1. ALAPFOGALMAK

11. A felsőgeodézia feladata, kapcsolatai

A **geodézia** a helymeghatározás tudománya. Gyakorlati feladata *a Föld (vagy más égitest) méreteinek, alakjának, térbeli tájékozásának, külső nehézségi erőterének és időbeli változásaiknak meghatározása.*

Ezen belül az **alsógeodézia** a kisebb kiterjedésű területek részletes felmérésével foglalkozik, a **felsőgeodézia** feladata pedig a nagyobb kiterjedésű területek – országok, földrészek és az egész Föld – egységes felmérésének elméleti és gyakorlati megalapozása.

Ebbe a feladatkörbe tartozik a Föld egésze, mint égitest, *méretének, alakjának és külső nehézségi erőterének* a meghatározása. A földtest *térbeli tájékozásának* kérdésével a Kozmikus geodézia tantárgy foglalkozik, ugyanis a Föld helyzetét a forgástengelyen a pólusmozgás, és a forgástengelynek csillagokhoz viszonyított térbeli helyzetét a precesszió és a precessziózavar (vagy csillagászati nutáció) jellemzi.

A felsőgeodézia ismeretanyaga alapvetően a természettudományokból fejlődött ki, így közvetlenül épül a matematika, (a felületek elmélete, a potenciálelmélet, stb.), a fizika (a tömegvonzás), a mechanika (a szabad tengely körüli forgó mozgás elmélete), a csillagászat (az asztrometria és az égi mechanika), a geofizika (a Föld alakját és méreteit befolyásoló fizikai folyamatok) valamint a geológia egyes fejezeteire.

A felsőgeodézia szoros kapcsolatban áll a geodézia többi tudományterületei közül a kozmikus geodéziával, az országos felméréseket megalapozó geodéziai alaphálózatok létesítésével kapcsolatos gyakorlati ismeretekkel és kiterjedten alkalmazza a kiegyenlítő számítások módszereit.

12. A földalak fogalmak

A Föld alakjáról a továbbiakban kétféle értelemben fogunk beszélni. Megkülönböztetjük a Föld *fizikai* és az *elméleti* (vagy *matematikai*) *alakját*.

A **Föld fizikai alakján** a szilárd Föld határoló felülete és a felszíni vizek (tavak, tengerek stb.) nyugalomban képzelt (idealizált) felszíne által alkotott felületet értjük. Ez, főként a szárazföldeken igen változatos, szabálytalan felület. Ezt ábrázolják analóg módon, pl. a topográfiai, vagy a hegy- és vízrajzi földrajzi térképeink, digitálisan a térinformatikai adatbázisaink, digitális terepmodelljeink.

A földfelszínnek mintegy 70%-át tengerfelszínek alkotják. Már az ókorban is úgy gondolták, hogy a Föld *egészének* az alakját jobban képviseli a világtengerek sokkal simább, szabályosabb alakú felszíne (és ennek a szárazföldek alatti képzeletbeli kiterjesztése). Az ismeretek különböző fejlettségi fokán a (nyugalomban képzelt) tengerfelszínt más-más matematikai felületnek vélték, és mindenkor ezt tekintették a **Föld elméleti (vagy matematikai) alakjának.**

A korábbi primitív világszemlélet után, amely a Földet *lapos korongnak* képzelte, már az ókori görög, babiloni és más kultúrákban megjelentek azok a tudósok, akik a Föld (elméleti, vagy matematikai) alakját *gömbnek* (a helyi függőleges irányokat gömbsugaraknak) tartották, és a maguk akkori egyszerű eszközeivel – ma meglepő megbízhatósággal – meghatározták egyetlen méretét, a gömb *R* sugarát.

Ez a felfogás tartotta magát egészen a XVII. századig, amikor *Newton* mechanikájának (egyebek mellett a tömegvonzás és a forgásból származó (centrifugális) erőhatás) ismeretében tudatosult az, hogy forgó, folyadékszerű tömeg egyensúlyi alakja gömb nem, hanem valamily*en forgási ellipszoid* lehet. Ennek megfelelően, a nyugalomban képzelt tengerek felszínét valamely ellipszoid felületdarabjainak, a helyi függőleges irányokat ezen ellipszoid felületi normálisainak tekintették. Ettől kezdődően a Föld matematikai (elméleti) alakjának meghatározására végzett mérések és számítások célja a tengerfelszíneknek megfelelő forgási ellipszoid két méretének, az *a* és a *b* tengelyhosszúságnak megállapítására irányultak.

Háromszögelési és földrajzi helymeghatározási munkái során *Gauss* figyelt fel arra, hogy a geodéziai alapponthálózatának pontjaiban a helyi függőleges irányok többé-kevésbé szabályos eltérést mutattak az ellipszoidi normálisoktól. Annak ismeretében, hogy a szabad folyadékfelszín egyensúlyi állapotában – ha rá csak a nehézségi erő hat – minden pontjában merőleges a nehézségi erő (a helyi függőleges) irányára, arra következtetett, hogy a tengerek felszíne nem forgási ellipszoid alakú, hanem a Föld tömegeloszlásának szabálytalanságai miatt ennél változatosabb felület.

Mint későbbben [1.4.] látni fogjuk, valamely erőtérben az erő irányára merőlegesen futó felületeket *szintfelületeknek* nevezzük. Így *Gauss* végül is azt állapította meg, hogy a nyugalomban képzelt tengerek felszíne (és ennek a szárazföldek alatti kiterjesztése) a *nehézségi erőtér szintfelületének alakját veszi fel.*

A megfigyelések szerint a tengerek tényleges szabad felszíne – különböző fizikai hatások következtében – egyrészt helyenként, másrészt ugyanazon helyen is az idő függvényében más és más szintfelületen helyezkedik el. Ezért a földalak-fogalom egységes értelmezése érdekében a szóbajöhető tengerfelszínek közül egyet – *valamely tenger középtengerszintje közelében kijelölt ponton áthaladó szintfelületet* – választjuk. Ezt tekintjük a tengerek nyugalomban képzelt (idealizált) felszínének. Ezt a felületet és ennek a szárazföldek alatti meghosszabbítását tekintjük a Föld elméleti (vagy matematikai) alakjának, amit idegen szóval *geoidnak* nevezünk. Ez, a Föld fizikai alakjánál sokkal kevésbé változatos, simább lefutású, de az ellipszoidnál bonyolultabb felület (amelynek az ellipszoidhoz viszonyított hullámai ± 130 méternél nem nagyobbak).

Megjegyezzük, hogy a valódi (pillanatnyi) tengerfelszínek eltérése a geoidtól mintegy ± 15 m-en belüli érték, ami az idő függvényében folyamatosan változik. Hosszabb időtartamra középértéket képezve az eltérés mintegy ± 2 m-nél kisebb. Ezt nevezzük a *tengerfelszín topográfiájának*, aminek a pillanatnyi tengerfelszínre végzett méréseknek a geoidra átszámításakor van jelentősége.

A földalak fogalom kettősségének megfelelően a földalak meghatározás is kettős feladatot jelent:

- a Föld *fizikai alakjának* (a fizikai földfelszínnek) és
- a Föld *elméleti (matematikai) alakjának* (a geoidnak) a meghatározását.

Mindkettőnek fontos gyakorlati jelentősége van. A *felsőgeodéziában* a Föld meghatározandó *fizikai alakját* a fizikai földfelszínen kijelölt és gondosan állandósított, egymástól néhányszor tíz kilométerre fekvő geodéziai alaphálózati pontok – országokra, földrészekre, az egész földfelszínre kiterjedő (poliédert alkotó) – halmaza és a térbeli helyzetüket megadó koordináták jegyzéke (adatbázisa) jelenti. (A Föld fizikai alakja, vagy a topográfiai földfelszín további részleteinek az alaphálózati pontokra támaszkodó meghatározása és analóg, vagy digitális megjelenítése már *alsógeodéziai* feladat, amivel jelen keretek között nem foglalkozunk.)

Föld *elméleti (matematikai) alakjának* a különös gyakorlati jelentősége abban van, hogy ehhez viszonyítjuk a Föld fizikai felszínén fekvő pontok magasságát (tengerszint feletti magasság). Ezért – különösen a GPS korában – a geoid alakjának meghatározása a mindennapi alsógeodéziai gyakorlat számára is nélkülözhetetlenné vált, mert ennek ismerete teszi lehetővé, pl. a mesterséges holdak észlelésével meghatározott magassági mérőszámoknak *geoid (tengerszint) feletti* magassággá átszámítását.

A geoid, mint a földi nehézségi erőtér szintfelülete, képet ad az erőtér eloszlásáról, így megismerése a geodézia egyik alapfeladata megoldásának, a *nehézségi erőtér meghatározásának* is részét képezi.

A Föld fizikai és elméleti (matematikai) alakjának bizonyos időközönkénti *ismételt meghatározásai* lehetővé teszik a földfelszíni pontok, velük az egyes kéregdarabok, táblák térbeli elmozdulásának, rajtuk keresztül a *földtest időbeli alakváltozásainak* tanulmányozását (vízszintes és függőleges mozgásvizsgálatok). Ezekre a mérési eredményekre támaszkodnak a *geodinamikai* vizsgálatok.

