okozott függővonal-elhajlás értékeket, és ez utóbbiakat a mért értékekből levonta. Feltételezése szerint az így megmaradó (izosztatikusan javított) függővonal-elhajlások már mentesek a helyi hatásoktól, és az egész Föld tömegeloszlását tükrözik. Így, az ezekkel számított simuló ellipszoid általánosan jól használható lesz.

Eredményként

$$a = 6\ 378\ 388 \text{ m},$$

$$f = 1/297$$

fél nagytengely hosszúságot és lapultságot kapott, A velük jellemzett ellipszoidot a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) 1924-ben „*Nemzetközi ellipszoid"* néven elfogadta, és a tagországoknak használatra ajánlotta. Számos ország még ma is vonatkoztatási ellipszoidként használja.

Mai ismereteink szerint azonban *Hayford* feltételezése az izosztatikus javítás hatását illetően nem váltotta be a hozzá fűzött reményt, mert mind a méret, mind a lapultság kissé nagynak sikerült.

Ugyancsak a felületek módszerének alkalmazásával vezette le ***Kraszovszkij*** (1942) ellipszoidjának jellemzőit az akkori Szovjetunió, Európa és az Észak-Amerikai Egyesült Államok csillagászati-geodéziai hálózatára támaszkodva. Eredményként

$$a = 6\ 378\ 245 \text{ m},$$

$$f = 1/298{,}3$$

ellipszoidi jellemzőket kapott. Ezt az ellipszoidot vezették be a Szovjetunió és a 2. világháború utáni ún. európai szocialista országok (közöttük Magyarország) közös nemzetközi vonatkoztatási felületként. Mai ismereteink szerint ennek fél nagytengelye még mindig mintegy 100 m-rel hosszabb lett, míg a lapultsága már gyakorlatilag megegyezik a más módszerekkel meghatározott későbbi lapultság értékekkel.

Végeredményben a felületek módszere is *helyi simuló ellipszoidokat* szolgáltat, amelyek a simulás feltételét a meghatározásukhoz használt csillagászati-geodéziai *hálózat területén* elégítik ki. A fokméréshez viszonyítva mégis fejlettebb módszer, mert az ellipszoid simítását a geoidhoz nem csak ívdarabok, hanem *felületdarabok* mentén végezzük el. (Különleges esetként azonban magába foglalja a fokmérést is, amikor a felületdarab vonaldarabbá szűkül össze.) Az egész Föld geoidjához simuló ellipszoid méretét és alakját azonban így sem lehet meghatározni, hiszen a földfelszínnek csak alig több mint ¼ része szárazföld, ahol a szükséges méréseket elvileg el tudjuk végezni. (Amint a tapasztalat mutatja, ezen még a függővonal-elhajlások izosztatikus javítása sem segít kellő mértékben.)

Az *egész geoidhoz simuló* ellipszoid jellemzőit tehát az eddig megismert *geometriai módszerek egyikével sem lehet meghatározni.* Mivel a gyakorlat számára erre mégis szükség van, kifejlődtek a *fizikai geodézia* módszerei is, amelyek segítségével ez a feladat is megoldhatóvá vált. A tisztán geometriai és a fizikai módszerek között átmenetet képez az a megoldás, amely mesterséges holdak észleléseit felhasználva, *geometriai úton* határozza meg az egész geoidhoz simuló ellipszoid méretét és alakját.

Feladatok:

- Hasonlítsuk össze a fokmérésnek és a felületek módszerének eljárását. Miben hasonlóak, és miben különböznek egymástól?
- Írjuk fel a felületek módszerének számításában szereplő **A** együttható mátrix elemeit mindkét féle megoldás esetére.
- Miért nem lehet az egész Földhöz egyetlen simuló ellipszoidot számítani a felületek módszerével?

324. Az ellipszoid-méretek meghatározása a szatellitageodézia geometriai módszerével

A mesterséges holdak geodéziai észlelésével az utóbbi évtizedekben valamennyi földrészre kiterjedő, összefüggő *világhálózatok* létesültek. Ezek lehetőséget adnak a geoidhoz egész földi viszonylatban jól simuló, a geoidot jól megközelítő ellipszoid a, e^2 jellemzőinek geometriai meghatározására.

Ismert a világhálózat pontjainak szatellitageodéziai módszerrel meghatározott **r** helyvektora, amiből valamilyen (tetszőleges) előzetes E[(a), (e^2)] ellipszoid felvételével számíthatók a pont (φ), (λ), (h) *előzetes ellipszoidi koordinátái.* Ha a szatellitageodéziai világhálózat n számú pontjának szintezéssel meghatározzuk a *geoid (tengerszint) feletti H_i magasságát is* (i = 1, 2,…n), akkor a kétféle magassági mérőszám különbségeként számíthatjuk az egyes pontokban a geoid és a felvett ellipszoid (N_i) függőleges távolságát. Ebben a különbségben H_i a természetben mért, valóságos méret, míg (h_i) a választott ellipszoid paramétereitől függő (képzeletbeli) érték.

Keressük az ellipszoidi jellemzőknek azt a da, de^2 megváltozását, amelyet a felvett (a), és (e^2) előzetes értékhez hozzáadva, olyan E[(a) + (da), (e^2) + de^2] méretű és alakú ellipszoidot kapunk, amely a $\sum N_i = 0$, vagy a $\sum N_i^2$ = minimum feltétellel a legjobban simul a geoidhoz. Bizonyítható, hogy mindkét feltétel ugyanarra az eredményre vezet, de válasszuk az utóbbit, mert akkor a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazhatjuk.

A szintezéssel is meghatározott magasságú szatellitageodéziai világhálózati pontok mindegyikére felírható az

$$N_i = (h_i) - H_i + \left(\frac{\partial h}{\partial a}\right)_i da + \left(\frac{\partial h}{\partial e^2}\right)_i de^2 \qquad (324.1)$$

alakú „javítási egyenlet”. Az n számú egyenletből álló egyenletrendszert a választott minimum-feltétellel megoldva, kapjuk az ismeretlenek **x** vektorának da, de^2 elemeit.

Végeredményként a szintezett világhálózati pontokban a *geoidhoz simuló ellipszoid* jellemzői

$$a = (a) + da \quad \text{és} \quad e^2 = (e^2) + de^2.$$

*

Mivel a geoid a földi nehézségi erőtér potenciáljának szintfelülete, a geoidhoz simuló ellipszoid jellemzőinek meghatározására további olyan módszereink is vannak, amelyek a feladat megoldásakor a nehézségi erőtérrel kapcsolatos *fizikai mennyiségek* mért értékeire is támaszkodnak. A felsőgeodéziának a fizikai mennyiségek mérési eredményeinek feldolgozásával (hasznosításával) foglalkozó részét *fizikai geodéziának* nevezzük.

33. A fizikai geodézia matematikai és fizikai alapjai

A történelmi fejlődés során – mint láttuk – korábban a geodéziának a geometriai (szög és távolság) jellegű eredményeket szolgáltató mérési műveletei alakultak ki. Ezek azonban a vonatkoztatási ellipszoid meghatározásában csak korlátozott lehetőségeket tudnak biztosítani. Segítségükkel csak helyi simuló ellipszoidok határozhatók meg a geoidhoz. Az egész Föld elméleti alakját közelítő, geocentrikus elhelyezésű vonatkoztatási felület alakjának és méretének meghatározásához a nehézségi erőtérre vonatkozó fizikai jellegű mérések eredményei segítenek hozzá. Az alkalmazható módszerek tárgyalása előtt célszerű feleleveníteni, kiegészíteni és összefoglalni az ehhez szükséges matematikai és fizikai alapokat.

Mivel a fizikai geodézia módszerei a nehézségi erőtér mérésén és matematikai leírásán alapulnak, első sorban az ehhez szükséges különleges matematikai ismereteket foglaljuk össze a geodéziai hasznosításhoz szükséges mélységig.

331. A gömbfüggvények geodéziai alkalmazása

A földi nehézségi erőtér $W = W(\mathbf{r}) = W(x,y,z)$ potenciálfüggvényét a (141.5) alakban állítottuk elő. Ebben a forgási centrifugális erőtér V_F potenciálját kifejező tag kiszámítása a hely és a forgási szögsebesség ismeretében nem okoz nehézséget. Ha azonban a V vonzási potenciált kifejező tagot számszerűen is meg akarjuk határozni, akkor a benne előirt integrálás végrehajtása áthidalhatatlan nehézségekbe ütközik (nem ismerjük sem a Föld belső tömegeloszlását, sem a Föld fizikai alakját, ami egyébként sem matematikai felület). Ezért a V tömegvonzási potenciál leírására alkalmasabb függvényalakot keresünk, amelyből ez ténylegesen kiszámítható lesz.

Vizsgálatunkat korlátozzuk a vonzó *földtömegen kívüli térre*.

A V potenciálfüggvényről tudjuk, hogy gradiens vektora (definíció szerint) éppen a vonzó erőhatást adja. A tömegvonzási erőtérről pedig tudjuk, hogy a forrásmentes külső térben divergenciája nulla értékű. Ezzel a megfontolással jutottunk a

$$\operatorname{div}\mathbf{grad}\ V = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (331.1)$$

Laplace-egyenletre, ahol

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (331.2)$$

a *Laplace*-féle differenciáloperátor [131.].

Ha a V vonzási potenciálfüggvény alakját ismeretlennek tekintjük, akkor a (331.1) *Laplace*-egyenlet a másodrendű, lineáris, állandó együtthatójú elliptikus differenciálegyenletek osztályába tartozó meghatározó egyenlet V-re, melynek megoldásaként számíthatjuk ki a V potenciálfüggvényt.

Ehhez a számításhoz célszerűségi okokból az r,ϑ,λ térbeli poláris, azaz más szóval *gömbi koordinátákra* térünk át, és a potenciálfüggvényt is a gömbi koordináták $V = V(\mathbf{r}) = \mathrm{V}(r,\vartheta,\lambda)$ függvényeként, azaz *gömbfüggvény alakban* keressük.

331.1. A felületi és a térbeli gömbfüggvények

A célszerűségi okokból bevezetett $r,\vartheta,\ \lambda$ gömbi (térbeli poláris) koordinátákba átírva a (331.1) *Laplace-egyenlet*et, a

$$\Delta V = \quad r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}+ctg\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}=0 \qquad (3311.1)$$

alakú parciális másodrendű differenciálegyenletre jutunk. Ennek megoldásaként keressük tehát a $V = V(\mathbf{r}) = V(r,\vartheta,\ \lambda,)$ potenciálfüggvényt.

A változók szétválasztásának módszere szerint írjuk fel a keresett V függvényt a

$$V(r,\vartheta,\ \lambda) = f(r)\cdot Y(\vartheta,\ \lambda) \qquad (3311.2)$$

alakban és helyettesítsük ezt a (3311.1)-be. Ezzel a (3311.1) parciális differenciálegyenlet megoldását közönséges differenciálegyenletek megoldására vezetjük vissza. Így $f(r)$-re *Euler* típusú differenciálegyenletet kapunk, amelynek egymástól lineárisan független két megoldása

$$f_1(r) = r^n \quad \text{és} \quad f_2(r) = r^{-(n+l)}\,. \qquad (3311.3)$$

Ezekkel pedig a keresett potenciálfüggvény a

$$V_1(r,\vartheta,\lambda) = r^n\, Y_n(\vartheta,\lambda)$$

és (3311.4)

$$V_2(r,\vartheta,\lambda) = \frac{Y_n(\vartheta,\lambda)}{r^{n+1}}$$

alakba írható, ahol n = 0, 1, 2... nem negatív egész számok.

A ϑ,λ gömbi koordináták egyelőre ismeretlen alakú Y függvényét *felületi gömbfüggvénynek* (vagy *gömbfelületi függvénynek*) nevezik, míg a V függvény (3311.4) alakjának jobb oldalán álló függvényalakokat *térbeli gömbfüggvénynek* mondják.

Mivel lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldásainak összege is megoldás, írhatjuk általánosságban, hogy

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\vartheta,\lambda) \quad \text{és} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta,\lambda)}{r^{n+1}} \tag{3311.5}$$

A (3311.1) *Laplace-egyenlet* megoldása tehát első alakban a (3311.5) szerinti két *térbeli gömbfüggvény sor*. Közülük a külső térre a jobboldali alak vonatkozik, így a továbbiakban csak ezt fogjuk használni.

Keressük a továbbiakban az Y felületi gömbfüggvények alakját.

A (3311.1) *Laplace*-egyenletnek, mint másodrendű differenciálegyenletnek a további megoldása során az

$$Y(\vartheta,\lambda) = g\,(\vartheta)\cdot h(\lambda) \tag{3311.6}$$

újabb helyettesítéssel és a változók szétválasztásával további két közönséges differenciálegyenletre jutunk.

Ezek egyikének megoldásait

$$h_1(\lambda) = \cos m\lambda \quad \text{és} \quad h_2(\lambda) = \sin m\lambda \tag{3311.7}$$

alakban kapjuk.

