

dr. Takács Bence

## **GPS-mérések feldolgozása**

GPS-navigációs szakmérnöki szak

Számítási segédlet

Budapest, 2006.

## Bevezetés

Ez a számítási segédlet a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékén meghirdetett GPS navigációs szakmérnöki szak hallgatóinak készült, de bizonyára hasznos feladatgyűjtemény lehet mindazok számára, akik a GPS-mérések feldolgozásának részletei, kulisszatitkai iránt érdeklődnek. A segédlet tartalmazza a számítás során felhasznált képleteket, mintegy felsorolás szinten, magyarázatok, ábrák nélkül. Utóbbiak iránt érdeklődők figyelmébe ajánlom a GPS témájú kézikönyveket, elsősorban a Műegyetemi Kiadó gondozásában megjelent Műholdas helymeghatározás című könyvet. A segédletben a képleteket, jelöléseket általában innen vettem át. A segédlet tartalmaz továbbá mintafeladatokat, adatokkal, részeredményekkel.

A segédlet pillanatnyi változata az említett szakmérnöki szak GPS-mérések feldolgozása c. tárgy II., III. és IV. félévi anyagának nagy részét fedi le.

A segédlet elkészítését hasznos tanácsokkal, észrevételekkel segítették a tárgy hallgatói, illetve Tóth Gyula és Varga József kollégáim. Támogatásukat ezúton is köszönöm.

Budapest, 2006. október 17.

Takács Bence

## Tartalomjegyzék

1	Átszámítás térbeli derékszögű, ellipszoidi földrajzi és topocentrikus rendszerek között.....	3
2	Műholdak pályaszámítása.....	7
3	Pszeudótávolságok korrekciói .....	14
4	Abszolút helymeghatározás egyenletrendszerének megoldása .....	19
5	Az Egységes Országos Vetület összefüggései.....	23
6	Átszámítás WGS84 és EOVI között .....	25
7	UTM koordináták számítása.....	32
8	Hivatkozások .....	35

# 1 Átszámítás térbeli derékszögű, ellipszoidi földrajzi és topocentrikus rendszerek között

## 1. feladat

Adott egy pont ellipszoidi földrajzi koordinátaival a WGS84 rendszerben. Számítsuk át térbeli derékszögű rendszerbe!

Az ellipszoidi földrajzi és a térbeli derékszögű koordináta-rendszer kapcsolata a következő:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ [(1-e^2)N+h] \sin \varphi \end{bmatrix}$$

ahol

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ és } N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}},$$

$e$  az ellipszoid első numerikus excentricitása és  $N$  a pontbeli harántgörbületi sugár.

A WGS84 ellipszoid geometriai jellemzőit az alábbi táblázat tartalmazza:

fél nagytengelyhossz	$a$	6 378 137,000 m
fél kistengelyhossz	$b$	6 356 752,314 m
lapultság	$f = \frac{a-b}{a}$	1 / 298,257 22
első numerikus excentricitás	$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$	0,081 819 19
második numerikus excentricitás	$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$	0,082 094 44

## Minta:

A pont koordinátái ellipszoidi földrajzi rendszerben: (BME permanens állomás)

$$\varphi = 47^\circ 28' 51,39721''$$

$$\lambda = 19^\circ 03' 23,50588''$$

$$h = 180,924 \text{ m}$$

A harántgörbületi sugár:

$$N = 6389766,411 \text{ m}$$

A térbeli derékszögű koordináták:

$$X = 4081882,463 \text{ m}$$

$$Y = 1410011,144 \text{ m}$$

$$Z = 4678199,470 \text{ m}$$

**2. feladat**

Adott egy pont térbeli derékszögű koordinátaival a WGS84 rendszerben. Számítsuk át ellipszoidi földrajzi rendszerbe!