Megjegyezzük, hogy a Föld korábbi matematikai alakjai, a gömb és a forgási ellipszoid sem vesztette el jelentőségét a geodéziában. Az *ellipszoid*, pl. mint a geoidot jól közelítő, viszonylag egyszerű, szabályos matematikai felület, amely a Föld méretét, alakját egészében (a részletek nélkül) jól szemlélteti (modellezi) (*földmodell,* vagy a *Föld normálalakja*), és amely vonatkoztatási (viszonyítási) alapul szolgál mind a Föld fizikai, mind elméleti alakjának meghatározásához (*vonatkoztatási,* vagy *alapfelület*) most is használatos. (Ezekkel a fogalmakkal a későbbiekben fogunk megismerkedni.)

A *gömböt* pedig pl. *simulógömbként* használjuk a földfelszín kisebb kiterjedésű darabjainak matematikai leképezésekor (vetületi számításokban), stb.

13. Potenciálelméleti alapfogalmak

A Föld elméleti (matematikai) alakját szintfelületként értelmezzük. Ennek matematikai tárgyalásához szükséges a matematika potenciálelméletnek nevezett részének rövid összefoglalása.

131. A potenciál fogalma

Ha valamely *x,y,z* háromdimenziós tér minden pontjához valamilyen *V skalár mennyiség* tartozik, akkor **skalár térről** beszélünk. Ennek leírására a *V = V(x,y,z) = V(***r***)* skalár-vektor függvényt használjuk. Erről feltételezzük a továbbiakban, hogy folytonos és differenciálható. (Itt **r** = **r**(*x,y,z*) a pont helyvektora és *x,y,z* ennek derékszögű összetevői.)

A térnek valamely azonos skalár értékkel jellemzett pontjai felületet alkotnak, amelyet a skalár mennyiség *szintfelületének* nevezünk. Ennek leírására a

$$V = V(x,y,z) = V(\mathbf{r}) = \text{állandó}$$

egyenletet használjuk. A skalár mennyiség térbeli változását a *gradiens vektorral* jellemezhetjük. Ennek hatásvonala merőleges a szintfelületre (a legnagyobb változás irányába mutat), értelme a skalár mennyiség növekedésével egyező és nagysága a skalár mennyiség függvényének a legnagyobb változás irányába eső differenciálhányadosával egyenlő. Ilyen értelemben a gradiens vektor nagysága (abszolút értéke) tehát a skalár mennyiségnek a legnagyobb változás irányába eső *hosszegységre vonatkoztatott változását* mutatja.

A gradiens vektor tetszőleges irányú összetevőjének nagyságát megkaphatjuk a skalár mennyiség függvényének kiválasztott irány szerinti differenciálásával.

Ha az *x,y,z* háromdimenziós tér minden pontjához valamilyen **A** *vektor mennyiség* tartozik, akkor **vektortérről** beszélünk**.** Ennek leírására az **A** = **A**(*x,y,z*)=**A**(**r**) vektor-vektorfüggvényt használjuk. Erről feltételezzük a továbbiakban, hogy a szóban lévő térben véges és folytonos.

Ha valamely **A** = **A**(*x,y,z*) = **A**(**r**) vektortér felfogható, mint a *V*(*x,y,z*) = *V*(**r**) skalár mennyiség gradiensvektorainak a vektortere, akkor a *V skalár mennyiség az* **A** *vektortér potenciálja.* Ez esetben az **A** vektor tetszőleges irányú összetevőjének nagyságát a skalár mennyiség függvényének (a potenciálfüggvénynek) megfelelő irányú deriváltjaként kapjuk.

Ha a vektortér valamilyen erőtér **f** térerősség-vektorainak a tere, akkor az előbbi módon hozzárendelhető skalár mennyiséget *mechanikai potenciálnak* nevezzük. (Emlékeztetünk, hogy a *térerősség* a fajlagos (pl. tömegegységre, töltésegységre, stb.) vonatkoztatott erőhatás.) A térerősség(-vektor) és a hozzárendelhető *V* potenciál kapcsolata

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}, \qquad (131.1)$$

ahol **i**, **j, k** a koordináta-irányokba mutató egységvektorok.

A mechanikai potenciál *létezésének feltétele* az, hogy az erőtérben végzett elemi munka a potenciál teljes differenciáljával legyen egyenlő, azaz

$$dL = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = dV \qquad (131.2)$$

A *potenciálos erő munkája* független az úttól, és éppen az út két végpontjának potenciálkülönbségével egyenlő.

Ezekből következik, hogy a mechanikai potenciál munka mértékegységű skalár mennyiség. A geodéziában a nehézségi erőtérrel kapcsolatban általában a tömegegységre (1 kg-ra) vonatkoztatott (fajlagos) erőhatást, a nehézségi térerősséget (mértékegysége Newton/kilogramm = N/kg), és ennek megfelelően a *tömegegységre vonatkoztatott (fajlagos) munkát* használjuk a potenciál mérőszámaként (mértékegysége Joule/kilogramm = J/kg, ami egyszerűsítve $m^2\ s^{-2}$ az SI rendszerben).

Ha a vektortérben az erővektorok valamely közös középpont felé irányulnak és nagyságuk az ettől mért távolság függvénye, akkor *központos (centrális) erőtérről* beszélünk.

Ha pedig az erővektorok valamely egyenesre merőlegesen állnak és nagyságuk az ettől mért távolság függvényeként változik, akkor *hengeres erőteret* mondunk.

Az erőtér *örvénymentes*, ha a rotációja nulla

$$\mathbf{rot\ f} = \nabla\times\mathbf{f} = 0\ , \tag{131.3}$$

ahol a nabla vektor, $\nabla = \partial/\partial x\ \mathbf{i} + \partial/\partial y\ \mathbf{j} + \partial/\partial z\ \mathbf{k}$, a *Hamilton-féle operátor*. A potenciálos erőtér mindig örvénymentes.

Az erőtér *forrásmentes,* ha a divergenciája nulla

$$\mathrm{div}\ \mathbf{f} = \nabla\cdot\mathbf{f} = 0\ . \tag{131.4}$$

Potenciálos erőtérben

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad}\ V = \nabla V.$$

Ezzel

$$\mathrm{div}\ \mathbf{f} = \mathrm{div}\ \mathbf{grad}\ V = \nabla\nabla V = \Delta V = 0, \tag{131.5}$$

ahol $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, a *Laplace-operátor* és

$$\mathrm{div}\ \mathbf{f} = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{131.6}$$

a *Laplace-egyenlet*, aminek a későbbiekben fontos szerepe lesz. (Megjegyezzük, hogy a (131.6) jobb oldala (az ún. forrásfüggvény) csak forrásmentes térben (mint pl. a Föld tömegén kívül) nulla, *forrásos térben* (pl. a Föld belső terében) nullától eltérő valamilyen függvény.

A potenciál fogalmának bevezetése azért előnyös, mert sok esetben az erőtér leírására ezt a skalár mennyiséget használhatjuk a vektorfüggvények helyett.

132. A tömegvonzás potenciálja

Képzeljük el a tér $\mathbf{r}_M$ helyvektorral megadott pontjába helyezett *M tömegpont* körül Newton-féle tömegvonzás hatására keletkező erőteret. A térnek az $\mathbf{r}$ helyvektorral jellemzett tetszőleges pontjában az $\mathbf{f}$ *térerősség* nagyságát az általános tömegvonzás

$$\mathbf{f} = -k \frac{M}{l^2} \frac{\mathbf{l}}{l} \qquad (132.1)$$

törvénye írja le, ha bevezetjük az $\mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_M$ jelölést. (Ebben $k = 6{,}672\,59 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}, vagy m^3 kg^{-1} s^{-2}, a *Newton*-féle tömegvonzási állandó.) A vonzó erő a tér minden pontjából az M tömegpont felé irányul, így az $\mathbf{f}$ vektorok *központos erőteret* alkotnak.

Ha kiszámítjuk az $\mathbf{f}$ erő dL elemi fajlagos munkáját és ezt egyenlővé tesszük valamely V skalárfüggvény dV teljes differenciáljával, olyan elsőrendű, lineáris differenciálegyenletre jutunk, amelynek integrálásával kapjuk a

$$V = k \frac{M}{l} \qquad (132.2)$$

skalárfüggvényt. Mivel ez kielégíti a mechanikai potenciál létezésének $dL = dV$ feltételét (hiszen éppen ebből számítottuk ki), ez a skalárfüggvény az *M tömegpont által keltett tömegvonzási erőtér potenciálfüggvénye.* Ehhez az erőtérhez tehát sikerült találni megfelelő skalár függvényt, azaz potenciált.

A (132.2) értelemszerű alkalmazásával kiszámíthatjuk valamely tetszőleges **test** tömege által keltett tömegvonzási erőtér potenciálját is a test külső terére. A (132.2)-höz hasonló potenciálfüggvényt értelemszerűen felírhatjuk egyenként a test minden egyes dM tömegelemére. Mivel a test valamennyi elemi tömegpontja által keltett vonzási potenciál azonos jellegű skalár mennyiség, ezek a P pontban egyszerűen összegezhetők. Így jutunk az egész *test tömege által keltett vonzási potenciál*

$$\mathrm{V} = \mathrm{k} \int_{\text{test}} \frac{dM}{l} \qquad (132.3)$$

függvényére. Ebből a potenciál értéke minden olyan esetben kiszámítható, ha ismerjük és matematikailag kezelhető módon le tudjuk írni a test sűrűségeloszlását (azaz minden térfogateleméhez tartozó sűrűséget) és a test határoló felületének alakját.