A másik közönséges differenciálegyenlet *Legendre* típusú egyenlet, amelynek megoldásai a

$$g(\vartheta) = P_{n,m}(\cos\vartheta) = P_{n,m}(t) \tag{3311.8}$$

n-ed fokú, *m*-ed rendű *Legendre-függvények*, amelyeket általában a

$$P_{n,m}(t) = \frac{1}{2^n n!}\,(1-t^2)^{m/2}\,\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}\,(t^2-1)^n, \tag{3311.9}$$

ahol

$$n = 0,1,2,...; \quad m = 0,1,2,...n$$

képletből számíthatjuk. Itt a rövidség kedvéért alkalmaztuk a $\cos\vartheta = t$ jelölést. (Emlékeztetünk arra, hogy 0! = 1.)

A (3311.7) és a (3311.8) megoldást a (3311.6)-ba helyettesítve az *n-ed fokú felületi gömbfüggvényekre* az

$$Y_n(\vartheta,\lambda) = P_{n,m}(\cos\vartheta)\cos m\lambda$$

és (3311.10)

$$Y_n(\vartheta,\lambda = P_{n,m}(\cos\vartheta)\sin m\lambda$$

alakokat kapjuk.

Általános megoldásként ezek összes lineáris kombinációjának összege

$$Y(\vartheta,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} \left[c_{n,m}\, P_{n,m}(\cos\vartheta) \cos m\lambda + s_{n,m}\, P_{n,m}(\cos\vartheta) \sin m\lambda\right], \qquad (3311.11)$$

ahol $c_{n,m}$ és $s_{n,m}$ tetszőleges állandók.

Behelyettesítve az n-ed fokú felületi gömbfüggvények (3311.11) általános alakját a (3311.5)-be, kapjuk a *V* potenciálfüggvényt *térbeli gömbfüggvénysor* alakban a (3311.1) *Laplace*-egyenlet általános megoldásaként a külső térre:

$$V(r,\vartheta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} \left[c_{n,m}\, P_{n,m}(\cos\vartheta) \cos m\lambda + s_{n,m}\, P_{n,m}(\cos\vartheta) \sin m\lambda\right]. \qquad (3311.12)$$

Tetszőleges testnek, így a Föld tömegének is a vonzási potenciálfüggvénye felírható a (3311.12) térbeli gömbfüggvénysor (térbeli *Fourier-,* vagy *Laplace-Fourier*-sor) alakjában a $c_{n,m}$ és $s_{n,m}$ együtthatók megfelelő megválasztásával.

Mielőtt azonban erre rátérnénk, röviden összefoglaljuk még az ebben szereplő **felületi gömbfüggvények fontosabb tulajdonságait.**

A (3311.10) szerint értelmezett felületi gömbfüggvényekben szereplő *n*-ed fokú és *m*-ed rendű *Legendre* függvényeket a (3311.9) képletből számíthatjuk. Két csoportjukat különböztetjük meg.

A <u>Legendre-polinomok</u>, az $m = 0$ rendű *Legendre*-függvények, amelyek (ismét a rövidség kedvéért a $\cos\vartheta = t$ jelöléssel) a

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \qquad (3311.13)$$

Rodrigues-képlettel állíthatók elő.

A szemléletesség kedvéért helyettesítsük a ϑ gömbi pólustávolságot a geodéziában használatosabb $\psi = 90° - \vartheta$ *gömbi szélességgel;* ekkor $\cos\vartheta$ helyett $\sin\psi$-t kell írnunk, és a továbbiakban ennek a $P_n(\sin\psi)$ *Legendre*-polinomjainak a tulajdonságait foglaljuk össze.

Ezek és – mivel $m = 0$ esetben $\cos m\lambda = 1$ és $\sin m\lambda = 0$ – a velük alkotott (3311.10) alakú felületi gömbfüggvények $\sin\psi$-nek n-ed fokú polinomjai. Ennek megfelelően a $-\pi/2 \le \psi \le +\pi/2$ tartományban *n* darab valódi nullahelyük (előjelváltásuk) van. A függvényértékek $-1 \le P_n \equiv Y_n \le +1$ értékhatárok közé esnek, és mivel a λ szögtől függetlenek, az egységgömb felszínén csak a geocentrikus szélességtől függő eloszlást mutatnak. A nullahelyek + és – előjelű övekre (zónákra) osztják az egységgömb felszínét. Innen származik a *zonális gömbfüggvények* elnevezésűk. A páros fokú zonális gömbfüggvények $\sin\psi$-nek csak a *páros*, a páratlan fokszámúak csak a *páratlan* hatványaiból álló polinomok, így ennek megfelelően páros ill. páratlan függvények, amelyek a $\psi = 0$ gömbi *egyenlítőre szimmetriás*, illetve *aszimmetriás* eloszlást mutatnak.

A <u>*hozzárendelt (asszociált) Legendre-függvények*</u> képezik a (3311.9) *Legendre*-függvények másik csoportját, ha $m \ne 0$ értéktű. Ezek vagy a (3311.9) általános képletből, vagy a $P_n(t)$ *n*-ed fokú *Legendre*-polinomhoz a

$$P_{n,m}(t) = (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t^2 - 1)^n \qquad (3311.14)$$

összefüggéssel, a *Legendre*-polinom m-ed rendű differenciálásával számíthatók. Ezek $(n-m)$-ed fokú polinomok, amelyeknek ugyanennyi valós nullahelyük (előjelváltásuk) van a $-1 \le t \le +1$ azaz a $-\pi/2 \le \psi \le +\pi/2$ tartományban.

A velük alkotott (3311.10) alakú felületi gömbfüggvények a λ szöget is tartalmazzák. Ennek megfelelően további $2m$ darab nullahelyük is van a $0 \le \lambda \le 2\pi$ tartományban. Ezek a felületi gömbfüggvények tehát a nullahelyeknek megfelelő ψ = állandó és λ = állandó vonalakkal határolt + és – előjelű függvényértékekkel jellemzett gömbi négyszögekre (tesszerákra) osztják az egységgömb felületét. Innen származik a *tesszerális gömbfüggvények* elnevezésűk.

Különleges eset, ha $n = m$, amikoris a hozzárendelt Legendre-függvényeknek és így a velük alkotott felületi gömbfüggvényeknek nincs nullahelyük a $-\pi/2 \le \psi \le +\pi/2$ tartományban. Ez esetben csak a $0 \le \lambda \le 2\pi$ tartományban kapott $2m$ számú nullahelyet adó λ = állandó vonalak osztják + és – előjelű függvényértékekkel jellemzett gömbi kétszögekre (szektorokra) az egységgömb felszínét. Ezért ezeket a felületi gömbfüggvényeket *szektoriális gömbfüggvényeknek* nevezik.

A gömbfüggvények szemléletes ábrázolása található a következő címen: http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/potato/Tutorial.html .

Feladatok:

- Számítsuk ki $\sin\psi$ n-ed fokú Legendre-polinomját és n-ed fokú, m-ed rendű hozzárendelt Legendre-függvényét az első néhány n értékre.
- Írjuk fel ezekkel a megfelelő felületi gömbfüggvényeket. Ábrázoljuk a zonális, a tesszerális és a szektoriális gömbfüggvények előjel szerinti eloszlását $n \le 3$ esetre.
- Ábrázoljuk a $P_2(\sin\psi)$ és a $P_3(\sin\psi)$ zonális gömbfüggvény értékek eloszlását az egységgömbön.

331.2. A földi tömegvonzás potenciálfüggvénye gömbfüggvény alakban

A gömbi koordinátákban felírt (3311.1) *Laplace*-egyenletnek, mint parciális másodrendű differenciálegyenletnek általános megoldásaként a (3311.5), illetve a felületi gömbfüggvények részletesebb kifejtésével a (3311.12) alakú térbeli gömbfüggvénysort kaptuk. Ez tehát tartalmazza mindazon $V(r,\vartheta,\lambda)$ függvényalakokat, amelyek a *Laplace*-egyenletet kielégítik. Egyes konkrét függvényalakokra az egyelőre tetszőleges $c_{n,m}$ és $s_{n,m}$ együtthatók megfelelő megválasztásával juthatunk.

A geodéziai szemléletesség kedvéért használjuk ismét a $\psi = 90° - \vartheta$ gömbi koordinátát (ennek megfelelően $\cos\vartheta$ helyett $\sin\psi$-t kell írnunk) és vezessük be a

$$C_{n,m} = \frac{c_{n,m}}{kMa^n} \quad \text{és} \quad S_{nm} = \frac{s_{n,m}}{kMa^n} \tag{3312.1}$$

jelölést, valamint emeljük ki a felületi gömbfüggvények közös $P_{n,m}(\sin\psi)$ tényezőjét. Ily módon a (3311.12) a

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{kMa^n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} [C_{n,m} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda]\, P_{n,m}(\sin\psi) \tag{3312.2}$$

általános alakba írható.

Mivel a tömegvonzás potenciálfüggvénye a *forrásmentes külső térben* (1. feltétel!) kielégíti a *Laplace*-egyenletet, ez az általános alak a tömegvonzás potenciálfüggvényét is tartalmazza.

Tetszőleges test, így a földtömeg vonzási potenciálfüggvényére akkor jutunk, ha a (3312.2) általános alakban szereplő együtthatókat a következők szerint értelmezzük:

$$C_{n,m} = 2\,\frac{(n-m)\,!}{(n+m)\,!}\,\frac{1}{Ma^n}\int\limits_{\text{Föld}} r_M^n\;P_{n,m}(\sin\psi_M)\cos m\lambda_M\,dM, \qquad (3312.3a)$$

$$S_{nm} = 2\,\frac{(n-m)\,!}{(n+m)\,!}\,\frac{1}{Ma^n}\int\limits_{\text{Föld}} r_M^n\;P_{n,m}(\sin\psi_M)\sin m\lambda_M\,dM, \qquad (3312.3b)$$

illetve $m = 0$ esetben

$$C_n = \frac{1}{Ma^n}\int\limits_{\text{Föld}} r_M^n\;P_n(\sin\psi_M)\,dM, \qquad (3312.4)$$

ahol (r_M, ψ_M, λ_M) a Föld tetszőleges $dM = r_M^2\cos\psi_M\,dr_M\,d\psi_M\,d\lambda_M$ tömegelemének a gömbi koordinátái, $\vartheta = \vartheta(r_M, \psi_M, \lambda_M)$ most a sűrűség, M a Föld össztömege és a a Földet képviselő ellipszoid egyenlítői félátmérője.

A gömbfüggvénysor alakjában felírt tömegvonzási potenciálfüggvény együtthatóinak kiszámítására szolgáló (3312.3) és (3312.4) összefüggéseket megnézve, első tekintetre úgy tűnik, hogy ezek részünkre számszerűen éppen annyira nem használhatók, mint a potenciálfüggvény (132.3) alakja. Ugyanis itt is szükséges lenne a Föld sűrűségeloszlásának és alakjának ismerete az integrálok kiszámításához. Mielőtt azonban ebben a kérdésben véglegesen állást foglalnánk, nézzük meg a gömbfüggvénysor szóban lévő értelmezés szerinti együtthatóinak *fizikai tartalmát* legalább az első néhány n érték esetére.

Számítsuk ki a (3312.3) és (3312.4)-ben előírt integrálokban szereplő térbeli gömbfüggvényeket n = 0, 1, 2 esetre és a szemléletesség érdekében most helyettesítsük vissza ezekbe a tömegelem (x_M, y_M, z_M) derékszögű koordinátáit.

Figyelembe vesszük, hogy

$$\int\limits_{\text{Föld}} dM = M \qquad (3312.5)$$

a Föld *össztömege*,

$$\frac{1}{M}\int\limits_{\text{Föld}} x_M\,dM = x_0\,, \qquad \frac{1}{M}\int\limits_{\text{Föld}} y_M\,dM = y_0\,,$$

$$\frac{1}{M}\int\limits_{\text{Föld}} z_M\,dM = z_0 \qquad (3312.6)$$

a Föld *tömegközéppontjának koordinátái*,

$$\int\limits_{\text{Föld}} (y_M^2 + z_M^2)\,dM = I_{xx} = A,$$

$$\int\limits_{\text{Föld}} (z_M^2 + x_M^2)\,dM = I_{YY} = B \qquad (3312.7)$$

$$\int_{\text{Föld}} (x_M^2 + y_M^2)\, dM = I_{zz} = C$$

a Földnek az *x*, az *y* és a *z* tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi (inercia) nyomatékai,* melyeket a geodéziában szokásos módon rendre az *A*, a *B* és a *C* betűvel jelölünk, továbbá, hogy

$$\int_{\text{Föld}} x_M\, y_M\, dM = I_{xy} = D,$$

$$\int_{\text{Föld}} y_M\, z_M\, dM = I_{yz}\,, \qquad (3312.8)$$

$$\int_{\text{Föld}} x_M\, z_M\, dM = I_{yz}$$

a Földnek az (*x,y*), az (*y,z*) és az (*x,z*) tengelypárra vonatkozó *centrifugális másodrendű nyomatékai.*

A koordináta-rendszerünket úgy vesszük fel, hogy kezdőpontja (origója) a Föld tömegközéppontjával (2. feltétel!), *z* tengelye pedig a Földnek azzal a tehetetlenségi főirányával (főtengelyével) egybeessék, amelyre számított tehetetlenségi nyomatéka a legnagyobb (3. feltétel!). Ekkor a Föld tömegközéppontjának koordinátái és a *z* tengellyel (mint tehetetlenségi főiránnyal) kapcsolatos centrifugális másodrendű nyomatékai nulla értékűek.