A két rendszer között a kapcsolat a következő ( $\varphi$ -re Bowring összefüggését felírva):

$$\varphi = \arctan \frac{Z + (e')^2 b \sin^3 \Theta}{p - e^2 a \cos^3 \Theta}$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - N$$

ahol

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\Theta = \arctan \frac{Za}{pb}$$

**Minta:**

A pont koordinátái térbeli derékszögű rendszerben: (BME permanens állomás)

$$X = 4081882,463 \text{ m}$$

$$Y = 1410011,144 \text{ m}$$

$$Z = 4678199,470 \text{ m}$$

Segédmennyiségek:

$$p = 4318552,520 \text{ m}$$

$$\Theta = 47^\circ 23' 6,30096''$$

Az ellipszoidi földrajzi koordináták:

$$\varphi = 47^\circ 28' 51,39721''$$

$$\lambda = 19^\circ 03' 23,50588''$$

$$h = 180,924 \text{ m}$$

### 3. feladat

Adott egy GPS-vevő antennájának térbeli helyzete ellipszoidi földrajzi koordinátaival, illetve egy műhold térbeli derékszögű koordinátaival a WGS84 rendszerben. Számítsuk ki a műhold topocentrikus koordinátáit (a topocentrum a GPS-vevő antennája)! Milyen azimut és magassági szög alatt látszik a műhold?

A topocentrikus rendszerbe való áttéréshez a következő összefüggések szükségesek:

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{topo} = \begin{bmatrix} X_{topo} \\ Y_{topo} \\ Z_{topo} \end{bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{X}'$$

ahol

$[X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T$  a topocentrum térbeli derékszögű koordinátái és

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \text{ a forgatási mátrix}$$

ahol

$\varphi, \lambda$  a topocentrum ellipszoidi földrajzi koordinátái

A topocentrikus rendszerben az azimut ( $\alpha$ ) és a magassági szög ( $\delta$ ) a következő összefüggésekkel számítható:

$$\delta = \arctan \frac{Z_{topo}}{\sqrt{X_{topo}^2 + Y_{topo}^2}}$$

$$\alpha = \arctan \frac{Y_{topo}}{X_{topo}}$$

### Minta:

A vevőantenna ellipszoidi földrajzi koordinátái: (BME permanens állomás)

$$\varphi = 47^\circ 28' 51,39721''$$

$$\lambda = 19^\circ 3' 23,50588''$$

$$h = 180,924 \text{ m}$$

A műhold térbeli derékszögű koordinátái: (PRN126, IOR-W EGNOS geostacionárius műhold)

$$X = 38238200,0 \text{ m}$$

$$Y = 17804800,0 \text{ m}$$

$$Z = 104000,0 \text{ m}$$

A koordináta különbségek:

$$X' = 34156317,537\text{m}$$

$$Y' = 16394788,856\text{m}$$

$$Z' = -4574199,470\text{m}$$

A vevőről a műholdra mutató vektor hossza:  $\sqrt{(X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2} = 38162369,293\text{m}$

A forgatási mátrix elemei:

$$R = \begin{bmatrix} -0,69665983 & -0,24064831 & 0,67583539 \\ -0,32650087 & 0,94519690 & 0,00000000 \\ 0,63879751 & 0,22066084 & 0,73705260 \end{bmatrix}$$

A topocentrikus koordináták:

$$X_{topo} = -30832118,567\text{m}$$

$$Y_{topo} = 4344236,329\text{m}$$

$$Z_{topo} = 22065232,957\text{m}$$

A vevőről a műholdra mutató vektor hossza:  $\sqrt{X_{topo}^2 + Y_{topo}^2 + Z_{topo}^2} = 38162369,293\text{m}$

Azimut:  $\alpha = 172,0^\circ$

Magassági szög:  $\delta = 35,3^\circ$

**Minta:**

Vevőantenna ugyanaz, de PRN120, AOR-E EGNOS geostacionárius műhold

$$X = 40648400,0\text{m}$$

$$Y = -11273600,0\text{m}$$

$$Z = 26000,0\text{m}$$

Azimut:  $\alpha = 223,1^\circ$

Magassági szög:  $\delta = 26,1^\circ$

## 2 Műholdak pályaszámítása

### 4. feladat

Adottak az aktuális almanach adatok<sup>1</sup>. Számítsuk ki a PRN műhold térbeli derékszögű koordinátáit az almanach adatok alapján (GPS másodpercben értendő)  $t$  időpontra!