A potenciálfüggvény vizsgálata alapján megállapítható, hogy a **külső, forrásmentes térben** a vonzási potenciál, ennek első és második differenciálhányadosai a végesben véges, folytonos, egyértékű függvények. A potenciál és ennek első deriváltjai a végtelenben reguláris függvények. Mivel a forrásmentes térben az erőtér divergenciája nullaértékű, a potenciálfüggvény kielégíti a (131.6) Laplace- egyenletet, azaz harmonikus függvény. A potenciál *szintfelületei analitikus felületek.*

A vonzó **tömegen belül (a belső térben)** a potenciálfüggvény és első deriváltjai véges, folytonos, egyértékű függvények, de a második deriváltak a sűrűségi határfelületeken ugrásszerű változásokat szenvednek. A vonzó tömegen belül az erőtér divergenciája zérustól eltérő, a helyi sűrűségtől függő véges érték. A potenciál *szintfelületei analitikus felületdarabok mozaikjaiból állnak.*

Feladatok:

- Ellenőrizzük az utoljára kapott potenciálfüggvény mértékegységét, hogy megfelel-e a korábban mondottaknak?
- Vizsgáljuk meg, hogy milyen alakúak lesznek a centrális erőtér potenciáljának a *V = állandó* értékkel jellemzett szintfelületei!

- Ellenőrizzük, hogy a potenciálfüggvény gradiense megadja-e a térerősség vektorát, vagy valamely koordináta-tengely irányú deriváltja megegyezik-e a térerősség ugyanilyen irányú összetevőjével?
- Számítsuk ki az erőtér divergenciáját és a rotációját. Állapítsuk meg ebből, hogy az erőtér forrásmentes és örvénymentes, azaz valóban potenciálos-e?
- Számítsuk ki az R sugarú és ϑ = állandó (homogén) sűrűségű gömb alakú tömeg vonzási potenciáját a középpontjától $r_P > R$ távolságra lévő P pontban!
- Ellenőrizzük az eredményt, egyrészt a mértékegység szempontjából, másrészt, hogy a kapott potenciálfüggvény sugárirányú deriváltja valóban a térerősséget adja-e?
- Milyen lesz az így keletkező erőtér, milyen alakúak lesznek a szintfelületei és az erővonalai?

Vegyük észre, hogy a külső hatás szempontjából a homogén gömb alakú tömeg a tömegközéppontjába sűríthető! Ugyanez igaz bármely gömbszimmetriás tömegeloszlású, gömb alakú tömeg esetében is.

133. A forgásból származó erőtér potenciálja

Ha a tér tetszőleges vizsgált pontjában elképzelt tömegpont valamely forgástengely körül ω szögsebességgel forog, és eközben p sugarú körpályán mozog, akkor rá a forgásból származó (centrifugális) erő hat. Az így keletkező erőtérnek a térerőssége

$$\mathbf{f}_F = \mathbf{p}\cdot\omega^2. \qquad (133.1)$$

Ha ennek a d**p** sugárirányú elemi elmozdulás mellett végzett dL elemi fajlagos munkáját kiszámítjuk és egyenlővé tesszük valamely $V_F(x,y,z)$ skalárfüggvény dV_F teljes differenciáljával, akkor megint elsőrendű, lineáris differenciálegyenletre jutunk, amiből integrálással a

$$V_F = \tfrac{1}{2}\, p^2\, \omega^2 \qquad (133.\ 2)$$

skalár függvényalakot nyerjük. Ez a *forgásból származó erőtér potenciálja*.

Feladatok:

- Ellenőrizzük, hogy a (133.2) potenciálfüggvényből deriválással megkapható-e a térerősség.
- A 131. végén mondottak figyelembevételével állapítsuk meg, hogy milyen lesz az erőtér eloszlása és milyen alakúak a forgási centrifugális erőtér potenciáljának szintfelületei?
- Számítsuk ki az erőtér divergenciáját!

14. A földi nehézségi erőtér

141. A földi nehézségi erőtér potenciálja

A földi *nehézségi erő* a földi tömegek *Newton*-féle tömegvonzásának, a forgásból származó (centrifugális) erőnek és a külső égitestekkel kapcsolatos árapálykeltő erőnek az eredője. Ez utóbbi viszonylag kicsi, de gyorsan változó érték. Annak érdekében, hogy a nehézségi adataink ezt a rövidperiódusú, gyors változást ne tartalmazzák, mérési eredményeinkből az árapálykeltő erő hatását levonjuk, és a nehézségi értékeket így használjuk fel. A későbbiekben, amikor szükséges, az árapály-hatás adott időpontra vonatkozó értékének hozzáadásával vissza tudjuk állítani a bármikori természetbeni értéket.(Részletesen a Geofizika tantárgy foglalkozik vele.)

Geodéziában – mint már említettük – az erőhatást általában a tömegegységre vonatkoztatjuk, így a *nehézségi erőtér*

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_\mathrm{F} + (\mathbf{f}_\mathrm{Á}) \qquad (141.1)$$

térerősségét használjuk. (Mértékegysége: N/kg.) Sztatikai számításokban ez szerepel, amikor kiszámítjuk valamely *nyugalomban* lévő *m* tömegű testre ható

$$\mathbf{G} = m\cdot\mathbf{g} \qquad (141.2)$$

nehézségi erő nagyságát (a test súlyát).(Ennek mértékegysége: N.)

Fogalmilag ettől megkülönböztetjük a *szabadesés gyorsulását*, vagy – ahogy geodéziában gyakran használják – a *nehézségi gyorsulást*, ami *dinamikai* számításokban (mint pl. szabad esés, függőleges és ferde hajítás) szerepel. (Ennek mértékegysége ms^{-2}.)

A nehézségi erőtérben szabadon eső *m* tömegű test *dinamikai egyensúlyát Newton 1. törvénye* szabja meg, ami esetünkben

$$\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a}_\mathrm{g}\ . \qquad (141.3)$$

A testre ható összes erők eredője most **F** = **G,** amibe beírva a (141.2)-t, és egyszerűsítve *m*-mel, kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}_\mathrm{g} = \mathbf{g}, \qquad (141.4)$$

vagyis a *szabadon eső test* $\mathbf{a}_\mathrm{g}$ *gyorsulása* irány, értelem és nagyság szerint megegyezik a *nehézségi térerősséggel*.

Fogalmilag, és ehhez kapcsolódóan mértékegységükben azonban különböznek egymástól, mert az egyik *térerősség,* míg a másik *gyorsulás,* amit nem célszerű összekeverni. Nem szerencsés ugyanis a sztatikai nyugalomban lévő test súlyát a tömeg és a nehézségi gyorsulás szorzataként értelmezni, hiszen a nyugalomban lévő test gyorsulása értelemszerűen *nulla*! Gyorsulásról csak mozgásban lévő tömeggel kapcsolatban beszélhetünk.

A továbbiakban a nehézségi erőtér leírására a **g** *nehézségi térerősséget* fogjuk általában használni. (Ez felel meg az angol, ill. német nyelvű *„gravity”,* ill. *„Schwere”* kifejezésnek.) A szabadesés gyorsulásáról (*„acceleration of the free fall”,* ill. *„Schwerebeschleunigung”*) csak a szabadon eső test mozgásának leírásakor fogunk beszélni. (A magyar szaknyelvben a két fogalom általában nem válik el, és többnyire – mindkét értelemben – a nehézségi gyorsulást használják. Mértékegységre mindkét értelemben a ms^{-2} használata terjedt el, ami a térerősség vonatkozásában a N/kg-nak kg-mal egyszerűsített alakjaként is felfogható.)

Mivel a nehézségi erő valamennyi összetevője potenciálos erő, ezek potenciáljának összegezésével állítjuk elő a nehézségi erő potenciálfüggvényét a

$$W = V + V_\mathrm{F}\ (+V_\mathrm{Á}) = \mathrm{k}\int_{\mathrm{Föld}} \frac{dM}{l} + \tfrac{1}{2}\, p^2\, \omega^2 + (V_\mathrm{Á}) \qquad (141.5)$$

alakban, ahol az árapálykeltő erő zárójelbe tett potenciáljától egyelőre eltekintünk. Mértékegysége – az eddigieknek megfelelően – J/kg.

A Földön kívüli térségben, ahol az ott lévő tömegpontok nem vesznek részt a Föld forgásában (mint, pl. a mesterséges holdak) a nehézségi erőtér potenciálja csak a tömegvonzásból származó $V = V(\mathbf{r})$ potenciálfüggvényre korlátozódik (az árapálykeltő erő potenciálját itt is külön javítással vesszük figyelembe, ahol erre szükség van).

142. A nehézségi erőtér potenciáljának szintfelületei és erővonalai

A térnek azon pontjai, melyekben a nehézségi erőtér potenciálja ugyanazon számérték, a nehézségi erőtér potenciáljának *szintfelületeit* alkotják. Valamely szintfelület pontjainak a helyzetét a

$$W = W(x,y,z) = W(\mathbf{r}) = \textit{állandó} \qquad (142.1)$$

egyenlettel adhatjuk meg. Mivel a szintfelületeket meghatározó állandó (munkaérték) végtelen sok lehet, ezért szintfelület is végtelen sok van, amelyek héjszerűen veszik egymást körül. A nehézségi erőtér potenciáljának szintfelületei (a továbbiakban röviden: szintfelületek) értelemszerűen [131.] minden pontban merőlegesen haladnak a nehézségi erő (térerősség) irányára. Ha egymást burkoló szintfelületeken kijelöljük a nehézségi erő (térerősség) irányát más szóval a helyi *függőlegest* akkor a szintfelületekre merőlegesen haladó görbesereget (ortogonális trajektóriákat) kapunk. Ezek a nehézségi erőtér *erővonalai*, vagy más néven *függővonalai*.