Mindezek figyelembe vételével kapjuk az együtthatók első néhány értékére, hogy

$$C_{00} = 1,$$

$$C_{1,0} = C_{1,1} = C_{2,1} = S_{1,1} = S_{2,1} = 0, \qquad (3312.9)$$

továbbá

$$C_{2,0} = \frac{1}{Ma^2}\left(\frac{A+B}{2} - C\right), \qquad (3312.10)$$

$$C_{2,2} = \frac{1}{4Ma^2}\,(B-A) \quad \text{és} \quad S_{2,2} = \frac{1}{2Ma^2}\,D\,. \qquad (3312.11)$$

Látható, hogy a másodfokú tagok nullától különböző együtthatói a Föld másodrendű (tehetetlenségi és centrifugális) nyomatékait tartalmazzák, amelyek a *Föld össztömegének külső mechanikai hatásait tükrözik.* Hasonló a helyzet a többi együtthatókkal is.

Itt jegyezzük meg, hogy a másodfokú, nulladrendű együttható a sarki lapultsággal arányos, míg a másodfokú másodrendű együttható az egyenlítői lapultságra jellemző.

Szokásos jelölési mód (főként a szatellitageodéziában) a

$$J_{n,m} = -\,C_{n,m} \ldots\ldots \text{és} \ldots\ldots K_{n,m} = -\,S_{n,m}\,. \qquad (3312.12)$$

Ezzel a nullától különböző másodrendű együtthatók:

$$J_2 = \frac{C - \dfrac{A+B}{2}}{Ma^2}\,, \qquad (3312.13)$$

$$J_{2,2} = \frac{A-B}{4Ma^2} \qquad \text{és} \qquad K_{2,2} = -\frac{D}{2Ma^2}\,. \qquad (3312.14)$$

Szokásos végül a nulladrendű tagok együtthatóira a J_n és az m > 0 rendű tagok együtthatóira a $C_{n,m}$ és $S_{n,m}$ jelölést együttesen alkalmazni.

A nulla értékű tagok elhagyásával, valamint az m = 0 (nulladrendű) és az m > 0 rendű tagok külön csoportosításával kapjuk végeredményben a *Föld vonzási potenciálfüggvényét gömbfüggvénysor alakjában:*

$$V = \frac{kM}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n\, P_n(\sin\psi)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n \left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right)P_{n,m}(\sin\psi)\right]. \qquad (3312.15)$$

Szokásos még ugyanezt a gömbfüggvénysort a

$$V = \frac{kM}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{J}_n\, \bar{P}_n(\sin\psi)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n \left(\bar{C}_{n,m}\cos m\lambda + \bar{S}_{n,m}\sin m\lambda\right)\bar{P}_{n,m}(\sin\psi)\right] \qquad (3312.16)$$

normalizált alakban is felírni, ahol

$$\bar{J}_n = \frac{J_n}{\sqrt{2n+1}} \qquad \text{és} \qquad \begin{bmatrix}\bar{C}_{n,m}\\ \bar{S}_{n,m}\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}}\begin{bmatrix}C_{n,m}\\ S_{n,m}\end{bmatrix} \qquad (3312.17)$$

a normalizált gömbfüggvény együtthatók, továbbá

$$\bar{P}_n(\sin\psi) = \sqrt{2n+1}\; P_n(\sin\psi) \;\; \text{és} \;\; \bar{P}_{n,m}(\sin\psi) = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}\; P_{n,m}(\sin\psi) \qquad (3312.18)$$

a normalizált Legendre-függvények.

A földi nehézségi erőtér potenciálfüggvényét pedig úgy kapjuk, ha a tömegvonzási potenciálhoz hozzáadjuk a forgásból származó (centrifugális) erőtér potenciálját:

$$W = W(r,\psi,\lambda) = V(r,\psi,\lambda) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\psi\,. \qquad (3312.\ 19)$$

Ennek gradiense pedig megadja a nehézségi térerősség

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}\,W = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial W}{\partial r}\\[2mm] \dfrac{\partial W}{r\,\partial\psi}\\[2mm] \dfrac{1}{r\cos\psi}\dfrac{\partial W}{\partial\lambda}\end{bmatrix} \qquad (3312.\ 20)$$

vektorát.

A (3312.15) vagy (3312.16) tömegvonzási potenciálfüggvény első tagja pontszerű, vagy gömbszimmetriás tömegeloszlású, gömb alakú M földtömeg *központos (centrális) eloszlású* vonzási potenciálját fejezi ki. A nulladrendű tagok sora a Föld vonzási potenciáljának *forgásszimmetriás eloszlású* eltéréseit mutatják az előbbiekhez viszonyítva, míg az $1 \leq m \leq n$ -ed rendű ($m \neq 0$) tagok a földi tömegvonzásnak a hosszúságtól is függő (*általános eloszlású*) eltéréseit fejezik ki a gömb- és forgásszimmetriás eloszlástól.

A potenciálfüggvény gömbfüggvénysor alakja egyrészt azért előnyős a számunkra, mert ezzel jól szétválaszthatók a potenciál *gömbszimmetriás, forgási szimmetriás* és *általános eloszlású* részei. De ennél is fontosabb másik előny az, amit egyes gömbfüggvény együtthatók kiszámításakor láttunk, nevezetesen az, hogy ezek az *egész Föld külső mechanikai hatásait tükrözik,* és így ezek az ilyen hatásokat tartalmazó mérések eredményeiből, a *Föld belső tömegeloszlásának (sűrűségeloszlásának) ismerete nélkül is számszerűen meghatározhatók*. Ennek módszerével később fogunk megismerkedni.

Feladatok:

- Gyűjtsük össze a vonzási potenciálfüggvény (3312.15) alakjának érvényességi feltételeit!
- Írjuk fel forgásszimmetriás erőtér vonzási potenciálfüggvényét gömbfüggvénysor alakjában.
- Írjuk fel a nehézségi térerősség gömbfüggvénysorát a $g \approx \left|\frac{\partial W}{\partial r}\right|$ közelítéssel.
- Bizonyítsuk, hogy az n = 0, 1. és 2. fokú gömbfüggvény együtthatók valóban a (3312.9), (3312.10) és (3312.11) értéket veszik fel.

332. A szintszferoidok

332.1. A szintszferoidok alapösszefüggései

A nehézségi erőtér potenciálfüggvényét tetszőleges állandókkal egyenlővé téve, kaptuk az erőtér potenciáljának

$$W = W(\mathbf{r}) = \text{állandó}$$

egyenlettel leírható szintfelületeit. A W potenciálfüggvénybe a vonzási potenciál (3312.15) gömbfüggvénysorát írva a függvény pontos értékére és a szintfelületek valódi alakjára akkor jutunk, ha az összegezést $n = \infty$ tagszámig végezzük el.

Ha azonban a potenciálfüggvény gömbfüggvénysora tagjainak összegezését valamely $n = k < \infty$, véges számnál abbahagyjuk (azaz a további, $n > k$-ad fokú tagokat nulla értékűnek tekintjük, vagy elhanyagoljuk), akkor a potenciálfüggvény pontos értéke (a valódi potenciál) helyett ennek k. fokú közelítését kapjuk. Az így nyert k. fokú közelítő potenciálfüggvényt a *normál potenciál* függvényének nevezzük, és megkülönböztetésül $U_k = U_k(\mathbf{r})$ - rel jelöljük.

A normálpotenciál függvényét különböző állandókkal egyenlővé téve a *normálpotenciál szintfelületeinek*, vagy más néven a k. fokú *szintszferoidoknak* az

$$U_k = U_k(\mathbf{r}) = \text{állandó}$$

egyenletére jutunk.

(A szintszferoidok elnevezés gyűjtőfogalom, amelybe beleértendő a szintszferoidok ∞ serege, ugyanis végtelen sok *k* értékkel végtelen sokféle fokú normál potenciálfüggvény írható fel, és ezek mindegyike végtelen sokféle állandóval egyenlővé tehető.)

A szintszferoidok potenciál- (vagy munka-) felületek, és ilyen értelemben valamely *k.* fokú szintszferoidok alkalmasak arra, hogy a valódi szintfelületek közelítő felületeként tekintsük őket. A Föld elméleti alakjának, a geoidnak a közelítőjét *normálszferoidnak* vagy *földi szferoidnak* nevezzük.

A normálpotenciál függvényéhez is tartozik valamilyen erőtér, amely erőtérnek a potenciálját írja le. Ezt a képzeletbeli erőteret nevezzük *normál nehézségi erőtérnek*. Ez annál közelebb áll a Föld valóságos nehézségi érőteréhez, minél kevesebb tagot hagytunk el a végtelen gömbfüggvénysorból.

A *normál nehézségi térerősség* $\boldsymbol{\gamma}$ vektorát a normálpotenciál

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{grad}\ U_k$$

gradienseként értelmezzük.

A későbbi gyakorlati felhasználás érdekében általában arra törekszünk, hogy a normálpotenciál eloszlása, és ezzel a szintszferoidok alakja, lehetőleg egyszerű összefüggésekkel legyen leírható, ezért eleve elhagyjuk a gömbfüggvénysornak a λ hosszúságtól is függő, m > 0 rendű (tesszerális) tagjait és a megmaradó forgásszimmetriás eloszlású, m = 0 rendű zonális tagok közül is csak a *páros* fokszámú tagokra korlátozódunk, amelyek ψ-nek páros függvényei. Az így megmaradó gömbfüggvénysor által leírt normál potenciálfüggvény és ennek szintfelületei (a szintszferoidok) *forgási és egyenlítői szimmetriát* mutatnak.

A gyakorlatban ennek a gömbfüggvénysornak is csak az első egy néhány tagjára korlátozódunk.

A legegyszerűbb eset a k = 0 értékhez tartozó központos (centrális) erőtér lenne, de ez még túl durva közelítés a földi szintfelületek alakjára, ezért a gyakorlatban elfogadott legegyszerűbb esetben k = 2-ig összegezzük a sor tagjait. Így jutunk a *Clairaut* által levezetett, és róla elnevezett ***Clairaut*-féle szintszferoidra**. Ennek

$$U_2 = \frac{kM}{r}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^n J_2\, P_2(\sin\psi)\right]+\frac{1}{2}\,\omega^2 r^2\cos^2\psi = \text{állandó} \qquad (3321.1)$$

egyenletében az U normálpotenciál függvénynek a 0. és a 2. fokú gömbfüggvény tagja szerepel.

Jó közelítéssel, ennek r szerinti parciális differenciálhányadosa abszolút értékeként kapjuk meg az U_2 potenciálfüggvényhez tartozó elképzelt, normál nehézségi erőtér *térerősségét*, ugyancsak gömbfüggvénysor alakjában

$$\gamma \approx \left|\frac{\partial U_2}{\partial r}\right| = \frac{kM}{r^2}\left[1-3\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\, P_2(\sin\psi)\right] - \omega^2\, r\, \cos^2\psi . \qquad (3321.\ 2)$$

Ha ψ= 0° és r = a, illetve ψ = 90° és r = b = a(1-f) helyettesítéssel kifejezzük a (3321.1)-ből az U normálpotenciál és a (3321.2)-ből a γ_e és γ_p normál nehézségi térerősség értékét a Föld elméleti alakját (a geoidot) helyettesítő normálszferoid felszínén az egyenlítőn és a sarkokon, akkor 4 összefüggésre jutunk, amelyben a normál nehézségi erőteret meghatározó összesen 8 mennyiség

$$(U,\ \gamma_e,\ \gamma_p,\ kM,\ J_2,\ a,\ f \text{ és } \omega)$$

szerepel.

Fejezzük ki az első három egyenletből kM-et, U-t és J_2-t, és írjuk be ezek kifejezését a negyedikbe, amit végül oldjunk meg f-re. Így az

$$f = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \qquad (3321.3)$$

nevezetes alakra, a *szintszferoidok Clairaut-féle összefüggésére* jutunk. Ennek jelentősége abban van, hogy lehetőséget nyújt a Föld elméleti alakját helyettesítő szintszferoid *f geometriai lapultságának meghatározására* az ω forgási szögsebesség és a szferoid *a* egyenlítői félátmérőjének ismeretében a normál nehézségi térerősség γ_p sarki és γ_e egyenlítői értéke, vagyis *fizikai jellegű mennyiségek alapján*.

A (3321.3) jobb oldali első tagjában az egyenlítői centrifugális és nehézségi térerősség arányát szokás *m*-mel és a második tagot pedig β-val jelölni. Ez utóbbit *nehézségi lapultságnak* is nevezzük. Itt jegyezzük meg, hogy használjuk még a potenciál gömbfüggvénysora 2.-fokú, nullarendű

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2} \qquad (3321.4)$$

együtthatójára a *sztatikai lapultság* és tehetetlenségi nyomatékok

$$\frac{C - A}{C} \qquad (3321.5)$$

arányszámára a *dinamikai lapultság* elnevezéseket is.