A YUMA almanach adatok szerkezete:

Műhold azonosítója	ID	
Műhold státusza	Health	
Excentricitás	Eccentricity	$e$
Az almanach adatok vonatkozási időpontja	Time of Applicability(s)	$T_0$
Inklináció	Orbital Inclination(rad)	$i$
A felszálló csomópont rektaszcenziójának időbeli változása	Rate of Right Ascen(r/s)	$\dot{\Omega}$
Pályaellipszis fél nagytengelyének négyzetgyöke	SQRT(A) (m 1/2)	$\sqrt{a}$
A felszálló csomópont hosszúsága	Right Ascen at Week(rad)	$\Omega_0$
Perigeum argumentuma	Argument of Perigee(rad)	$\omega$
Középanomália a $T_0$ időpontban	Mean Anom(rad)	$M_0$
Műhold óraállás	Af0 (s)	
Műhold órajárás	Af1 (s/s)	
GPS-hét	week	

Átlagos szögsebesség és a keringési idő közötti összefüggés:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

ahol

$$\mu = 3,986004418E + 14 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \text{ a geocentrikus gravitációs állandó}$$

Középanomália:

$$M = M_0 + n(t - T_0)$$

Excentrikus anomália (Kepler egyenlet megoldása iterációval):

$$E = M + e \sin E$$

Valódi anomália:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

Vezérsugár és sebesség:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$v = \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - (e \cos E)^2}$$

<sup>1</sup> (Letölthető: <http://www.navcen.uscg.gov/ftp/GPS/almanacs/yuma>)

Pályasíkbeli koordináták:

$$u_1 = r \cos \nu$$

$$u_2 = r \sin \nu$$

Áttérés égi egyenlítői rendszerbe:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(-\Omega) \mathbf{R}_1(-i) \mathbf{R}_3(-\omega) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

ahol

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - T_0)$$

Áttérés Földhöz kötött térbeli derékszögű koordináta-rendszerbe:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ECEF} = \mathbf{R}_3(\omega_E t) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ahol

$$\omega_E = 7,2921151467E-05 \frac{1}{s} \text{ a Föld átlagos forgási szögsebessége}$$

### Minta

PRN=01,  $t = 0$  mp, 1337. GPS-hét

Az almanach adatok a következők:

```

***** Week 313 almanac for PRN-01 *****
ID: 01
Health: 000
Eccentricity: 0.5897521973E-002
Time of Applicability(s): 503808.0000
Orbital Inclination(rad): 0.9848300469
Rate of Right Ascen(r/s): -0.7680319916E-008
SQRT(A) (m 1/2): 5153.614746
Right Ascen at Week(rad): 0.1161222333E+001
Argument of Perigee(rad): -1.716861183
Mean Anom(rad): -0.1236819198E+001
Af0(s): 0.5722045898E-005
Af1(s/s): 0.3637978807E-011
week: 313

```

Átlagos szögsebesség:

$$n = 0,0001458589 \frac{1}{s}$$

Keringési idő:

$$T = 43077,137s \text{ azaz } T = 11^h 57^m 57.137^s$$

Középanomália:

$$M = 38,76095482^\circ$$

Excentrikus anomália:

$$E = 38,97348258^\circ$$

Valódi anomália:

$$\nu = 39,18650029^\circ$$

Vezérsugár:

$$r = 26437969,78\text{m}$$

Sebesség:

$$v = 3891,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Pályasíkbeli koordináták:

$$u_1 = 20491895,42\text{m}$$

$$u_2 = 16704743,88\text{m}$$

Térbeli derékszögű koordináták égi egyenlítői rendszerben:

$$X = 16882231,09\text{m}$$

$$Y = 7489462,78\text{m}$$

$$Z = -18917306,01\text{m}$$

Térbeli derékszögű koordináták Földhöz kötött térbeli derékszögű rendszerben:

$$X_{\text{ECEF}} = 16882231,09\text{m}$$

$$Y_{\text{ECEF}} = 7489462,78\text{m}$$

$$Z_{\text{ECEF}} = -18917306,01\text{m}$$

Vegyük észre, hogy az égi egyenlítői és a Földhöz kötött rendszerben a koordináták  $t = 0\text{mp}$  időpontban azonosak! Ismételjük meg a számítást  $t = 7200\text{mp}$  időpontra is!

$$X_{\text{ECEF}} = 21130239,75\text{m}$$

$$Y_{\text{ECEF}} = 16125980,99\text{m}$$

$$Z_{\text{ECEF}} = 475476,63\text{m}$$

**5. feladat**

Adott egy RINEX navigációs állomány. Számítsuk ki a PRN műhold térbeli derékszögű koordinátáit a fedélzeti pályaadatok alapján  $t$  időpontra!