A függővonal ívelemét **dH**-val jelölve (pozitív értelmét a külső tér irányába felvéve) kiszámíthatjuk, hogy mennyi munkavégzés árán juthatunk az ívelem egyik végpontjáról a másik végpontján áthaladó szintfelületre. Ez éppen a két szintfelület elemi nagyságú

$$dW = \mathbf{g}\cdot\mathbf{dH} = -g\, dH \qquad (142.1)$$

potenciálkülönbsége. Ebből a

$$\frac{dW}{dH} = -g \qquad (142.\ 2)$$

alapvető összefüggés következik.

A szintfelületek általános tulajdonságait a következőkben foglalhatjuk össze:

- a szintfelületen a potenciál értéke W = állandó, fajlagos munkaérték, mértékegysége J/kg, a szintfelület a *nehézségi térerősség potenciáljának* szintfelülete;
- a szintfelület merőleges a nehézségi térerősség vektorára, $\mathbf{g} = \mathbf{grad}W$;
- a szintfelület mentén elmozdulva munkavégzés nincs, a szintfelület bármely pontja ugyanazon munkával érhető el;
- két szintfelület között végzendő (vagy az erőtér által végzett) munka állandó, és egyenlő a két szintfelület potenciálkülönbségével;

- valamely szintfelület potenciálértéke az a munkamennyiség, amennyit el kell végezni az erőtérrel szemben, ha 1kg tömeget a szintfelületről nulla potenciálú helyre (pl. gyakorlatilag a csillagközi térbe) akarunk juttatni (pl. űreszközök felbocsátása);
- a szintfelületek potenciálértékét egyelőre mérni nem tudjuk, de potenciálkülönbségüket igen. A geoid potenciálértéket közvetett úton, számítással tudjuk meghatározni [343.].

143. *A* szintfelületek és a függővonalak görbülete

A szintfelületek és a függővonalak görbületi viszonyai a potenciálfüggvény *második differenciálhányadosaival* jellemezhetők.

Helyi vízszintes (érintő) síkú *x,y,z* koordináta-rendszerben a szintfelületek *x* és *y* irányú görbülete

$$\frac{1}{R_x} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{W_{xx}}{g} \qquad (143.1a)$$

és

$$\frac{1}{R_y} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{W_{yy}}{g}\ . \qquad (143.1b)$$

Az átlagos görbület

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right) = -\frac{W_{xx}+W_{yy}}{2g}\ . \qquad (143.\ 2)$$

A szintfelület görbülete tetszőleges *A* azimútú vertikális síkban

$$\frac{1}{R_A} = -\frac{1}{g}(W_{xx}\cos^2 A + W_{yy}\sin^2 A + 2\ W_{xy}\sin A\cos A). \qquad (143.3)$$

A függővonal meridián (*xz*) és rá merőleges és (*yz*) síkú vetületének görbülete

$$\kappa_x = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{W_{xz}}{g} \quad \text{és} \quad \kappa_y = \frac{W_{yz}}{g}\ . \qquad (143.4)$$

A függővonal teljes görbülete

$$\kappa = \frac{1}{R_f} = \frac{1}{g}\left(W_{xz}^2 + W_{yz}^2\right)^{1/2}. \qquad (143.5)$$

A szintfelületek görbületi viszonyainak tanulmányozása képet ad eltérésükre a központos erőtér gömb alakú szintfelületeitől. (Gömbre vonatkozóan, ugyanis, $R_x \equiv R_y$ és $W_{xx} \equiv W_{yy}$. A centrális erőtér függővonalai pedig, egyenesek, ugyanis $W_{xz} \equiv W_{yz} \equiv 0$).

144. A nehézségi erőtér elemi változása

A nehézségi erőtérben a térerősség iránya és nagysága általában pontról pont-változó. A nehézségi térerősségnek a P pont szűk környezetében a **ds**(*dx,dy,dz*) elemi elmozduláshoz tartozó **dg** kis változását az erőtér

$$\underset{(3,1)}{\mathbf{dg}} = \underset{(3,3)}{\mathbf{E}} \; \underset{(3,1)}{\mathbf{ds}}$$

teljes differenciáljával számíthatjuk ki. Ebben a (3,3) méretű **E** mátrix a **g** vektortér *derivált tenzora*, az *Eötvös*-féle tenzor, amely az erőtér g_x, g_y, g_z összetevői gradiensvektorának 3-3 elemét tartalmazza. Ha a térerősséget a potenciál gradienseként értelmezzük, akkor az *Eötvös*-féle tenzor a *W* potenciálfüggvény tiszta és vegyes második differenciálhányadosaiból áll:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}. \qquad (144.1)$$

Jelentős részüket az *Eötvös*-féle torziós ingával, illetve más (pl. űreszközökön elhelyezett) gradiométerekkel közvetlenül mérni tudjuk.

15. A földalak meghatározásának alapelve

151. A szintfelületek analitikus meghatározása

Mivel egyrészt a Föld elméleti alakját – a geoidot – is szintfelületként értelmeztük, másrészt a szintfelületek alakjának megismerése már jó képet ad az erőtér szerkezetéről, mindenképpen feladatunk a földi nehézségi erőtér egyes szintfelületeinek meghatározása. Tekintve, hogy a szintfelületek a *külső térben analitikus felületek*, meg kell ismerni analitikus meghatározásuk módszerét.

Ez a differenciál-geometria azon tételére támaszkodik, amely szerint 6 mennyiség (ha egymás között bizonyos feltételeket kielégítenek) meghatározza a felületet.

Ez a 6 mennyiség a felület függvényének, esetünkben a *W* potenciálfüggvénynek az első és a második differenciálhányadosaiból állítható elő. Szintfelületi érintősíkú koordináta-rendszerben

$$p = W_x = 0, \qquad r = -\frac{W_{xx}}{W_z} = -\frac{W_{xx}}{g} = 0,$$

$$q = W_y = 0, \qquad s = -\frac{W_{xy}}{W_z} = -\frac{W_{xy}}{g}, \qquad (151.1)$$

$$m = (1+p^2+q^2)^{1/2} = 1, \qquad t = -\frac{W_{yy}}{W_z} = -\frac{W_{yy}}{g}.$$

Belőlük kiszámítható a *Gauss*-féle 6 *alap- (fundamentális) mennyiség*

$$E = 1+p^2 = 1, \qquad L = \frac{r}{m} = -\frac{W_{xx}}{g},$$

$$F = p\cdot q = 0, \qquad M = \frac{s}{m} = -\frac{W_{xy}}{g}, \qquad (151.2)$$

$$G = 1+q^2 = 1, \qquad N = \frac{t}{m} = -\frac{W_{yy}}{g}.$$

Mint látható, ez utóbbiakból (különleges elhelyezésű koordináta-rendszerünkben) egy mennyiség zérussal, kettő az egységgel egyenlő, a maradék háromban pedig a potenciálfüggvénynek egy elsőrendű, egy vegyes és két tiszta másodrendű differenciálhányadosa szerepel. Közülük a két előbbit és a két utóbbinak a különbségét tudjuk közvetlenül mérni (gravimetria és gradiometria). A két tiszta másodrendű differenciálhányados összegét pedig a nehézségi erőtér divergenciájából (forrásosságából) tudjuk kiszámítani. Ez ugyanis a Föld *külső* terében, a Föld forgásában részt nem vevő pontban (pl. űreszközökön) *nulla* értékű ((131.6) *Laplace*-egyenlet), a Föld felszínén fekvő, és vele együttforgó mérési helyen pedig $2\omega^2$ (a forgásból származó erőtér forrásfüggvénye). Így, ha a W_{zz} tiszta második derivált, azaz nehézségi térerősség függőleges gradiense is mérhető, a W_{xx} + W_{yy} *összeg* számítható A W_{zz} mérése, egészen a legutóbbi időkig a többinél csak 1-2 nagyságrenddel kisebb megbízhatósággal sikerült, de a mai eszközökkel (gradiométerekkel) ez a különbség megszűnik.

Előkészületben van a potenciálfüggvény szükséges differenciálhányadosainak kellő megbízhatóságú mérése a külső térben mozgó járműveken, illetve űreszközökön (űrgradiometria), és így a módszer gyakorlatilag alkalmazhatóvá válik.

Emlékeztetünk arra, hogy a földi nehézségi erőtérnek *csak a külső szintfelületei* (amelyek a Föld tömegébe nem metszenek bele) *analitikus felületek,* így ez a megoldás közvetlenül *csak külső szintfelületek* meghatározására alkalmazható. De a Föld tömegeloszlására vonatkozó kellő mennyiségű ismeret birtokában, megfelelő matematikai módszerrel – kisebb-nagyobb megbízhatósággal – következtetni tudunk belőlük a nehézségi erőtér eloszlására a Földhöz közelebbi térségben is.