Felhasználásukkal a szintszferoidok néhány összefüggése (az *f* geometriai lapultság 10^{-3} nagyságrendjéig, a $\psi \approx \varphi$ közelítéssel):

a *normál nehézségi térerősség* a φ földrajzi szélesség függvényében

$$\gamma = \gamma_e\,(1 + \beta \sin^2\varphi + \ldots), \qquad (3321.6)$$

ahol a nehézségi lapultság

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = -\frac{3}{2}J_2 + 2m + \ldots; \qquad (3321.7)$$

a szferoidi *helyvektor hossza*

$$r = a(1 - f\sin^2\varphi + \ldots), \qquad (3321.8)$$

ahol

$$f = \frac{a - b}{a} = \frac{3}{2}J_2 + \frac{m}{2} + \ldots \qquad (3321.9)$$

a szintszferoid geometriai lapultsága. Végül a szferoidokra felírható *három alapösszefüggés* a hét meghatározó mennyiség között:

$$f = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{5}{2} m + \beta,$$

$$kM = \gamma_e\, a^2 \left(1 - f + \frac{3}{2} m + ...\right), \qquad (3321.\ 10)$$

$$U = \frac{kM}{a}\ (1 + f/3 + m/3 + \ldots).$$

Látható tehát, hogy a szintszferoid (a normál nehézségi erőtér) hét meghatározó mennyiségéből *elegendő négynek az ismerete*, a többi három a (3321.10) alap összefüggésekből már kiszámítható.

Ha a vonzási potenciál (3312.15) gömbfüggvénysora tagjainak összegezését k = 4-ig végezzük el, és az így kapott függvényalakot írjuk a nehézségi erőtér potenciáljának (3312.19) kifejezésébe, akkor az

$$U_4 = \frac{kM}{r}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\, P_2(\sin\psi) - \left(\frac{a}{r}\right)^4 J_4\, P_4\,(\sin\psi)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\ \omega^2\ r^2 \cos^2\psi = \text{állandó} \qquad (3321.11)$$

egyenlettel jellemzett ***Helmert*-féle szintszferoidok** seregére jutunk. Ez esetben minden összefüggésünk további f^2, azaz 10^{-5} nagyságrendű tagokkal bővül. Így például a *normál nehézségi térerősség*

$$\gamma = \gamma_e\ (1 + \beta \sin^2\varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi + \ldots), \qquad (3321.12)$$

ahol

$$\beta_1 = \frac{1}{8} f^2 - \frac{5}{8} f\, m. \qquad (3321.13)$$

A Helmert-féle szintszferoidok összefüggéseiben 13 meghatározó mennyiség szerepel, és közöttük 8 összefüggést lehet felírni. Így 5 kiinduló mennyiség ismeretében a többi már számítható.

A szintszferoidokat alkalmazni fogjuk a Föld alakját jól megközelítő méretű és alakú geodéziai alapfelület fizikai úton végzendő meghatározásához. Ennek részleteivel későbben fogunk foglalkozni.

Feladatok:

- Gyűjtsük össze az eddig megismert lapultságfogalmakat!
- Számítsuk ki annak a Clairaut-féle szintszferoidnak a geometriai lapultságát és potenciálértékét, amelynek egyenlítői félátmérője megegyezik a Kraszovszkij-féle ellipszoid fél nagytengely hosszúságával, ha

$$\omega = 0{,}729\ 211\ 51 \cdot 10^{-4}\ \text{s}^{-1}\ ,$$

$$\beta = 0{,}005\ 302 \qquad \text{és} \qquad \gamma_e = 9{,}780\ 30\ \text{J/kg}.$$

332.2 A szintszferoidok egyes további összefüggései

A szintszferoidok a normálpotenciál szintfelületei, tehát munkafelületek, amelyeknek egymáshoz viszonyított potenciálkülönbsége állandó a felület egész kiterjedésében. Ez azt jelenti, hogy bárhol helyezünk át valamely (pl. egységnyi) tömeget az U_1 potenciálértékű szintszferoidról az U_2 szintszferoidra, azonos munkavégzés történik. A szintszferoid mentén azonban a normál nehézségi térerősség változik (az egyenlítőtől a sarkok felé folyamatosan növekszik), amit pl. a normál nehézségi térerősség (3321.6) alakú képletével lehet kifejezni. Következésképpen az U_1 és az U_2 potenciálértékű szintszferoidok távolsága is, a nehézségi térerősség változásával fordított arányban változik.

A _szintszferoidok távolságának megváltozása_ a

$$h_1 - h_2 = h_1\,\beta\,\frac{\sin^2\varphi_2 - \sin^2\varphi_1}{1+\beta\sin^2\varphi_2} \approx h_1\,\beta\sin 2\varphi\,\Delta\varphi \qquad (3322.1)$$

összefüggésből számítható. (A közelítő alak csak kis $\Delta\varphi$ szélességkülönbségekre érvényes!)

A nehézségi térerősségnek az egyenlítő és a sarkok közötti változása következtében a szintszferoidok közötti távolság tehát nem állandó, a *szintszferoidok a sarkok felé összehajlanak.* Ennek megfelelően a normál nehézségi erőtér erővonalai (függővonalai), amelyek a szintszferoidokra mindenhol merőlegesen haladnak, az egyenlítő felől nézve domború (konvex) görbék. Ha a földrajzi szélesség fogalmát a szintszferoiddal kapcsolatban is a felületi normálisnak a földi koordináta-rendszer Z tengelyére merőleges síkkal bezárt szögeként értelmezzük, akkor az erővonalak (függővonalak) görbültsége azt okozza, hogy az azonos függővonalon, de különböző magasságban fekvő szferoidi pontok földrajzi szélessége kis mértékben különböző. Más szóval a _földrajzi szélesség változik a magassággal._

Ezt a változást kiszámíthatjuk, ha felírjuk a szintszferoidok távolságának $h_1 - h_2$ megváltozását a felület mentén valamely kis s távolságon és képezzük $(h_1 - h_2)/s$ arányukat. Ebből

$$\Delta\varphi'' = 0,171''\,H\sin 2\varphi\,, \qquad (3322.2)$$

ahol H a szintszferoidok egymástól mért távolsága km-ben.

Ezt az összefüggést a földfelszínen mért szintfelületi földrajzi szélességeknek a geoidra (tengerszintre) átszámításakor hasznosítjuk azzal a közelítéssel, hogy a valóságos nehézségi erőtér függővonalát a normál nehézségi erőtér erővonalával helyettesítjük.

A normál nehézségi _térerősség változását a magasság függvényében_ a külső térben a

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H} = -\frac{2\gamma}{\tilde{R}} - 2\omega^2 \approx -3086\ \mathrm{E} = -3086\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}^{-2} = -3086\cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{N/kg}}{\mathrm{m}}\,,$$

vagy

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H} = -0,3086\ \mathrm{mGal/m}$$

normál függőleges gradiens fejezi ki, ahol

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right)$$

a szintszferoid közepes görbülete. Ezt az összefüggést a nehézségi értékeknek a geoidra (tengerszintre) átszámításakor használjuk, és *tiszta magassági hatásnak* nevezzük.

Feladatok:

- Számítsuk ki az egyenlítőn egymás felett 100 m-re lévő szintszferoidok távolságát a sarkokon!
- Számítsuk ki, hogy mennyivel csökken a Magyarország déli szélén egymás felett 100 m-re haladó szintszferoidok távolsága az ország északi szélén. ($\Delta\varphi \approx 2°45'$.)
- Mennyivel változik a Kékestetőn mért szintfelületi földrajzi szélesség, ha átszámítjuk a geoidra? ($H \approx 1000$ m.)
- Mennyivel változik a normál nehézségi térerősség a BME központi épület magasföldszintje és a III. emelet szintje között, ugyanazon függőlegesben? (Tekintsük az emeletmagasságot kereken 6 m-nek.)

333. A nehézségi erőtér mérése és a nehézségi rendellenességek

A geodéziai alapfelület, a vonatkoztatási ellipszoid meghatározásának eddig megismert módszerei (a fokmérés és a felületek módszere) a nehézségi erő *irányát* (a helyi függőleges irányt) meghatározó geometriai jellegű mérések eredményeire támaszkodnak. A fizikai geodéziai módszerek, ezzel szemben, a nehézségi térerősség *nagyságának*, és a nehézségi erőtér *gradienseinek* a meghatározására végzett fizikai jellegű mérések eredményeit használják fel.

A fizikai geodézia módszereinek gyakorlati alkalmazásához így első sorban szükségünk van a földfelszín minél több pontjában mért *nehézségi értékekre*.

Ezeket a nemzetközi és országos nehézségi alappontokhoz csatlakozó nehézségi alaphálózat és gravitációs részletmérések keretében végzett abszolút és relatív nehézségi mérésekkel határozzák meg. A mért *g* érték mellett szükségünk van a mérési hely vízszintes (ellipszoidi földrajzi) koordinátáira és tengerszint feletti magasságára.

Emlékeztetünk arra, hogy annak érdekében, hogy a nehézségi térerősség rövidperiódusú időbeli változásától mérési eredményeinket megszabadítsuk [141.], belőlük a mérések után rögtön levonjuk az árapály hatását, és így foglaljuk őket adatbázisba. (Így válik lehetségessé ugyanazon a helyen, különböző időpontokban mért *g* értékek összehasonlítása.) Árapály-adatokat a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) *Nemzetközi Földi Árapály Központjától* (International Center for Earth Tides = ICET, http://www.astro.oma.be/ICET/) kaphatunk.

(A nehézségi mérések eszközeivel és módszereivel a Geofizika, a nehézségi alaphálózattal pedig a Geodéziai alaphálózatok tantárgy keretében ismerkedtek meg.)

Egyes feladatok megoldásához előnyösen hasznosíthatók a nehézségi erőtér vízszintes gradienseinek (a potenciálfüggvény egyes második deriváltjainak) meghatározására végzett mérések eredményei. Ennek hagyományos módszere az Eötvös-inga mérés, de most vannak fejlődésben az ennél gyorsabb, gazdaságosabb új mérési módszerek. Ennek eredményeként egyes földfelszíni pontokban, helyesebben a földfelszín egyes darabjain meglehetősen sűrű (1÷3 km) hálózatban kijelölt pontokban, vagy a Földön kívüli térségben megkapjuk a nehézségi erőtér *W* potenciálfüggvénye

$$W_{yy} - W_{xx}\,,\quad W_{xy}\,,\quad W_{zx}\ \text{és}\ W_{zy}$$

második deriváltjainak számértékét.

(A mérés eszközeit és módszereit, valamint a mérési eredmények feldolgozását a Geofizika tantárgy tárgyalja.)

Felsőgeodéziai feladatok megoldásához általában nem magukat a mért nehézségi térerősség értékeket használjuk, hanem *eltérésüket* valamilyen (a Föld valóságos nehézségi erőterét jól közelítő, képzeletbeli) normál nehézségi erőtérben a mérési hely koordinátáinak megfelelő helyre kiszámított *normál nehézségi térerősségtől.* Ezek az eltérések a $\Delta g = g - \gamma$ *nehézségi rendellenességek.*

(Hasonlóan, mint a $\Theta(\xi,\eta)$ *függővonal-elhajlások,* vagy a *N geoid-ellipszoid távolságok,* amelyek *geometriai értelemben* jellemzik a szintfelületnek (pl. a geoidnak) valamely „közelítő értékként” felfogható szabályos matematikai felülethez (ellipszoidhoz) viszonyított eltéréseit; fizikai értelemben a Δg *nehézségi rendellenességek* a valóságos szintfelületeknek (pl. a geoidnak) – az ugyancsak „közelítő értékként” felfogható szabályos, elképzelt, normál nehézségi erőtér szintfelületeihez viszonyított eltéréseit mutatják. Ez, tehát most már a harmadik olyan mérőszám, amely valódi felületnek valamilyen képzeletbeli, szabályos (közelítő) felülethez viszonyított helyzetét jellemzi.)

Attól függően, hogy a meghatározandó felületünk a Föld fizikai, vagy matematikai (elméleti) alakja, képezzük a nehézségi rendellenességet a földfelszíni, vagy geoidi pontban, és beszélünk *földfelszíni,* vagy *geoidi nehézségi rendellenességről.*

A **földfelszíni Δg_P nehézségi rendellenesség** számításához a földfelszínen ténylegesen mért (és az árapály-hatástól megszabadított) g_P értékeket vetjük össze valamilyen normálértékkel. Ennek részleteivel később fogunk foglalkozni [533.].