Sajnos a geoid a földrészek területén belemetsz a Föld tömegébe, és a tömegeloszlásra vonatkozó ismereteink sem elegendőek a geoid kellő megbízhatóságú és részletességű meghatározására ezen a módon, így erre a célra más megoldást (is) kell keresnünk.

Feladat:

- Miért akadálya a módszer alkalmazásának az a körülmény, hogy a geoid belemetsz a Föld tömegébe?

152. A Föld alakjának pontonkénti meghatározása

Ez a módszer abból áll, hogy a felület kellő sűrűségben kiválasztott egyes (diszkrét) pontjainak meghatározzuk a térbeli helyzetét kifejező koordináta-hármasát valamilyen, általunk célszerűen megválasztott koordináta-rendszerben, és a felület további pontjainak helyzetét ezek között megfelelő matematikai (predikciós) eljárással (pl. egyszerű lineáris predikcióval) interpoláljuk. A módszer közvetlen eredménye a kiválasztott felületpontok koordináta-jegyzéke (adatbázisa). Adott esetben ebből rajzi (analóg) ábrázolást is készíthetünk. (Ez lényegében ugyanaz a módszer, amit a fizikai földfelszín egyes kisebb darabjainak meghatározására a domborzat felmérésekor az alsógeodéziában használunk.)

A pontonkénti meghatározás módszere egyaránt alkalmazható mind a Föld fizikai, mind elméleti alakjának (a geoidnak) meghatározására.

Emlékeztetünk, hogy a felsőgeodéziában a Föld *fizikai alakjának* meghatározásán nem a helyi részletek bemérését, és ábrázolását, hanem csak az ennek alapjául szolgáló geodéziai alaphálózat fizikai földfelszínen kijelölt (és állandósított), kiválasztott pontjainak meghatározását értjük. Itt tehát a fizikai földfelszínen egymástól néhányszor 10 km-es távolságokban kijelölt ponthalmaz (egy sok pontból álló poliéder sarokpontjai) térbeli helyzetének meghatározásáról van szó.

Általában ugyanezen pontok geoidi megfelelői szolgálnak a Föld *elméleti (matematikai) alakjának* – a geoidnak – a meghatározására.

Mindkét esetben a felület további pontjainak helyzetét további, sűrítő mérésekkel és/vagy számításokkal határozzuk meg.

A kiválasztott felületi pontok térbeli helyzetét általunk célszerűen megválasztott koordináta-rendszerben határozzuk meg.

16. Az alkalmazott koordináta-rendszerek

161. A földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer

A Kozmikus geodézia tantárgy és elektronikus jegyzete (http://www.agt.bme.hu/tantárgyak/kozmikus-geodezia/kozm-geod-jegyz.doc) keretében, az [1.1.3.4] és az [1.2.4]-ben már megismerkedtünk, és részletesen foglalkoztunk a vonatkoztatási rendszerekkel.

Emlékeztetünk arra, hogy a geodéziában ***azon anyagi pontok összességét és a hozzájuk rögzített koordináta-rendszert, amelyhez további pontok helyzetét és ennek megváltozását (mozgását) viszonyítjuk, vonatkoztatási rendszernek*** *nevezzük* [Kozmikus geodézia I. rész 1.2.]. A helymeghatározásban a szerint, hogy a viszonyítás alapját képező anyagi pontokat (az ún. *keretpontokat*) hol választjuk, különböző vonatkoztatási rendszereket használunk. Így beszélünk égi, földi és helyi vonatkoztatási rendszerekről. Az *égi vonatkoztatási rendszerek* keretpontjai távoli látható, vagy rádiócsillagok, a *földi (globális) vonatkoztatási rendszereink* koordináta-rendszerét a Föld tömegközéppontjához, vagy az egész Föld felszínén minél egyenletesebb eloszlásban kijelölt geodéziai fő alappontokhoz, míg a *helyi vonatkoztatási rendszerek* koordináta-rendszerét a földfelszín kisebb-nagyobb darabjain (ország, szomszédos országok, földrész területén) kijelölt egyes geodéziai alaphálózati pontokhoz kapcsoljuk.

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy szaknyelvünkben használjuk a *vonatkoztatási rendszer* fogalmát az eddiginél *szűkebb* és *bővebb* értelmezésben is.

Gyakran, *tisztán geometriai értelemben,* vonatkoztatási rendszernek mondjuk valamely vonatkoztatási rendszernek csak magát a *koordináta-rendszerét* is. Ez a leszűkített értelmezés akkor lehet indokolt, amikor a teljes értelemben vett vonatkoztatási rendszernek a koordináta-rendszeren kívüli, más elemei az adott kérdésben nem játszanak szerepet.

Mivel a napi helymeghatározási gyakorlatban általában ez a helyzet, még ennél is általánosabban, ***helymeghatározó adatok viszonyítási alapjaként szolgáló bármely koordináta-rendszert*** is gyakran vonatkoztatási rendszernek mondunk.

Máskor a *vonatkoztatási rendszer* fogalmát *bővebb* értelmezésben is használjuk, amikor az eddigieken kívül, a ***geodézia feladatainak megoldásához*** (helymeghatározásainkhoz és a földi nehézségi erőtér leírásához) ***viszonyítási alapként használt egyéb további elemeket is beleértünk*** (*geodéziai vonatkoztatási rendszer* [34.]).

Megjegyezzük, hogy a „*vonatkoztatási rendszer”* fogalomra a magyar nyelvű szakirodalomban a „*vonatko<u>zási</u> rendszer”* kifejezést is kiterjedten használjuk. Mindkettő egyformán helyes.)

Földi (és földközeli) pontok geodéziai helymeghatározásainak alapvető koordináta-rendszere a földtesthez (a lehetőségig) kötött, így a Földdel együttforgó, geocentrikus elhelyezésű, a Kozmikus geodézia tantárgyban megismert, *X,Y,Z <u>földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer</u>*. Ennek kezdőpontja (origója) egybeesik a Föld tömegközéppontjával (erre utal a „geocentrikus” jelző), *Z* tengelye pedig igen közel áll a Föld forgástengelyéhez.

A *Z* tengely és a forgástengely iránya folyamatosan változó, de (a közeli évtizedekben) 1″-nél kisebb szöget zár be egymással, mert – amint Geofizikából és Kozmikus geodéziából tudjuk – a Föld forgása nem a tehetetlenségi főtengelye körül indult meg, ezért a forgástengelynek és a földtestnek egymáshoz viszonyított helyzete folyamatosan változik, és létrejött a pólusmozgás jelensége. Azért, hogy a földi pontok koordinátái ne változzanak az idő folyamán ugyanilyen mértékben, koordináta-rendszerünk *Z* tengelyét nem a forgástengelyhez, hanem (csak ennek közelében) a *földtesthez* kötjük.

A +*X* tengely irányát megegyezéssel kiválasztott földfelszíni ponthoz (Greenwich), vagy pontokhoz kapcsoljuk.

A +*Y* tengely a +*X* és a +*Z* tengellyel jobbsodrású rendszert alkot.

Ezt a koordináta-rendszert a földfelszínen erre a célra kijelölt, különlegesen nagy megbízhatósággal meghatározott geodéziai alappontok (a vonatkoztatási *keretpontok*) és egyezményesen elfogadott koordinátáik valósítják meg a természetben. Ezen pontok száma az elmúlt száz évben néhányról több százra növekedett, és meghatározásuk a tudomány és a (mérés-) technika fejlődésével egyre megbízhatóbbá vált. Ennek megfelelően a *Nemzetközi Geodéziai Szövetség* (International Assotiation of Geodesy = IAG, http://www.iag-aig.org/) javaslataira a *Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió* (International Union of Geodesy and Geophysics = IUGG, http://www.iugg.org) az idő folyamán ennek a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszernek egyre pontosabb, újabb megvalósításait vezette be a gyakorlat számára. Jelen keretek között ennek a fejlődésnek csak a legutóbbi két állomását tárgyaljuk.

A múlt század elejei korábbi megoldások után 1967-től az IUGG ajánlására a geodézia a ***CIO-BIH rendszer**nek* is nevezett ***Egyezményes (Közepes) Földi Rendszernek*** (Conventional Terrestial System = **CTS**), mint a Földhöz kötött vonatkoztatási rendszernek a koordináta-rendszerét használta. Ezt mintegy 50 geodéziai alappont (keretpont) egyezményesen elfogadott koordinátái valósították meg. Ennek +*Z* tengelye a forgástengely 1900.0-1906.0 közötti közepes helyzeteként számított *Egyezményes Nemzetközi Kezdőpont* (Conventional International Origin = CIO) iránya, *XZ* síkja a *BIH kezdőmeridiánsík*nak is nevezett *Greenwichi Közepes Szintfelületi Meridiánsík* (Greenwich Mean Astronomic Meridian). Ezzel a rendszerrel korábbi munkarészekben és szakirodalmi művekben még gyakran találkozunk.

Az IUGG 1991-ben vezette be a jelenleg általánosan használt ***Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszert*** (International Terrestrial Reference System = **ITRS** http://www.iers.org/iers/pc/itrs/). Az ITRS koordináta-rendszere kezdőpontjának (origójának) és alapirányainak a földtesthez viszonyított helyzetét a *Nemzetközi Földforgás és Vonatkoztatási Rendszerek Szolgálat* (International Earth Rotation and Reference Systems Service = IERS, http://www.iers.org/) keretében mintegy 300 helyen működő állomás több mint 550 pontjának nemzetközi megegyezéssel elfogadott koordinátái (megbízhatóság ±0,5-2,0 cm) és mozgássebessége (megbízhatóság ±1-3 mm/év) rögzítette a természetben. Ezek alkotják a *Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Keretpontokat* (International Terrestrial Reference Frame = ITRF, http://lareg.ensg.ign.fr/ITRF/). Ezt rendszeresen bővítik és javítják, és ma már beszélünk ITRF93, ITRF97 és ITRF2000-ről. (Ez utóbbit már mintegy 500 állomás több mint 800 pontja alkotja.) Így, az ITRS koordináta-rendszerét egyre nagyobb megbízhatósággal tudjuk keretpontjainkhoz kötni. Ha helymeghatározásaink során további pontokat határozunk meg az ITRS koordináta-rendszerében, akkor helyzetüket a koordináta-rendszeren keresztül tulajdonképpen az ITRF (keret-) pontokhoz viszonyítva határozzuk meg, őket beillesztjük a keretpontok közé.

Az ITRS koordináta-rendszere +*Z* tengelyének így rögzített iránya az *IERS Vonatkoztatási Pólushelyzet* (IERS Reference Pole = IRP) iránya, az *XZ* síkja az *IERS Vonatkoztatási Meridiánsík* (IERS Reference Meridian = IRM), a +*Y* tengelye a +*X és a* +*Z* tengellyel jobbsodrású rendszert képez, és a rendszer *O* kezdőpontja (origója) a Föld tömegközéppontja (± néhány milliméterre). (Megjegyezzük, hogy az IRP és a korábban használt CIO pólushelyzet iránya csak mintegy ±0,03″-nél kisebb mértékben tér el egymástól.)

Ez a koordináta-rendszer a *Föld tájékozási paramétereinek* (Earth Orientation Parameters = EOP, http://www.iers.org./iers/products/eop/) felhasználásával lehetővé teszi, hogy a *valódi* (pillanatnyi) *forgástengelyen* keresztül bármikor megadjuk a földtest térbeli helyzetét (tájékozását), és vele együtt bármely meghatározott földi pont koordinátáit a térben rögzített *Nemzetközi Égi Vonatkoztatási Rendszer* (International Celestial Reference System = ICRS) koordináta-rendszerének alapirányaihoz és rajtuk keresztül ennek keretpontjaihoz, a távoli rádiócsillagokhoz (kvazárokhoz) viszonyítva.

Megemlítjük, hogy a mesterséges holdas helymeghatározásokhoz már 1960-tól ***Geodéziai Világrendszer*** (World Geodetic System = **WGS**) elnevezésű vonatkoztatási rendszer koordináta-rendszerét használjuk. Ez magától értetődően geocentrikus elhelyezésű (hiszen a mesterséges hold a Föld tömegközéppontja körüli pályán kering), és tengelyirányai elvileg megegyeznek az 1967-ben bevezetett, már említett, *CIO-BIH rendszer* koordináta-rendszerének alapirányaival, és a természetben a mesterséges hold követő állomáshálózat pontjainak (a WGS keretpontoknak) elfogadott koordinátái valósítják meg. Ezt több lépcsőben finomították, és ma a WGS84 jelű változata használatos (pl. a GPS-mérésekben). Az ebben adott koordináták, tehát *elvileg* nem ITRS koordináták, azonban az alapirányok csekély különbségét és a rendszerek megvalósításának véges megbízhatóságát (±0,05 m) figyelembe véve mondhatjuk, hogy *ezen a* *megbízhatósági szinten* a WGS84 koordináták *gyakorlatilag* az ITRS koordináták megvalósulásának tekinthetők.

Az európai országok annak érdekében, hogy az európai tábla mozgása kisebb mértékben befolyásolja a rajta fekvő állomások (alappontok) koordinátáit, az 1980-as évek végétől az európai táblához kötött ***Európai Földi Vonatkoztatási Rendszert*** (European Terrestrial Reference System 1989 = **ETRS89**) vezettek be. Koordináta-rendszerének gyakorlati megvalósulása az európai állomásoknak (az *Európai Földi Vonatkoztatási Keretpontoknak = ETRF*, http://www.euref-iag.net/) folyamatos (permanens) GPS-hálózati mérése és az IERS tevékenysége alapján számított koordinátái és mozgássebessége. Az állomáskoordinátákat a bevezetésükkor úgy határozták meg, hogy ETRS89-es koordinátáik azonosak legyenek az ITRF89-es koordinátáikkal. Következésképpen az ETRS koordináta-rendszerének kezdőpontja és koordináta-irányai a rendszer bevezetésekor (1989) azonosak voltak az ITRS megfelelő elemével. Azóta az állomások – az európai tábla mozgásának megfelelően – folyamatosan, kis mértékben (mintegy 3 cm/év sebességgel ÉK irányban) eltolódnak az ITRS koordináta-rendszeréhez viszonyítva. Ugyanakkor ezeknek (az európai) pontoknak az ETRS koordinátáit változatlanul tartják, ami azt jelenti, hogy az ETRS koordináta-rendszere a Föld tömegközéppontjához képest folyamatosan, párhuzamosan eltolódik. Ezért az ETRS koordináta-rendszere ma már ún. *kvázi-geocentrikus* elhelyezésűvé vált. Az európai és a nemzetközi földi rendszer kapcsolata mintegy ± 1 cm-re megbízható.

Térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a meghatározott pontok helyzetét egyre gyakrabban az $\mathbf{r}(X,Y,Z)$ ***helyvektorukkal*** adjuk meg. Ehhez közvetlen mérési módszerünk van a mesterséges holdakra végzett geodéziai mérésekkel (mint pl. a GPS). A belőlük kapott helyvektorok (mint már említettük) gyakorlatilag a *földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer ITRS megvalósulására vonatkoznak.*

Kisebb területek, mint pl. egy-egy ország alappont-hálózatának meghatározásakor korábban általános volt ***helyi vonatkoztatási rendszer*** létesítése. Ennek keretpontjai a helyi (nemzeti) geodéziai alaphálózat egyes kiválasztott (általában csillagászati-geodéziai) pontjai . Koordináta-rendszerének helyzetét ezen pontok valamilyen célszerűséggel megválasztott koordinátái jelölik ki. Ez esetben is mindig törekedtek arra, hogy a koordináta-irányok párhuzamosak legyenek a nemzetközi földi rendszer alapirányaival, és az egyes rendszerek csak a kezdőpontjuk (origójuk) $\mathbf{r}_o$ eltolásával különbözzenek egymástól és a nemzetközi földi rendszertől. Ez azonban csak a mérési megbízhatóságnak megfelelő mértékben sikerült, így a valóságban mindig adódott csekély (általában 1″-nél nem nagyobb) elforgatás is a tengely-irányok között ($\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z$). (Ilyen pl. a magyarországi geodéziai alappont-hálózat HD72 jelű vonatkoztatási rendszerének koordináta-rendszere is.) Az ilyen helyi koordináta-rendszerekben megadott ${}_h\mathbf{r}$ helyvektorok egymásba és/vagy a nemzetközi földi rendszerbe (ITRS-be) az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{R}_x(\varepsilon_x)\,\mathbf{R}_y(\varepsilon_y)\,\mathbf{R}_z(\varepsilon_z)\,{}_h\mathbf{r} \qquad (16.1)$$

geometriai összefüggéssel átszámíthatók. Ebben **R** forgatási mátrixokat jelöl. Ilyen átszámításokkal későbben fogunk részletesebben megismerkedni [4.].

Az $\mathbf{r}(X,Y,Z)$ *helyvektorok* tisztán *geometriai* rendszerben teljes körű térbeli helymeghatározást adnak az adott koordináta-rendszerben. A helyvektorok használata a mesterséges holdas helymeghatározások (pl. GPS) egyre szélesebb körű alkalmazásával mindjobban elterjed. Földi pontok helyzetének meghatározásán kívül, használjuk őket a Föld körül keringő mesterséges holdak pályapontjainak megadására is. Hátrányuk, hogy pusztán a pontok egymáshoz (és a koordináta-rendszer kezdőpontjához, valamint tengelyeihez) viszonyított geometriai helyzetét mutatják, de a pontoknak a földi nehézségi erőtér szintfelületeihez (pl. a tengerszinthez) viszonyított (magassági) helyzetét nem jellemzik, továbbá a felhasználók széles köre számára nem szemléletesek.

Feladatok:

- Milyen a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer?
- Mik a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer legutóbbi gyakorlati megvalósulásai?
- Vázoljuk fel a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszert és valamely helyi elhelyezésű derékszögű koordináta-rendszert!

162. Felületi koordináta-rendszerek

A korábban kialakult (hagyományos) mérési módszereink (vízszintes és magassági szögmérések, távolságmérések, szintezések és nehézségi mérések) mérési eredményeinek feldolgozásához, sőt gyakran a mesterséges holdas módszerekkel kapott helyvektorok (térbeli derékszögű koordináták) további felhasználásához is – a Föld alakjához célszerűen választott felületre vonatkozó – *felületi koordinátákat* használunk. Ezek a felhasználó számára a szemléletesség szempontjából is előnyösebbek.