A **geoidi $\Delta g_{P'}$ nehézségi rendellenesség** kiszámításához a földfelszíni P pontunk P′ geoidi megfelelőjében kellene ismernünk az itteni $g_{P'}$ nehézségi értéket. Ez a geoidi pont azonban a szárazföldek területén a felszín alatt, a Föld belsejében fekszik, ahol mérni nem tudunk. A másik áthidalandó nehézség az, hogy a későbbi felhasználás matematikai összefüggései a Föld tömegén kívüli, külső nehézségi erőtérre érvényesek [522.]. Így tehát a geoid meghatározásához felhasználandó $\Delta g_{P'}$ nehézségi rendellenességeket olyan $g_{P'}$ értékekből kell számítanunk, amelyeket a *geoidon (tengerszinten mérnénk, úgy, mintha felette tömegek nem lennének* (vagyis mintha a geoid a Föld tömegének határoló felülete lenne).

A földfelszínen mért g_P értékekből ilyen geoidi $g_{P'}$ értékeket különböző *fizikai modellek* segítségével számolunk. Ezt a műveletet nevezzük a nehézségi mérések tengerszintre (geoidra) átszámításának (redukálásának). Többféle ilyen modell terjedt el a gyakorlatban, közülük fogunk néhányat megismerni.(Ezzel a kérdéssel más szempontból a Geofizika tantárgyban is találkoztak, így az ott is használt fogalmakat a továbbiakban már ismertnek tekintjük.)

A földfelszíni nehézségi értékek geoidra átszámításának *Bouguer-féle modelljében* először a geoid feletti szárazföldi tömeget a mérési hely *H* magasságának megfelelő, minden irányban végtelen kiterjedésű sík-párhuzamos lemeznek tekintve, kiszámítjuk ennek tömegvonzását a lemez szélére (δg_B *Bouguer*-féle *hatás*). Ezt a P pontbeli mért értékből levonva, olyan *g* értékre jutunk, amit – feltételezésünk szerint – ott mérnénk, ha alatta a tengerszintig tömegek nem lennének. A számítás második lépésében ehhez hozzáadjuk a δg_F *Faye*-féle, vagy *tiszta magassági* hatást, ami azt mutatja, hogy mennyit változik a térerősség, ha forrásmentes (légüres) térben a P pontból a pont magasságának megfelelő mértékben a Föld vonzó tömegéhez közelebb kerülünk. Eredményül (a modellnek megfelelő közelítéssel) azt a

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_F \qquad (333.1)$$

geoidi nehézségi értéket kapjuk, amit a geoidon mérnénk, *ha felette tömegek nem lennének.* Az ezzel számított $\Delta g_{P'}$ *Bouguer*-féle *nehézségi rendellenességek* eloszlása a geoid felszínén viszonylag sima lefutású, jól interpolálható. Hátránya, hogy az átszámítással

- megváltozott a Föld össztömege és ezáltal
- áthelyeződött a tömegközéppontja.

E két utóbbit együttesen *közvetett (indirekt) hatásnak* nevezzük, ami ennél a modellnél meglehetősen nagy. Ezért a geodéziában kevésbé, inkább csak közvetetten használjuk. (Geofizikában elterjedten alkalmazzák más célra.)

A *javított Bouguer-féle modellben* további δg_t javítással figyelembe vesszük a mérési hely környezetében a pont vízszintes síkja (a *Bouguer*-lemez felső határoló síkja) alatti és feletti domborzati formák tömegvonzási hatását a P pontbeli egységnyi tömegre, és a

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_t + \delta g_F \qquad (333.2)$$

alakból számítjuk (a modellünknek megfelelő közelítéssel) azt a nehézségi értéket, amit a geoidon mérnénk, ha fölötte tömegek nem lennének. A vele számított geoidi nehézségi rendellenességek az előbbiekben említett tulajdonságokat mutatják, alkalmazásuk is azokéval megegyező, de a számítás az előbbinél sokkal munkaigényesebb.

Ha a nehézségi értékek geoidra átszámításakor az *izosztatikus kiegyenlítődés elvét* alkalmazzuk, akkor a geoid feletti tömegeket úgy rendezzük át, hogy velük a mélységben lévő tömeghiányokat „kipótoljuk”. Ezt a δg_{izo} izosztatikus javítással vesszük számításba, és a geoidi nehézségi értéket a

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_t + \delta g_{izo} + \delta g_F \qquad (333.3)$$

alakból számítjuk. Az ezzel számított *izosztatikus nehézségi rendellenességek* igen sima lefutású, jól közepelhető és interpolálható kicsi értékek. A modell hátránya, hogy a számítás nagyon munkaigényes, és ennek is még nagy a közvetett hatása (a képzeletbeli tömegátrendezés miatt). Ezek ellenére korábban több példa volt geodéziai alkalmazására.

Az eddigieknél több szempontból kedvezőbb a *Helmert*-féle *kondenzációs modell.* Ennek alkalmazásakor a geoid feletti tömegeket nem távolítjuk el, hanem képzeletben igen vékony, de nagy sűrűségű rétegbe a geoid alá tömörítjük. Ennek vonzó hatását a δg_{kond} javítással vesszük figyelembe, és a

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_t + \delta g_{kond} + \delta g_F \qquad (333.4)$$

alakból számítjuk a geoidi nehézségi értéket.

A δg_{kond} kondenzációs javítás kiszámításának legegyszerűbb módja, ha a geoid alá sűrített tömeget is végtelen kiterjedésű sík-párhuzamos lemeznek tekintjük, és a már ismert módon számítjuk a lemezben foglalt tömeg vonzó hatását a lemez szélén fekvő pontban képzelt 1 kg tömegre. Mivel ez a vonzó hatás nem függ a lemez vastagságától, csak a benne foglalt tömeg nagyságától, – ami feltételezésünk szerint megegyezik a geoid feletti, ugyancsak sík-párhuzamos lemeznek tekintett tömeg nagyságával – a hatás ugyancsak δg_B , csak most pozitív előjellel.

Ezen megfontolás alapján a (333.4)-be δg_{kond} helyett δg_B –t írva, és a domborzat viszonylag kicsi δg_t hatását elhanyagolva, a

$$g_{P'} = g_P + \delta g_F \qquad (333.5)$$

nagyon egyszerű alakra jutunk. ami éppen (a Geofizika tantárgyból ismert) *Faye*-féle *modell*. Az előbbiekből kitűnik, hogy ehhez az – első tekintetre ugyancsak önkényesnek tűnő – egyszerű számítási módhoz is tartozik fizikai modell, nevezetesen a *Helmert*-féle *kondenzációs modell.*

A (333.5)-tel számított *Faye*-féle *nehézségi rendellenességek* a domborzati formákat tükröző igen változatos, ezért nehezen interpolálható értékek. Ennek ellenére a geodéziában a legelterjedtebben használjuk őket, bizonyára a számításuk egyszerűsége következtében. További előny a viszonylag csekély közvetett hatás.

Itt jegyezzük meg, hogy a tengerszint (geoid) feletti *magasság* [531.2] számításához olyan nehézségi értékre van szükségünk, amit a Föld belsejében mérnénk, úgy, hogy *minden tömeg a helyén van.* Ez esetben is először számítással eltávolítjuk a P′ pont feletti tömegeket (*Bouguer*-féle javítás),majd a *Faye*-féle (tiszta magassági) hatással átszámítjuk a P-ben mért értéket a P′pontba, és végezetül visszahelyezzük a (sík-párhuzamos lemezként) eltávolított tömegeket eredeti helyükre (most már a P′ pont fölé), ugyancsak a *Bouguer*-féle javítással. Ezzel

$$g_{P'} = g_P - 2\delta g_B + \delta g_F \qquad (333.6)$$

Ez a *Poincaré-Prey*-féle *modell*. (Ezekkel az értékekkel nehézségi rendellenességeket *nem számítunk*.)

A mért (és árapály-javítással ellátott) nehézségi értékeket, továbbá a belőlük számított *Bouguer-* és *Faye-féle* nehézségi rendellenességeket, a mérési hely vízszintes és magassági koordinátáival együtt digitálisan adatbázisba rendezve gyűjtik ezzel foglalkozó nemzeti és nemzetközi intézmények, szervezetek.

Geodéziai célokra az egyes pontokra vonatkozó eredményekből különböző sűrűségű (pl. 1°x1°, vagy 0,5°x0,5°, vagy még sűrűbb) rácshálózatok sarokpontjaira interpolált értékeket állítanak elő, illetve középértékeket képeznek az egyes rácsmezőkre (a rácsmező geometriai középpontjára).

A kapott nehézségi rendellenességeket analóg módon *átlag-anomália,* vagy *izoanomália térképeken* szemléltetik.

A nehézségi adatokat az egész Földre kiterjedően a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) *Nemzetközi Gravimetriai Irodája* (International Gravimetric Bureau = BGI) gyűjti, és teszi mindenki számára hozzáférhetővé (http://bgi.cnes.fr).

34. A geodéziai vonatkoztatási rendszer meghatározása

341. A földmodell és a geodéziai vonatkoztatási rendszer

A ***geodéziai földmodell*** a Föld *normálalakja* és *normál nehézségi erőtere* együttesen.

A Föld normálalakja *a Föld (elméleti alakjának, a geoidnak) méretét, alakját jól megközelítő szabályos (forgási és egyenlítői szimmetriás), viszonylag egyszerű matematikai (geometriai) felület.* A gyakorlatban általában forgási ellipszoid.

A geodéziában a Föld ellipszoidi normálalakját valamely vonatkoztatási rendszer koordináta-rendszerére illesztve *vonatkoztatási ellipszoidként* használjuk meghatározandó pontjaink térbeli helyzetét jellemző ellipszoidi felületi koordináták számítására.

A Föld normál nehézségi erőtere *a Föld valóságos nehézségi erőterét jól megközelítő szabályos (forgási és egyenlítői szimmetriás) eloszlású, viszonylag egyszerű matematikai összefüggésekkel előállított (képzeletbeli) erőtér.*

Ilyen értelmezésben a *geodéziai földmodell*

- egyrészt a Föld geometriájának és külső nehézségi erőterének jó közelítője, mely alkalmas arra, hogy a geodézia mellett, a társtudományok (geofizika, csillagászat, navigáció, stb.) és a nagyközönség részére Földünket nagy vonalakban jellemezze;
- másrészt, geodéziai feladataink megoldásában a Föld geometriájának és külső nehézségi erőterének olyan *„előzetes értéke”*, melyhez a természetet (a fizikai valóságot) viszonyítjuk. Ha földmodellünket jól választjuk meg, akkor a természet és a modell eltérései kicsi értékek, amelyeket viszonylag egyszerűbb (gyakran lineáris) összefüggésekkel tudunk meghatározni.

  (A matematikai statisztika nyelvén fogalmazva, földmodellünk a Föld geometriájának (alakjának) és külső nehézségi erőterének a *„trendjét”* mutatja, és a természetnek ehhez viszonyított eltérése a mérésekkel meghatározandó *„jel”*.)

Mint az előzőekben láttuk, felsőgeodéziai munkákban a meghatározott földfelszíni, vagy felszínközeli (többnyire az I.rendű alaphálózati) pontok helyzetét általános használatra *ellipszoidi felületi koordinátákkal* [162.1] adjuk meg. Kiszámításukhoz célszerűen választott méretű, alakú, elhelyezésű és tájékozású forgási ellipszoidot, ún. *vonatkoztatási (referencia) ellipszoidot* használunk (amire a koordinátákat vonatkoztatjuk) [31]. Ennek méretét és alakját úgy határozzuk meg, hogy a vonatkoztatási ellipszoid egyben a *Föld normál alakjának* szerepét is betölti.

Mindaddig, amíg helymeghatározási feladatainkat pusztán geometriai (szög és távolság) jellegű mérési eredményekre támaszkodva oldjuk meg, ezen geometriai jellegű mérések eredményeinek feldolgozásához elegendő a vonatkoztatási ellipszoidot (a Föld normálalakját) *tisztán geometriai felületként* értelmezni (amelynek az anyaghoz semmi köze).

A Föld geometriájának meghatározása mellet a geodézia feladata a földi nehézségi erőtér (szerkezetének, eloszlásának) meghatározása is. Továbbá, ha a földalak meghatározásába a tengereken és az egész Föld külső terében is mérhető fizikai jellegű mennyiségeket (pl. nehézségi méréseket, mesterséges hold észleléseket) is be akarunk vonni, akkor ezek eredményeinek feldolgozásához is viszonyítási alap, (az „előzetes érték” szerepét betöltő) „*vonatkoztatási erőtér*” szükséges. Erre a célra szolgál a Föld valódi nehézségi erőterét megközelítő, de viszonylag egyszerűen számítható, szabályos eloszlású *normál nehézségi erőtér*, amelyet megfelelő matematikai eszközökkel alkotunk.

A Föld geometriájának és nehézségi erőterének meghatározásakor a geometriai és a fizikai jellegű méréseink eredményeit *együttesen* akarjuk feldolgozni. Ehhez olyan *közös* viszonyítási alap kell, amelyben a Föld normálalakja és normál nehézségi erőtere *egyetlen közös* rendszernek, a ***geodéziai földmodellnek*** egy-egy eleme.