Ekkor a választott felületet *vonatkoztatási* vagy *alapfelületnek* nevezzük, és a térbeli pontokat valamilyen célszerű *vetítővonalla*l erre az alapfelületre vetítjük. Így kapjuk a pont *alapfelületi megfelelőjét*. A pont térbeli helyzetének megadásához meghatározzuk alapfelületi megfelelőjének két koordinátáját (*vízszintes koordináták*) és a pontnak az alapfelülettől a vetítővonalon mért távolságát (*magasság*).

162.1. Ellipszoidi felületi koordináták

A geodéziai gyakorlatban a földi pontok helyzetének megadására kiterjedten használjuk a földi koordináta-rendszer kezdőpontjára (a Föld tömegközéppontjára) és koordináta-tengelyeire illesztett, vagy ettől párhuzamosan eltolt (ún. helyi elhelyezésű), *a* és *b* méretű *E(a,b)* forgási ellipszoid alapfelülethez, az ún. *vonatkoztatási ellipszoidhoz* kapcsolódó *ellipszoidi felületi koordinátákat*, közöttük első sorban az **ellipszoidi földrajzi koordinátákat;** a

φ ellipszoidi földrajzi szélességet, a

λ ellipszoidi földrajzi hosszúságot, valamint a

h ellipszoid feletti magasságot.

A P ponton átmenő ellipszoidi normálison sorozott síkokat *ellipszoidi vertikális síkoknak* és közülük azt, amelyik az ellipszoid kistengelyét is tartalmazza, a P pont *ellipszoidi meridiánsíkjának* nevezzük.

Ellipszoidi földrajzi szélességen értjük a P ponton átmenő ellipszoidi felületi normálisnak a kistengelyre merőleges síkkal bezárt szögét. (Ezt az ellipszoidi egyenlítő síktól észak felé pozitívnak, dél felé negatívnak tekintjük). Az ellipszoid kistengelyének iránya elvben megegyezik (vagy legalább párhuzamos) a földi koordináta-rendszer valamelyik megvalósulása *+Z* tengelyének (jelenleg az *IRP,* korábban a *CIO*) irányával.

Ellipszoidi földrajzi hosszúságnak a P ponton átmenő ellipszoidi meridiánsík és a kezdő ellipszoidi meridiánsík által bezárt szöget nevezzük és ezt kelet felé tekintjük pozitívnak. A kezdő ellipszoidi meridiánsík elvben párhuzamos a földi koordináta-rendszer valamelyik megvalósulása *+XZ* síkjával (jelenleg az *IRM,* korábban a *BIH*) kezdő meridiánsíkkal.

Az *ellipszoid feletti magasságon* a P ponton átmenő ellipszoidi felületi normálisnak az ellipszoid felszíne és a P pont közötti szakaszát értjük.

A φ és a λ ellipszoidi földrajzi koordináták geometriai értelemben a ponton átmenő ellipszoidi felületi normális térbeli helyzetét adják meg az ellipszoid kistengelyéhez és az ellipszoidi kezdő meridiánsíkhoz viszonyítva. Belőlük az ellipszoidi normális irányát kijelölő **m** egységvektor összetevői (iránykoszinuszai) az

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } |m| = 1 \qquad (162.1)$$

összefüggéssel számíthatók.

Az ellipszoid felszínén a φ = *állandó* és a λ = *állandó* értékű helyek az ellipszoid *szélességi,* ill. *hosszúsági vonalait* alkotják. Ezek egymással ortogonális (egymásra merőleges) görbesereget képeznek, amiket ellipszoidi *felületi koordináta-vonalaknak* is tekinthetünk. Ilyen értelmezésben beszélhetünk ellipszoidi felületi *görbe vonalú koordináta-rendszerről.*

Mondottuk, hogy a felületi koordináta-rendszerek bevezetése a pontok helyének térbeli meghatározását két részre osztja. A P ponton átmenő ellipszoidi normális, *mint vetítővonal*, az ellipszoid felszínén kidöfi a P pont P″ ellipszoidi megfelelőjét. Ennek φ, λ ellipszoidi földrajzi koordinátái azonosak a P pontéval (hiszen azonos felületi normálison fekszenek). Ők a P pont ún. *vízszintes helyzetét* adják meg. A P pont *magassági helyzetét* ebben a rendszerben (harmadik koordinátaként) a *h* ellipszoid feletti magasság határozza meg.

Az ellipszoid feletti magasságról tudni kell, hogy pusztán a pontok geometriai helyzetét jellemzi, de – a helyvektorokhoz hasonlóan – ez sem mutatja a földi nehézségi erőtér szintfelületeihez (a tengerszinthez) viszonyított elhelyezkedésüket (így például széleskörű felhasználásra szolgáló térképi ábrázolásra, építő, vízrajzi és egyéb tevékenységekhez közvetlenül nem alkalmas).

Az ellipszoidi földrajzi koordináták és az ellipszoid feletti magasság adathármasa, az ellipszoid geometriai jellemzőivel együttesen, a helyvektorral egyenértékű teljes körű térbeli helymeghatározást ad tisztán *geometriai* rendszerben. Kapcsolatuk:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\,\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\,\sin\lambda \\ \left[(1-e^2)N+h\right]\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad (162.2)$$

ahol

$$e^2 = \frac{a^2 \quad b^2}{a^2} \qquad \text{és} \qquad N = \frac{a}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}}$$

az ellipszoid (első) numerikus excentricitásának négyzete, ill. harántgörbületi sugara. (A feladat visszafelé, csak fokozatos közelítéssel oldható meg.)

A φ,λ,h ellipszoidi koordináta-hármas mesterséges holdakra végzett mérésekből átszámítással, vagy a hagyományos földi geodéziai (vízszintes, magassági és gravimetriai) alaphálózati mérésekkel (beleértve a csillagászati geodéziai munkákat is) határozható meg.

Megemlítünk ritkábban alkalmazott még két ellipszoid felületi koordináta-hármast.

A földfelszíni P pont *ellipszoid felszínén fekvő* P" ellipszoidi megfelelője helyzetének megadására a térbeli poláris koordináta-rendszert is használhatjuk. Ez esetben a P" ellipszoid felületi pontnak térbeli helyzetét a

ψ ellipszoidi **geocentrikus szélesség**, a

λ ellipszoidi földrajzi hosszúság és az

$r_{P''}$ ellipszoidi helyvektor hossza

határozza meg. Az ellipszoidi földrajzi és a geocentrikus szélesség $\varphi - \psi$ különbsége a geodéziai gyakorlatban használt ellipszoidok esetén 11'-nél kisebb.

Megjegyezzük, hogy itt a *geocentrikus szélesség* elnevezés bizonyos fokig félrevezető lehet. Ebben az értelemben használva a fogalmat ugyanis az ellipszoid (és vele együtt a koordináta-rendszerünk) általános elhelyezésű is lehet, és a *geocentrikus* jelző valójában csak arra utal, hogy a szóban lévő szöget az ellipszoid geometriai középpontjában kell értelmezni (szemben az ellipszoidi *földrajzi* szélesség szögével). Ettől az egyetlen esettől eltekintve, a *geocentrikus* koordinátákon általában olyan koordináta-rendszerre vonatkozó helymeghatározó adatokat értünk, amelynek kezdőpontja (origója) a Föld tömegközéppontjával egybeesik.

Az ellipszoid *felszínén lévő* P" (vetületi) pont helyzetét az ellipszoidon az

u ellipszoidi **redukált szélesség**, a

λ ellipszoidi hosszúság és az

$r_{P''}$ ellipszoidi helyvektor hossza

segítségével is megadhatjuk. Az ellipszoidi földrajzi és a redukált szélesség $\varphi - u$ különbsége nem haladja meg az 5,5'-et.

Itt jegyezzük meg, hogy *vonatkoztatási ellipszoid* méretei (vagy mérete és alakja) elvileg tetszés szerint megválasztható, azonban célszerűségi okokból a geodézia arra törekszik, hogy az ellipszoid a Föld (pontosabban a geoid) alakjához lehető legjobban simuljon. Az ismeretek és a méréstechnika fejlődésével több különböző ilyen ellipszoid méretet határoztak meg az idő folyamán [3.].

Az egyes nemzeti geodéziai alaphálózatokban különböző méretű, alakú és helyi (nem geocentrikus) elhelyezésű ellipszoidra vonatkozó koordinátákkal is találkozunk. Ezeket koordináta-átszámítással lehet egymásba, és/vagy a *Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszerbe (ITRS)* átszámítani[43.].

Az eddigiekből az is következik, hogy ugyanazon természetbeni pontnak számszerűen egymástól kissé különböző ellipszoidi koordinátái lehetnek, attól függően, hogy milyen méretű, alakú, elhelyezésű ellipszoidra vonatkoznak [42.]. Ezért minden ellipszoidi koordinátához az előbb felsorolt adatokat meg kell adni.

Végül megjegyezzük, hogy a külföldi szakirodalom az ellipszoidi földrajzi koordinátákat általában *„geodéziai koordinátáknak”* nevezi. Ezzel meghatározásuk geodéziai módszereire utalnak.

Feladatok:

- Vázoljuk fel az ellipszoidi felületi koordináták értelmezését! Mik az ellipszoidi szélességi és hosszúsági vonalak? Számítsuk ki a P ponton átmenő ellipszoidi normális **m** egységvektorát.
- Értelmezzük az ellipszoidi egyenlítő fogalmát!
- Vázoljuk fel a földi derékszögű koordináta-rendszert, a geocentrikus és valamely helyi elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidot!