Ehhez úgy jutunk, hogy a Föld M tömegével megegyező tömegű (forgási és egyenlítői szimmetriás tömegeloszlású), a Föld méreteit jól megközelítő méretű testet képzelünk, amit tehetetlenségi főtengelye körül a Föld ω forgási szögsebességével megforgatunk. Ekkor a test felszínén és külső terében a Földéhez hasonló, ezt megközelítő, de forgási és egyenlítői szimmetriás eloszlású, szabályos nehézségi erőtér keletkezik. Ezt a képzeletbeli erőteret tekintjük *normál nehézségi erőtérnek.* Ennek térerőssége a γ *normál nehézségi térerősség* és potenciálja az *U normálpotenciál,* szintfelületei általában valamilyen szintszferoidok. A Föld *normálalakját* pedig a normál nehézségi erőtér egyik szintfelületeként értelmezzük. Gyakorlati okokból mindig törekszünk arra, hogy mind a normál nehézségi erőtér, mind a Föld normálalakja viszonylag egyszerű összefüggésekkel legyen matematikailag leírható. *Vonatkoztatási felületként* vagy az így, fizikailag meghatározott normálalakot, vagy a vele egyenlő tengelyhosszúságú forgási ellipszoidot használjuk (ha a kettő nem azonos). A fizikai geodéziában a vonatkoztatási felület mindig geocentrikus elhelyezésű.

Az így értelmezett *geodéziai földmodellt matematikailag meghatározó mennyiségek* (paraméterek) (mint, pl. a vonatkoztatási felület a mérete, f lapultsága (alakja), a Föld tömegét jellemző kM szorzat (az ún. geocentrikus gravitációs állandó), a Föld ω forgási szögsebessége*,* stb.) *számszerű értéksorát* ***geodéziai vonatkoztatási rendszernek*** (*Geodetic Reference System = GRS*) nevezzük.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a *„geodéziai vonatkoztatási rendszer”* fogalom a 161.-ben tárgyalt *„vonatkoztatási rendszer”* fogalomnak lényegesen kibővített tartalmú változata. Mint az előbbi értelmezése mutatja ez a Föld geometriája és külső nehézségi erőtere meghatározásának viszonyítási alapjaként szolgáló földmodellnek a számszerű jellemzőit tartalmazza. A földmodell pedig közvetett módon magába foglalja a *földi térbeli derékszögű koordináta-rendszert”* (valamelyik megvalósulását és ennek keretpontjait) is.

Nemzetközi munkacsoportok, vagy nagyobb geodéziai intézmények egyre több és újabb mérési eredmény feldolgozásával ezt az adatsort időnként újraszámítják. Egyes közgyűléseinek idejében legjobb értéksort a *Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió* (International Union of Geodesy and Geophysics = IUGG) a tagországai részére ajánlásba foglalja. Így használatban van pl. a *GRS67, GRS80* jelű értéksor. Ezek hosszabb időre szóló „szabvány” (standard) értékek a geodézia, geofizika, csillagászat, navigáció, stb. számára.

Az Unió ajánlásai közötti időben is folyik az értéksor időnkénti újraszámítása, és a kapott „pillanatnyi legjobb értékekről” a *Nemzetközi Geodéziai Szövetség* (International Association of Geodesy = IAG) ad tájékoztatást.

A geodéziai földmodell – a Föld normálalakja (a vonatkoztatási ellipszoid) és a normál nehézségi erőtér – meghatározása geometriai és fizikai jellegű mérési eredmények együttes feldolgozását lehetővé tevő *fizikai geodéziai módszerekkel* lehetséges. A következőkben ezeket fogjuk megismerni.

342. A normál nehézségi erőtér meghatározása a potenciálfüggvény sorbafejtésével

A normál nehézségi erőtér és a Föld normálalakjának (együttesen, a geodéziai földmodellnek) meghatározására a legrégibb módszer a Föld valóságos potenciálfüggvényének sorbafejtésén alapszik.

Ha a vonzási potenciál (3312.15) gömbfüggvénysorában a [332.1]-ben tárgyalt módon csak a forgási és egyenlítői szimmetriás eloszlású tagokat tartjuk meg, akkor a nehézségi erőtér potenciálját közelítő U normál potenciálfüggvény gömbfüggvénysorára jutunk.

Ha ebben k véges számú tagra korlátozódunk, azaz a végtelen sort a k. tag után elvágjuk, és az összes további tagokat nullával egyenlőnek tekintjük, akkor a k. fokú U_k függvény a k számtól függően többé-kevésbé jól közelíti meg a Föld valóságos nehézségi erőterét, viszont matematikailag könnyebben kezelhető. Legegyszerűbben az így nyert, U_k függvénnyel leírt nehézségi erőteret tekinthetjük *normál nehézségi erőtérnek*. Ennek szintfelületei az U_k = állandó potenciálértékű k. fokú szintszferoidok. Ekkor a *Föld normálalakja* az a szferoid, amelynek méretei a Föld méreteit jól megközelítik.

Láttuk, hogy a legegyszerűbb esetben, ha $k = 2$, akkor az ún. *Clairaut*-féle szferoid (3321.1) egyenletére jutunk.

Határozzuk meg a Föld másodfokú szintszferoidként értelmezett normálalakját és a hozzá tartozó normál nehézségi erőteret. Erre vonatkozóan *Clairaut* a (3321.10) három összefüggést vezetett le (az f lapultság $1/300 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ nagyságrendjéig terjedő viszonylagos pontossággal). Ebben a három egyenletben a normálszferoidnak 7 ismeretlen jellemzője szerepel, úgymint

$$a,\ f,\ kM,\ U\ ,\ \beta,\ \gamma_e\ ,\ \omega.$$

Kiszámításukra a három egyenlet kevés, tehát négy ismeretlennek az értékét más úton kell meghatározni. Ezek közül a Föld forgásának ω szögsebessége nagy pontossággal ismert.

A Föld normálalakja a nagytengely-hosszának értékét átvehetjük a geometriai meghatározásokból (fokmérések, felületek módszere stb.).

Harmadik és negyedik adatként γ_e és β értékét szokás tapasztalati úton, mérésekkel meghatározni.

Mint ismeretes a szferoid felszínén valamely φ_i földrajzi szélességű helyen a γ_i normál nehézségi térősséget (ugyancsak a lapultság nagyságrendjéig terjedő viszonylagos pontossággal, vagyis az egység mellett az f^2 nagyságrendű negyedfokú és ennél kisebb nagyságrendű tagokat elhanyagolva) a (3321.6) adja. Ha a földfelszín különböző helyein mért és a tengerszintre (geoidra) átszámított $g_{P_i'}$ nehézségi értékeket ezzel összevetjük, különbségükre a

$$\Delta g_i = g_{P_i'} - \gamma_e (1+\beta \sin^2 \varphi_i)$$

kifejezést kapjuk, az egyelőre ismeretlen γ_e és β értékkel. Ezt n számú mérési helyre felírva, a $\sum_{i=1}^{n} \Delta g_i^2$ = minimum feltétellel γ_e és β számértéke a legkisebb négyzetek módszerével számítható a mérési eredmények alapján. Ilyen például *Helmert* 1884-i meghatározásának eredménye

$$\gamma_e = 9{,}780\ 00 \text{ N/kg (vagy ms}^{-2}\text{) és}$$

$$\beta = 0{,}005\ 310.$$

(A korszerűbb meghatározások már a negyedrendű tag figyelembevételével, tehát f^2 viszonylagos pontosságig történtek. Lásd később.)

A felvett négy mennyiség alapján a többi három meghatározó adat, vagyis *f, kM* és *U* a (3321.10) összefüggésekből már számítható. Ezzel meghatároztuk a Föld *a* és *f* méretű és alakú 2. fokú szintszferoidként értelmezett *normálalakját,* ennek *U potenciálértékét,* felszínén a γ_e és β paraméterekkel számítható *normál nehézségi térerősséget,* ezekkel a *normál nehézségi erőteret.*

Továbbmenve a *k Newton*-féle tömegvonzási állandó tapasztalati úton meghatározott értékének felhasználásával a kapott *kM*-ből a Föld normálalakjának (ami megközelítően a Földnek is) az *M* tömege számítható.

Így a Föld tömegére

$$M \approx 5{,}976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

adódik. Kiszámítva a normálalak térfogatát, ez jó közelítéssel

$$K = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - f), \qquad (342.1)$$

és a Föld átlagos sűrűsége

$$\vartheta = \frac{M}{K} = 5\ 520 \text{ kgm}^{-3}$$

körüli értéknek adódik.

A potenciálfüggvény 2. fokig terjedő sorbafejtésével meghatározott geodéziai földmodell bizonytalansága a magasabb fokú tagok elhanyagolása miatt túl nagy. Így például a minket közvetlenül érdeklő nehézségi térerősség eloszlását is csak az *f* nagyságrendnek megfelelő (1/300) pontossággal írja le, ami a korszerű abszolút nehézségi méréseink $\pm 2 \div 5 \cdot 10^{-8}$ N/kg (vagy $\pm 2 \div 5$ μGal) megbízhatóságával aligha vethető össze. Ugyancsak a magasabb fokú tagok elhanyagolása miatt a Föld valódi szintfelületeinek, így normálalakjának is csak durva közelítését jelenti a 2. fokú szintszferoid.

Jobb közelítést kapunk, ha *Helmert* nyomán a potenciálfüggvény végtelen sorából *k* = 4. fokig terjedő tagokat vesszük figyelembe. Ekkor a normál nehézségi erőtér potenciálját a (3321.11) fejezi ki. Mint tudjuk a Föld negyedfokú szintszferoidként értelmezett normálalakjára vonatkozóan *Helmert* összesen 8 összefüggést állított fel a szferoid 13 jellemzője között. A szferoid meghatározásához tehát 5 mennyiségnek az értékét kell ismerni, ill méréssel meghatározni.

Láttuk, hogy ez esetben a nehézségi térerősségnek az eloszlását a szferoidon leíró (3321.12) képlet is bővült az f^2 nagyságrendű (negyedrendű) taggal. Így az *a* és az ω értéke mellett a nehézségi mérésekből γ_e , β és β_1 határozható meg. Ezzel megvan az 5 kiinduló mennyiségnek a Földre vonatkozó tapasztalati értéke. A normál nehézségi erőtér és a Föld normálalakjának további 8 jellemzője a Helmert-féle 8 összefüggésből kiszámítható. A (3321.12) állandóinak tapasztalati meghatározására példaként *Helmert* 1901. évi meghatározásának eredményét adjuk meg:

$$\gamma_e = 9{,}780\ 30 \text{ N/kg (vagy ms}^{-2}),$$

$$\beta = 0{,}005\ 302,$$

$$\beta_1 = -0{,}000\ 007.$$

Ha ezeket az értékeket helyettesítjük a Helmert-féle összefüggésekben is szereplő, de negyedfokú tagokkal is kiegészített *Clairaut*-képletbe, akkor $f = 1/298{,}3$-t kapunk a Föld normálalakjának lapultságára, ami legkorszerűbb ismereteinknek is megfelel.

A geodéziai földmodell meghatározásának újabb lehetőségét nyitották meg a mesterséges holdak. Mint láttuk a Kozmikus geodézia tantárgyban [332], a pályamozgásuk megfigyeléséből közvetlenül a *kM* szorzat és a J_2, J_4 ... stb. gömbfüggvény-együtthatók számértéke határozható meg. Így a *Helmert*-féle egyenletrendszer megoldhatóvá vált a

$$kM,\ J_2,\ J_4,\ \omega,\ a$$

kiinduló mennyiségeknek a valódi Földre vonatkozó értékével. Ebből t*ehát a normálalak f* lapultsága és a *normál nehézségi erőtér* γ_e, β, β_1, stb, további meghatározó mennyiségei számíthatók.

A szintszferoid a vele egyenlő tengelyhosszúságú ellipszoidot a sarkokon és az egyenlítőn természetesen érinti, közöttük a szferoid teljes terjedelmében az ellipszoidon belül fekszik, és legnagyobb eltérése közel 7 m. Mivel a szintszferoid az ellipszoidnál sokkal bonyolultabb felület, és ezért rajta a felületi koordináták számítása igen nehézkes lenne, a gyakorlatban *vonatkoztatási felületként* soha nem használták. Ha a geodéziai földmodellt ezen az úton határozzuk meg, akkor a koordinátaszámításhoz szolgáló vonatkoztatási felület a Föld normálalakjával egyenlő tengelyhosszúságú *forgási ellipszoid* (*vonatkoztatási ellipszoid.)*

Az ily módon levezetett geodéziai földmodell meghatározását, mint láttuk, sikerült teljesen függetleníteni a Föld *belső tömegeloszlásának* ismeretétől (helyesebben nem ismeretétől), mert a meghatározásban csak a Föld egészének külső mechanikai hatásait tükröző mennyiségek (nehézségi térerősségek, tehetetlenségi nyomatékok, a Föld össztömege, stb.) szerepelnek, és a belső tömegeloszlásra csak azt a feltevést tettük, hogy ez forgási és egyenlítői szimmetriás.

A megoldás hátránya, ami miatt ezt tovább kellett fejleszteni, az, hogy míg a kiszámított normál nehézségi térerősségek a Föld *szintszferoid* alakú *normálalakja* felszínére vonatkoznak, és velük, pl. a geoidnak a *szintszferoid feletti magasságát* tudjuk közvetlenül számítani, addig a vízszintes koordinátákat a *vonatkoztatási ellipszoidon* számítjuk. Ennek a kettősségnek a megszüntetése vált lehetségessé a geodéziai földmodell meghatározásának következő módszerével.

343. A vonatkoztatási rendszer meghatározása szintellipszoiddal

343.1. A megoldás alapelve

A Föld normálalakja, bizonyos célszerűségi határokon belül, fizikai értelemben is önkényesen is megválasztható. Erre a lehetőséget *Stokes* és *Poincaré* tétele adja meg. Ennek értelmében az adott ω szögsebességgel forgó *M* tömeg *S* külső szintfelületének önkényes felvétele után a felvett szintfelületen a γ normál nehézségi térerősség, illetve külső terében az *U* normálpotenciál az (*M, S*, ω) ún. *Stokes-féle elemek* függvényében egyértelműen számítható anélkül, hogy az *M* tömegnek *S*-en belüli eloszlásáról bármit is tudnánk. (A tömegeloszlást ugyanis az S szintfelület választott alakja már meghatározza, de ennek milyenségét nem kell ismernünk.) Ennek megfelelően tehát a normálpotenciálnak valamely szintfelületét, célszerűen éppen a Föld normálalakját önkényesen felvesszük, úgy, hogy céljainknak a legjobban megfeleljen.

A célszerűség pedig azt kívánja, hogy a Föld normálalakjaként éppen a geodéziai vonatkoztatási felületként szolgáló *forgási ellipszoidot* vegyük fel. Ha ezt a Föld *M* tömegével kitöltve képzeljük, továbbá feltételezzük, hogy kistengelye körül a Föld állandónak képzelt forgási sebességével forog, akkor ez az *ellipszoid alakú szintfelület* (*szintellipszoid*) lesz a Föld *normálalakja* és külső potenciálja a *normálpotenciál*. Az *M* tömegnek a felszínét képező szintellipszoidon belüli eloszlása ismeretlen.

Hangsúlyozzuk, hogy ez esetben az ellipszoid nem valamely szintszferoid közelítő felületeként szerepel, hanem ténylegesen *ellipszoid alakú szintfelület* felvételéről van szó. A normálpotenciálnak azonban csak *ez az egyetlen* szintfelülete lesz ellipszoid alakú, amit ennek vettünk fel**,** az összes többi külső szintfelülete az ellipszoidnál nagyobb lapultságú szintszferoid lesz.

A geodéziai földmodellt (a Föld normálalakját és a normál nehézségi erőteret) meghatározó

$$a,\ b,\ \omega,\ kM,\ \gamma_e\ ,\gamma_p\ ,\ U_0$$

hét mennyiség között, ez esetben is, három potenciálelméleti összefüggés írható fel. Következésképpen itt is négy kiinduló mennyiségnek a Földre vonatkozó számértékét kell ismernünk. Ezek lehetnek a *Stokes-Poincaré*-tétel bemutatásakor már említettek, de lehetnek – velük egyenértékű – mások is. Ha például (későbbi gyakorlati esetnek megfelelően) az $a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e$ *Stokes*-féle elemek számértékéből indulunk ki, ahol *a és b* célszerűen a koordináta-számításaink vonatkoztatási felületéül szolgáló ellipszoid *a* fél nagytengelyének és *b* fél kistengelyének a hossza, akkor a hiányzó három mennyiség a

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e), \\ kM &= kM(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e) \ \text{ és} \qquad\qquad (3431.1) \\ U_0 &= U_0(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e) \end{aligned}$$

három potenciálelméleti összefüggésből számítható (közülük az első az ellipszoidra módosított *Clairaut*-képlet). A hét meghatározó mennyiség ismeretében a normál nehézségi erőtér minden további jellemzőjét ki tudjuk számítani.

A felvett méretű szintellipszoid felszínén a *normál nehézségi térerősség* eloszlása is már egyértelműen meghatározott (a tömegeloszlás ismeretétől függetlenül) és *Somigliana*

$$\gamma = \frac{a\,\gamma_e \cos^2\varphi + b\,\gamma_p \sin^2\varphi}{\left(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}} \qquad (3431.2)$$

zárt képletéből nyerhető, ahol φ az ellipszoidi szélesség. Ennek sorbafejtett alakja

$$\gamma = \gamma_e\,(1 + \beta\sin^2\varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi + \ldots). \qquad (3431.3)$$

(Ezekben $\gamma_p = \gamma_e\,(1 + \beta)$, továbbá $\beta_1 = \beta_1(f,\, m)$, vagyis $\beta_1 = \beta_1(a,\, b,\, \omega,\, \gamma_e)$.)

A normál nehézségi erőtér potenciálja (a *normálpotenciál*) az

$$U = \frac{kM}{r}\left[1 - J_2^*\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\vartheta) - J_4^*\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\cos\vartheta) - \ldots\right] + \omega^2 r^2 \sin^2\vartheta \qquad (3431.4)$$

gömbfüggvénysorral írható le, ahol

$$J_2^* = J_2^*\,(a,\, b,\, \omega,\, \gamma_e),$$

$$J_4^* = J_4^*(a,\, b,\, \omega,\, \gamma_e),$$

. . . .

a normál nehézségi erőtér eloszlását jellemző gömbfüggvény-együtthatók.

Látható tehát, hogy ezen az úton lehet olyan normál nehézségi erőteret (és ennek minden jellemzőjét) kiszámítani, melynek egyik szintfelülete ellipszoid alakú (szintellipszoid), amely magába zárja a Föld össztömegével megegyező nagyságú tömeget (a Föld normálalakja). A szintellipszoid méreteit megválaszthatjuk úgy, hogy ezek éppen geodéziai vonatkoztatási ellipszoidunk méretei legyenek.

Mivel a (3431.2) a γ normál nehézségi térerősség eloszlását a szintellipszoid felszínén írja le, ezen az úton megszűnt az a kettősség, ami a Föld szferoidi normálalakjának geodéziai alkalmazásakor fellép. Nevezetesen az, hogy más felület a koordinátaszámítás vonatkoztatási felülete (a vonatkoztatási ellipszoid), mint amelyen a normál nehézségi térerősség eloszlását ismerjük (szintszferoid).

A geodézia a XX. századtól már csak ezt a megoldást alkalmazza a geodéziai földmodell és ezzel a vonatkoztatási rendszer meghatározására. A következőkben bemutatjuk ennek néhány gyakorlati alkalmazását.

343.2. Gyakorlati megoldások

A geodéziai gyakorlat során első ízben a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) 1924. évi közgyűlésén *nemzetközi ellipszoidnak* nyilvánított ***Hayford*-féle ellipszoidhoz** határozták meg azt a normál nehézségi erőteret, amelynek ellipszoid alakú szintfelülete éppen ez az ellipszoid.

Kiinduló adatként tehát adottak voltak a *Hayford*-ellipszoid

$a = 6\,378\,388$ m és

$f = 1/297$

jellemzői. Ehhez járult a forgási szögsebesség már akkor jól meghatározott

$$\omega = 0{,}729\ 211\ 51 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$$

értéke, és negyedik kiinduló adatként *Heiskanen* meghatározásából elfogadták a

$$\gamma_e = 9{,}780\ 490\ \mathrm{N/kg}\ (\text{vagy}\ \mathrm{ms}^{-2})$$

egyenlítői nehézségi értéket.

Ezek alapján az ellipszoidra módosított *Clairaut*-féle képletből *Cassinis* 1930-ban kiszámította a normál nehézségi térerősség (3431.2) képletének β együtthatóját. A lapultság négyzetének nagyságrendjéig az ellipszoidra is érvényes (3321.13)-ból pedig meghatározta a β_1 együtthatót f és m függvényében.

Így a *Heiskanen*-féle γ_e értékkel és a *Cassinis* által számított β és β_1 együtthatókkal felírható

$$\gamma = 9{,}780\ 490\ (1{+}0{,}005\ 2884\ \sin^2\varphi - 0{,}000\ 0059\ \sin^2 2\varphi)\ \mathrm{N/kg}\ (\text{vagy}\ \mathrm{ms}^{-2})$$

(3431.3) sorbafejtett alakú képlet megadja a normál nehézségi térerősség eloszlását a *Hayford*-féle ellipszoid felszínén. Ezt az ily módon előállított összefüggést *Cassinis*-féle *normál nehézségi képletnek* nevezik és hosszú időn keresztül *nemzetközi normál nehézségi képletként* használták (használtuk Magyarországon is).

A kiinduló adatokból potenciálelméleti összefüggésekkel kiszámíthatók a normál nehézségi erőtér további jellemzői

$$U_0 = 6{,}263\ 9787 \cdot 10^{7}\ \mathrm{J/kg}\ (\text{vagy}\ \mathrm{m^2 s^{-2}}),$$

$$kM = 3{,}986\ 3290 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Nm^2/kg}\ (\text{vagy}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}),$$

$$J_2^* = 1092{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{és}$$

$$J_4^* = -\,2{,}43 \cdot 10^{-6}.$$

U_0 így kiszámított értékét (jobb hiányában) a geoid (nem mérhető) W_0 *valódi potenciálértékének is*, a kM szorzatra kapott számértéket a *valódi Föld tömege* jellemzőjének is tekintjük. A földmodell, illetve a vonatkoztatási rendszer elemein keresztül így vált lehetségessé a geoid potenciálértékének, és a Föld tömegének közvetett meghatározása az ellipszoidi normálalak meghatározására szolgáló geometriai (szög- és távolság-), valamint a földfelszíni nehézségi mérésekből.

A múlt század közepétől az akkori ún. európai szocialista országok által közös nemzetközi vonatkoztatási felületként használt

$$a = 6\ 378\ 245\ \mathrm{m}\ \text{és}$$

$$f = 1/298{,}3$$

méretű és lapultságú ***Kraszovszkij*-féle ellipszoidhoz** egyszerűbben lehetett megfelelő normál nehézségi erőteret rendelni.

Szerencsés véletlen folytán ugyanis *Helmert 1901. évi normál nehézségi képletének* az akkori 1400 földfelszíni és a geoidra átszámított nehézségi mérésből számított

$$\gamma_e = 9{,}780\ 30\ \mathrm{N/kg}\ (\text{vagy}\ \mathrm{ms}^{-2}),$$

$$\beta = 0{,}005\ 302\ \text{és}$$

$$\beta_1 = -0{,}000\ 007$$

együtthatói gyakorlatilag elegendő összhangban vannak a Kraszovszkij-ellipszoid adataival, így *Helmert* képletét változtatás nélkül alkalmazták a normál nehézségi térerősség eloszlásának leírására a *Kraszovszkij*-ellipszoid felszínén. Az összhangot az mutatja, hogy, ha a szintellipszoidra vonatkozó *Clairaut*-képletbe a *Kraszovszkij*-ellipszoid jellemzőit, a *Helmert*-féle γ_e-t és ω már ismert értékét beírjuk, eredményül gyakorlatilag a β *nehézségi lapultság Helmert*-féle értékét kapjuk.

Az 1960-as évek folyamán mind a csillagászok, mind a geodéták úgy ítélték meg, hogy az utolsó évtizedekben – főként a mesterséges holdak pályamozgásának megfigyelése révén – szerzett ismereteink tükrében sem a nemzetközinek tekintett *Hayford*-féle ellipszoid mérete és alakja, sem pedig az ezen, mint szintellipszoidon, a normál nehézségi térerősség eloszlását kifejező nemzetközi, vagy (*Cassinis*-féle) normál nehézségi képlet nem alkalmas arra, hogy a Föld méreteit, nehézségi erőterét, külső mechanikai hatásait kellőn jól közelítse. Felmerült tehát annak a szükségessége, hogy mind a csillagászat, mind a geometriai és a fizikai geodéziai módszerek számára a nemzetközi szervezet új, megfelelőbb vonatkoztatási rendszert határozzon meg és ajánljon használatra a tagországoknak.

A vonatkoztatási rendszer meghatározásának alapelvét illetően a geodéták többsége továbbra is a *szintellipszoiddal* végzendő megoldást kívánta követni. Sok vitát váltott ki azonban a szükséges négy kiinduló mennyiség kérdése.

A vonatkoztatási rendszert meghatározó kiinduló adatok megállapításakor alapvető szempontként a <u>*feltevésmentességre törekvés*</u> került előtérbe. Ennek megfelelően célszerű kerülni minden olyan mennyiségnek felvételét kiinduló adatként, amelynek számértékét csak különböző feltevések mellett lehet meghatározni. Ilyenek helyett a vonatkoztatási rendszert, lehetőleg, mérési eredményekből közvetlenül (feltevések nélkül), azaz *egyértelműen* számítható értékekkel kívánatos meghatározni.

Ebből a szempontból bírálható a korábbi gyakorlat szerinti csaknem valamennyi kiinduló mennyiség. Közülük is leginkább a normál nehézségi képlet gyakorlati úton (földfelszíni nehézségi mérésekből) meghatározott állandói támadhatók (γ_e , esetleg β és β_1 is, ha így határozták meg).