162.2. A szintfelületi földrajzi koordináták

A földi pontok térbeli helyzete megadásának harmadik módja a *földi nehézségi erőtérhez* (ennek szintfelületeihez és függővonalaihoz, gyakorlatilag ez utóbbinak érintőjéhez (a *helyi függőleges* irányához) kapcsolódik. Ez esetben a pont térbeli helyzetét a

Φ szintfelületi földrajzi szélességgel,

Λ szintfelületi földrajzi hosszúsággal és

W poteciálértékével, ill. a gyakorlatban a pont $W{-}W_0$ geopotenciális mérőszámával, vagy ebből származtatható H (geoid feletti) magasságával

jellemezzük. (Ez utóbbi fogalmakat később tárgyaljuk [53.]). Velük kapcsolatban most csak annyit jegyzünk meg, hogy bármely (geometriai, vagy fizikai) elven, bármilyen módszerrel is végezzük a földi pontok helymeghatározását, végeredményként a felhasználó számára minden esetben a szintfelületek közötti (tengerszint feletti) magasságokat kell megadnunk. Ezt követi a szabad folyadékfelszín, ezt igényli minden építési tevékenység, ezért ezt ábrázolják a térképeink, stb. A magassági (függőleges) helyzet megadására végül is ezeket kell kiszámítani a helyvektorral, vagy az ellipszoid feletti magassággal megadott térbeli helyzetből is. Ez teszi a mesterséges holdas helymeghatározások korában is *elkerülhetetlenül szükségessé* a geoid – mint magassági alapszintfelület – részletes meghatározását.

A Φ *szintfelületi földrajzi szélesség* a helyi függőleges iránynak a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer valamelyik megvalósulása [161.] Z tengelyére (jelenleg az IRP, korábban a CIO irányára) merőleges síkkal (vagy az *X,Y* síkjával) bezárt szöge.

A Λ *szintfelületi földrajzi hosszúság* a helyi szintfelületi meridánsíknak a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer valamelyik megvalósulásának *X,Z síkjával,* (jelenleg az IRM, korábban a BIH) kezdő szintfelületi meridiánsíkkal bezárt szöge.

A helyi *szintfelületi meridiánsík* a szóban lévő pont helyi függőlegesén sorozott síkok közül az, amelyik párhuzamos a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása) *Z* tengelyével. A szintfelületi meridiánsíkot tehát, a szóban lévő pont helyi függőlegese és ugyanezen pontban a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása) *Z* tengelyével párhuzamos egyenes feszíti ki.

A Φ és a Λ *szintfelületi földrajzi koordináták* egy egyenesnek, a földi pont *helyi függőlegesének* (a ponton átmenő szintfelületre merőleges iránynak, felületi normálisnak) térbeli helyzetét adják meg a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása) alapirányaihoz viszonyítva.

A helyi függőleges **n** egységvektorának összefüggése a szintfelületi földrajzi koordinátákkal:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{g} = \begin{bmatrix} \cos\Phi\cos\Lambda \\ \cos\Phi\sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{bmatrix}, \text{ ahol } |\mathbf{n}| = 1. \qquad (161.3)$$

Az előbbi fogalom-meghatározásokban a valóságban mindig a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer *valamelyik gyakorlati megvalósulását* (jelenleg az ITRS, korábban, pl. a CIO-BIH rendszer tengely-irányait [161.]) értjük. Így ugyanazon földfelszíni pontnak egyidejűen – egymástól parányi mértékben – eltérő szintfelületi földrajzi koordinátái lehetnek. Különbségük mértéke elvileg akkora, amennyire a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer gyakorlati megvalósulásai egymástól eltérnek. Mivel a gyakorlati munkarészekben különböző időkben, különböző rendszerekre vonatkozó szintfelületi földrajzi koordinátákkal találkozunk, minden koordinátához mindig meg kell adni, hogy a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer melyik megvalósulására (pl. ITRS, vagy CIO-BIH, vagy esetleg valamelyik még korábbi rendszerre) vonatkoznak.

A szintfelületeken a Φ = *állandó* és a Λ = *állandó* értékű helyek a szintfelületi *szélességi,* ill. *hosszúsági vonalakat* alkotják. Ezek egymással ortogonális (egymásra merőleges) görbesereget képeznek, amiket *szintfelületi koordináta-vonalaknak* is tekinthetünk. Ilyen értelmezésben beszélhetünk *szintfelületi görbe vonalú koordináta-rendszerről.*

Itt is megjegyezzük, hogy a szintfelületi koordináta-rendszer alkalmazása is a pontok helyének térbeli meghatározását két részre osztja. A szintfelületi földrajzi koordináták a pont *vízszintes helyzetét* adják meg, míg a függőleges helyzetüket később tárgyalandó valamelyik *magassági mérőszámmal* [53.] jellemezzük. Ez a megosztás tulajdonképpen megfelel a geodéziai mérési gyakorlatnak, hiszen egészen más módszerekkel határozzuk meg a vízszintes helyzetet jellemző koordinátákat, mint a magasságokat.

A Φ, Λ szintfelületi földrajzi koordináták szabatos meghatározása a Kozmikus geodézia tantárgy keretében megismert csillagászati-geodéziai módszerekkel, csillagészleléssel (földrajzi helymeghatározással) lehetséges. Nagy előnyük, hogy a Föld bármely helyén, egymástól függetlenül meghatározott koordináták mindegyike ugyanazon koordináta-rendszerre, a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszerre (pontosabban ennek ugyanazon megvalósulására, pl. jelenleg az ITRS koordináta-rendszerére) vonatkoztatható. Több geodéziai alaphálózati pont szintfelületi földrajzi koordinátáinak ismerete lehetővé teszi a vonatkoztatási ellipszoid méretének, alakjának, térbeli elhelyezésének és tájékozásának, valamint a szintfelületek (elsősorban a geoid) alakjának nagypontosságú meghatározását. (Ezekkel a feladatokkal későbben foglalkozunk [3.], [4.], [5].)

Ugyanakkor tudnunk kell, hogy a szintfelületek túl bonyolult felületek ahhoz, hogy a szintfelületi földrajzi koordinátákból, pl. a pontok *felületi távolságát* kiszámíthassuk. Ugyancsak nem tudjuk belőlük (legalábbis jelenleg) a pont teljes térbeli helyzetét jellemző *helyvektorát* meghatározni.

Megjegyezzük, hogy a külföldi szakirodalom a Φ, Λ szintfelületi földrajzi koordinátákat általában *„csillagászati koordinátáknak”* nevezi, utalva a meghatározásuk módjára.

Feladatok:

- Vázoljuk fel a szintfelületi földrajzi koordináták értelmezését!

- Számítsuk ki a helyi függőleges irányba mutató **n** egységvektor derékszögű összetevőit!

- Értelmezzük a szintfelületi hosszúsági és szélességi vonalak, valamint a szintfelületi egyenlítő fogalmát. Miért nem síkgörbék ezek?

- Miért lesznek ugyanazon pontnak különböző szintfelületi koordinátái az ITRS-ben és a CIO-BIH rendszerben?

162.3. A gömbi koordináták

Ha a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjára (a Föld tömegközéppontjára) képzeletben közös középpontú (koncentrikus) gömböket illesztünk, akkor a meghatározandó pontunk térbeli helyzetét a rajta átmenő gömbre vonatkozó*gömbi koordinátákkal* is megadhatjuk. Ebben a rendszerben a

ϑ gömbi pólustávolság, vagy ψ gömbi szélesség, a

λ gömbi hosszúság és az

r gömbsugár, vagy a pont helyvektorának hossza

jellemzi a pont helyzetét. Ebben a rendszerben a felületi normálisok *gömbsugarak.*

A ϑ *gömbi pólustávolság* a P ponton átmenő gömbsugárnak a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer *Z* tengelyével (ennek valamelyik gyakorlati megvalósulásával) bezárt szöge.

A ψ *gömbi szélesség* a gömbi pólustávolság kiegészítő szöge, azaz $\psi = 90° - \vartheta$.

A λ *gömbi hosszúság a P* pont gömbi meridiánsíkjának a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer *XZ* síkjával (a kezdő meridiánsíkkal) bezárt szöge.

A *gömbi meridiánsík* a P ponton átmenő gömbsugár és a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer *Z* tengelye által kifeszített sík.

A P ponton átmenő gömb felületén a ϑ = *állandó,* vagy a ψ = *állandó* értékű helyek a *gömbi szélességi vonalak (paralelkörök),* míg a λ = *állandó* helyek a *gömbi hosszúsági vonalak.* Ezek a gömbfelületen egymásra merőleges (ortogonális) görbesereget képeznek, amit *gömbfelületi* (görbe vonalú) *koordináta-rendszernek* is tekinthetünk. A gömbi hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjában, a ϑ (vagy ψ) és λ koordinátájú hely a P pont gömbfelületi helye, a koordinátapárt a pont *gömbfelületi koordinátáinak* nevezzük.

A gömbi koordinátákat közvetlenül mérni nem tudjuk, csak számítani tudjuk őket pl. a térbeli derékszögű, vagy az ellipszoidi koordinátákból. Használni fogjuk őket egyes fontos függvénykapcsolatok felállításakor független változóként.

Feladatok:

- Vázoljuk fel a gömbi koordináták értelmezését!

- Értelmezzük a gömbi egyenlítő fogalmát!