Meghatározásukkor ugyanis a földfelszínen mért tényleges nehézségi értékeket a tengerszintre (a geoidra számítják át, nem a Föld normálalakjára, a normálszferoidra vagy a szintellipszoidra, amire a normál nehézségi képlet vonatkozik. Ezen utóbbiak eltérése a geoidtól szélső esetben a mintegy ± 100 m-t is eléri, mely magasságkülönbség elhanyagolása több 10 mGalt is jelent a *g* értékében.

További bizonytalanság oka az, hogy a tengerszintre végzendő átszámításnak nincs egyöntetűen elfogadott, egységes módszere. De bármelyik módszer (modell) szerint végezzük is a redukálást, mindenképpen szükséges lenne a számítással figyelembe vett tömegek tényleges sűrűségének ismerete. Erre vonatkozóan is csak közelítésekre támaszkodhatunk.

Az elmondottak értelmében a földfelszíni nehézségi értékek alapján levezetett mennyiségeket – lehetőség szerint – kerülni kell a kiinduló adatok megválasztásakor, ha feltevésmentességre törekszünk.

Nem sokkal kedvezőbb a helyzet a geometriai módszerekkel meghatározott ellipszoidméretek egyértelműségével kapcsolatban sem.

A felsorolt negatívumok mellett figyelembe kell vennünk azt is, hogy a korszerű technikai lehetőségek (közöttük elsősorban a mesterséges holdak pályamozgásának megfigyelését, valamint a rájuk és a Föld természetes holdjára, a Holdra, végzett nagyszabatosságú lézeres távolságméréseket említve) lehetővé tették a Föld egyes fizikai jellemzőinek minden eddiginél pontosabb – viszonylag közvetlen – meghatározását. Így például elsőként kell említenünk a Föld tömegének és az általános tömegvonzási állandó szorzatának a kM szorzatnak, valamint a Föld J2 másodfokú tömegfüggvényének (gömbfüggvény-együtthatójának, a sztatikai lapultságnak) nagyszabatosságú meghatározását.

A J_2-vel kapcsolatban megjegyezzük, hogy számértéke egyenesen arányos a Föld tehetetlenségi nyomatékainak

$$C - \frac{A+B}{2}, \text{ ill. } C–A$$

különbségével, így a földtest lapultságára jellemző kiinduló mennyiség lehet.

Nem említettük még a forgási szögsebesség kérdését. Nevezetesen azért, mert ez korábban is, de különösen a mai időmérési pontosság mellett, szinte a legnagyobb viszonylagos megbízhatósággal ismert mennyiség. Ennek bevonása az alapmennyiségek közé mindenesetre célszerű.

Végül, egyelőre elkerülhetetlen, hogy – jobb hiányában – a szintellipszoid a fél nagytengely-hosszát vegyük fel a kiinduló értékek közé. Ezzel a kényszermegoldással egyelőre tudatosan le kell mondani arról, hogy a szintellipszoidként meghatározandó vonatkoztatási felületet kizárólag egyértelműen meghatározható, feltevésmentes kiinduló mennyiségekből vezessük le, de ismereteink jelenlegi szintjén más lehetőség nem kínálkozik.

Ilyen körülmények figyelembevételével, végül is a Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió 1967.-i Közgyűlése által ajánlott Geodéziai Vonatkoztatási Rendszer (GRS67) megalkotásakor a

$$kM = 3{,}986\ 03 \cdot 1014 \text{ Nm}^2/\text{kg (vagy m}^3\text{s}^{-2}),$$

$$\omega = 7{,}292\ 115\ 1467 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1},$$

$$J_2 = 1082{,}7 \cdot 10^{-6},$$

$$a = 6\ 378\ 160 \text{ m}$$

kiinduló mennyiségekből vezették le a szintellipszoid potenciálelméleti összefüggéseivel a Föld normálalakjával azonos vonatkoztatási ellipszoidnak (*Reference Ellipsoid 1967) f geometriai lapultságát,* az akkor új normál nehézségi képlet (*Gravity Formula 1967)* γ_e , β, és β_1 együtthatóját és a normál nehézségi erőtér további jellemzőit.

A számított eredmények:

$$f = 1/298{,}247\ldots$$

$$\gamma_e = 9{,}780\ 318 \text{ N/kg (vagy ms}^{-2})$$

$$\beta = 0{,}005\ 3024$$

$$\beta_1 = –0{,}000\ 0059$$

$$U_0 = 6{,}263\ 703 \cdot 10^7 \text{ J/kg (vagy m}^2\text{s}^{-2})$$

$J_2^* \equiv J_{2\,Föld}$ (méréssel meghatározott kiinduló érték)

$J_4^* = -2{,}37 \cdot 10^{-6}$

. . . .

A kiinduló mennyiségekkel kapcsolatban megjegyezzük, hogy *kM,* J_2 és *a* a mesterséges holdak pályamozgásának megfigyelése révén levezetett érték, amelyek közül az első kettő csaknem közvetlen meghatározás eredménye, míg *a* értékének további kis változása várható volt. Ezért az így kapott ellipszoidot még nem tekintjük a Föld *legjobb* ellipszoidi normálalakjának, csak a Földet *jól megközelítő* ellipszoidnak, amely azonban geodéziai *vonatkoztatási felületnek* teljesen megfelelt.

A hazai gyakorlatban az *Egységes Országos Térképrendszer* alappont-hálózatának vonatkoztatási ellipszoidjaként mi is bevezettük, és azóta is használjuk.

A XX. század későbbi évtizedeiben a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) közgyűlésein tovább finomította a geodéziai földmodellt. A kapott eredmények közül a Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió 1980-ban fogadott el, és ajánlott *újabb nemzetközi Geodéziai Vonatkoztatási Rendszert* **GRS80** megjelöléssel.

Ebben ugyanazon kiinduló mennyiségekkel számoltak, mint a GRS67 megalkotásakor, de újabb számértékekkel. Lényeges változás az *a* fél nagytengely hosszban van, ez csökkent 23 m-rel, *kM* és J_2 alig változott, míg ω maradt változatlan.

A kiinduló adatok, tehát

$kM = 3{,}986\,005 \cdot 10^{14}$ Nm^2/kg (vagy m^{3}s^{-2}),

$\omega = 7{,}292\,115 \cdot 10^{-11}$s^{-1},

$J_2 = 1082{,}63 \cdot 10^{-6}$ és

$a = 6\,378\,137$ m.

A belőlük levezetett további jellemzők :

$1/f = 298{,}257\,222\,101$

$\gamma_e = 9{,}780\,326\,7715$ N/kg (vagy ms^{-2})

$\beta = 0{,}005\,302$

$U_0 = 6{,}263\,686\,850 \cdot 10^{-7}$J/kg (vagy m^{2}s^{-2})

$J_2^* \equiv J_{2\,Föld}$ (méréssel meghatározott kiinduló érték)

$J_4^* = -2{,}370\,912\,22 \cdot 10^{-6}$

. . . .

Megjegyezzük, hogy mivel mind a GRS67, mind pedig a GRS80 vonatkoztatási rendszer kiinduló adatát képező *kM* értéket mesterséges holdak észleléséből határozták meg, ez a Föld *légkörének tömegét is* tartalmazza. Következésképpen a kiszámított normál nehézségi értékek közel $1 \cdot 10^{-5}$ N/kg-mal (vagy 1 mgallal) nagyobbak a kelleténél. A $g-\gamma$ nehézségi rendellenességek számításakor ezt a mérési hely magasságának megfelelő javítással figyelembe kell venni.

A mesterséges holdas helymeghatározások (pl. a GPS) vonatkoztatási rendszere a **Geodéziai Világrendszer 1984** (*World Geodetic System*) = **WGS84,** amit ugyancsak a szintellipszoid elméletével alkottak meg. Ezt az Amerikai Egyesült Államok védelmi térképészeti szervezete (*Defence Mapping Agency = DMA)* fejlesztette ki,1960 óta több változatban. Az 1984-es megoldás kiinduló mennyiségeiből három megegyezik a GRS80 számértékével. A negyedik abban különbözik, hogy a mesterséges holdak észleléséből nem J_2 -t, hanem a potenciálfüggvény gömbfüggvénysora másodfokú együtthatójának $\overline{C}_{2,0}$ normalizált értékét vették fel, kettővel több értékes számjeggyel.

Így a kiinduló értékek:

$kM = 3{,}986\ 005 \cdot 10^{14}$ Nm^2/kg (vagy m^{3}s^{-2}),

$\omega = 7{,}292\ 115 \cdot 10^{-11}$s^{-1},

$\overline{C}_{2,0} = -484{,}166\ 85 \cdot 10^{-6}$ és

$a = 6\ 378\ 137$ m.

A belőlük kiszámított tovább jellemzők is kis mértékben különböznek a GRS80 értékeitől:

$1/f = 298{,}257\ 223\ 563$

$\gamma_e = 9{,}780\ 326\ 7714$ N/kg (vagy ms^{-2})

$\gamma_p = 9{,}832\ 186\ 3685$ N/kg (vagy ms^{-2})

$U_0 = 6{,}263\ 686\ 084\ 97\ 10^{-7}$J/kg (vagy m^{2}s^{-2})

$J_2^* = -\sqrt{5}\ \overline{C}_{2,0} = 1082{,}629\ 989\ 05\, J_{2\,Föld}$ (a méréssel meghatározott kiinduló $\overline{C}_{2,0}$ értéknek megfelelő $J_{2\,Föld}$ érték)

. . . .

Ebben a rendszerben a szintellipszoid felszínére a *normál nehézségi térerősséget* nem a sorbafejtett (3431.3) alakban, hanem *Somigliana* (3431.2) zárt képletének kissé átalakított, ugyancsak zárt

$$\gamma = \gamma_e \frac{\left(1 + k \sin^2 \varphi\right)}{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)^{1/2}}$$

alakjából számítják, ahol a *k* együttható itt nem a *Newton*-féle általános tömegvonzási állandó, hanem

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1$$

és

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

a szintellipszoid első numerikus excentricitásának négyzete.

Ezért a kiinduló mennyiségekből kiszámították még

$$k = 0{,}001\ 931\ 851\ 386\ 39 \quad \text{és} \quad e^2 = 0{,}006\ 694\ 379\ 990\ 13$$

értékét is.

*

Ezzel áttekintettük azokat a legjelentősebb geodéziai vonatkoztatási rendszereket, amelyek széles körben elterjedtek a nemzetközi gyakorlatban. Elvileg ezek mindegyike alkalmas a geodézia feladatainak a megoldásához, közöttük a különbség abban van, hogy a mérési módszerek és megbízhatóságuk fejlődésével az újabb vonatkoztatási rendszerek jellemzői (paraméterei) számszerűségükben a Föld megfelelő jellemzőjének egyre jobb közelítését adják.

343.3. A közepes földi ellipszoid

Mint az előzőekben láttuk, geodéziai földmodell, a szintellipszoid és külső nehézségi erőtere négy kiinduló mennyiségnek a Földre vonatkozó értékéből határozható meg. Ezek viszont gyakorlatilag csak mérésekből vezethetők le, így elkerülhetetlenül hibával terheltek. Mivel mérési módszereink és műszereink egyre tökéletesednek, a kiinduló mennyiségeknek is egyre pontosabb értékét ismerjük meg, amelyekből újabb és újabb vonatkoztatási rendszereket határoztak meg (GRS67, GRS80, stb.). Ezek mind annak az egyetlen - ideális (elképzelt) - vonatkoztatási rendszernek az egyre jobb megközelítői (realizációi), melynek kiinduló mennyiségei *pontosan (hibátlanul) megegyeznek a Föld megfelelő fizikai jellemzőjével.*

A Föld valódi (hibátlan, vagy pontos) kiinduló adataiból meghatározott szintellipszoidot nevezzük *közepes földi ellipszoidnak*. Ez a Föld *legjobb* ellipszoidi közelítője mind geometriai, mind fizikai értelemben.

Geometriai értelemben kielégíti a simulásnak mind a geoid-ellipszoid távolságok, mind pedig a függővonal-elhajlások négyzetösszegének minimum feltételét.

Fizikai értelemben kielégíti a nehézségi-rendellenességek négyzetösszegére vonatkozó minimum feltételt, és nehézségi erőtere a Föld külső nehézségi erőterét jól közelíti, ugyanis a normál potenciálfüggvény gömbfüggvénysorának n = 0-tól n = 2-ig terjedő tagjai a Földével megegyeznek.

Mindezek mellett a közepes Földi ellipszoid fogalmán keresztül szabatosan és egyértelműen értelmezhetővé válik a „*Föld egyenlítői félátmérője*” „*a Föld lapultsága*” és a „*földi egyenlítői nehézségi érték*” fogalma is.

Az eddigi gyakorlat által meghatározott vonatkoztatási rendszerek, ill. ezek alapfelületét képező vonatkoztatási ellipszoidok a közepes földi ellipszoid többé-kevésbé jó megközelítői.