A RINEX navigációs fájl szerkezete:

OBS. RECORD	DESCRIPTION	FORMAT
PRN / EPOCH / SV CLK	- Satellite PRN number	I2,
	- Epoch: Toc - Time of Clock	
	year (2 digits)	5I3,
	month	
	day	
	hour	
	minute	
	second	F5.1,
	- SV clock bias (seconds)	3D19.12
	- SV clock drift (sec/sec)	
	- SV clock drift rate (sec/sec2)	
BROADCAST ORBIT - 1	- IODE Issue of Data, Ephemeris	3X,4D19.12
	- Crs (meters)	
	- Delta n (radians/sec)	
	- M0 (radians)	
BROADCAST ORBIT - 2	- Cuc (radians)	3X,4D19.12
	- e Eccentricity	
	- Cus (radians)	
	- sqrt(A) (sqrt(m))	
BROADCAST ORBIT - 3	- Toe Time of Ephemeris	3X,4D19.12
	(sec of GPS week)	
	- Cic (radians)	
	- OMEGA (radians)	
	- CIS (radians)	
BROADCAST ORBIT - 4	- i0 (radians)	3X,4D19.12
	- Crs (meters)	
	- omega (radians)	
	- OMEGA DOT (radians/sec)	
BROADCAST ORBIT - 5	- IDOT (radians/sec)	3X,4D19.12
	- Codes on L2 channel	
	- GPS Week # (to go with TOE)	
	Continuous number, not mod(1024)!	
	- L2 P data flag	
BROADCAST ORBIT - 6	- SV accuracy (meters)	3X,4D19.12
	- SV health (MSB only)	
	- TGD (seconds)	
	- IODC Issue of Data, Clock	
BROADCAST ORBIT - 7	- Transmission time of message	3X,4D19.12
	(sec of GPS week, derived e.g.	
	from Z-count in Hand Over Word (HOW)	
	- spare	
	- spare	
	- spare	

Átlagos szögsebesség és a keringési idő közötti összefüggés:

$$n_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

A műhold szögsebessége:

$$n = n_0 + \Delta n$$

Középanomália:

$$M = M_0 + n(t - T_0)$$

Excentrikus anomália (Kepler egyenlet megoldása iterációval):

$$E = M + e \sin E$$

Valódi anomália:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

A műhold szöghelyzete a pályasíkban:

$$\varphi = \nu + \omega$$

A pályamenti (érintőirányú) korrekció:

$$\delta u = C_{uc} \cos 2\varphi + C_{us} \sin 2\varphi$$

A radiális (sugárirányú) korrekció:

$$\delta r = C_{rc} \cos 2\varphi + C_{rs} \sin 2\varphi$$

A pályasíkra merőleges korrekció:

$$\delta i = C_{ic} \cos 2\varphi + C_{is} \sin 2\varphi$$

A javított szöghelyzet a pályasíkban:

$$u = \varphi + \delta u$$

A javított geocentrikus távolság (a vezérsugár hossza):

$$r = a(1 - e \cos E) + \delta r$$

A javított pályahajlás (inklináció):

$$i = i_0 + \frac{di}{dt} t + \delta i$$

A geocentrikus koordináták a pályasíkban:

$$x = r \cos u$$

$$y = r \sin u$$

$$z = 0$$

A felszálló csomópont javított hosszúsága:

$$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_E)t - \omega_E t_{0e}$$

A WGS84 rendszerbeli koordináták:

$$X = x \cos \Omega - y \cos i \sin \Omega$$

$$Y = x \sin \Omega + y \cos i \cos \Omega$$

$$Z = y \sin i$$

**Minta**PRN=01,  $t = 0$  mp, 1337. GPS-hétA RINEX navigációs adatok a következők<sup>2</sup>:

```

1 5 8 21 0 0 0.0 0.426312908530E-05 0.193267624127E-11 0.000000000000E+00
0.350000000000E+02 0.117437500000E+03 0.417981696330E-08 0.673698286695E+00
0.605918467045E-05 0.587689515669E-02 0.589154660702E-05 0.515365518761E+04
0.000000000000E+00-0.465661287308E-07 0.116516196837E+01-0.335276126862E-07
0.984675398311E+00 0.275531250000E+03-0.171419911290E+01-0.826462996930E-08
0.596096258373E-09 0.000000000000E+00 0.133700000000E+04 0.000000000000E+00
0.200000000000E+01 0.000000000000E+00-0.325962901115E-08 0.350000000000E+02
-0.720000000000E+04 0.000000000000E+00 0.000000000000E+00 0.000000000000E+00

```

Az átlagos szögsebesség:

$$n_0 = 0,0001458555 \frac{1}{s}$$

A műhold szögsebessége:

$$n = 0,0001458597 \frac{1}{s}$$

Középanomália:

$$M = 38,60006849^\circ$$

Excentrikus anomália:

$$E = 38,81111022^\circ$$

Valódi anomália:

$$\nu = 39,02263786^\circ$$

A műhold szöghelyzete a pályasíkban:

$$\varphi = -59,19373655^\circ$$

A pályamenti korrekció:

$$\delta u = -0,00046202^\circ$$

A radiális korrekció:

$$\delta r = -234,31\text{m}$$

A pályasíkra merőleges korrekció:

$$\delta i = 0,00000296^\circ$$

A javított szöghelyzet a pályasíkban:

$$u = -59,19419858^\circ$$

A javított geocentrikus távolság:

$$r = 26438298,58\text{m}$$

<sup>2</sup> letölthető pl. az <ftp://igs.ifag.de/IGS/BRDC> anonymous ftp szerverről

A javított pályahajlás:

$$i = 56,41774747^\circ$$

A geocentrikus koordináták a pályasíkban:

$$x = 13539841,50\text{m}$$

$$y = -22708067,38\text{m}$$

A felszálló csomópont javított rektaszcenziója:

$$\Omega = 66,75886324^\circ$$

A WGS84 rendszerbeli koordináták:

$$X = 16884174,37\text{m}$$

$$Y = 7484682,25\text{m}$$

$$Z = -18917923,23\text{m}$$

Ismételjük meg a számítást  $t = 7200\text{mp}$  időpontra is!

$$X_{\text{ECEF}} = 21130837,79\text{m}$$

$$Y_{\text{ECEF}} = 16125597,00\text{m}$$

$$Z_{\text{ECEF}} = 471676,66\text{m}$$

Hasonlítsuk össze a kapott eredményeket az 4. feladat eredményeivel!

### 3 Pszeudótávolságok korrekciói

#### 6. feladat

Adottak egy GPS-vevő nyers mérési eredményei (pszeudótávolságok), a hozzátartozó navigációs üzenetek, valamint ismert a vevőantenna pozíciója. Számítsuk ki a pszeudótávolságok „hibáit” (eltérését a műhold-vevő koordinátákból számítható távolságtól)!

Nyilvánvaló, hogy a pszeudótávolságokat különböző szabályos hibák miatt korrekciókkal kell ellátni. A szemléletesség kedvéért a nulladik lépésben ettől tekintünk el, majd vegyük sorra az egyes szabályos hibákat.

#### Minta

A BME permanens állomásának mérési eredményei, 2005. augusztus 21-én, 0:15:30 időpontban (RINEX formátumban) a következők<sup>3</sup>:

05	8	21	0	15	30.0000000	0	9G26G19G18G22G16G14G15G	3G21			
24986454.337		24986441.038					15687751.555	5	12225354.742	1	41.000
22.000											
21831847.364		21831830.592					-2913962.191	8	-2266403.109	5	49.000
42.000											
21842016.701		21842001.490					11239050.973	9	8764954.406	4	50.000
38.000											
20747714.524		20747697.988					-1236486.461	9	-943698.695	5	50.000
40.000											
23205542.153		23205527.230					28713484.742	7	22395800.258	1	47.000
31.000											
25200147.150		25200133.525					-250563.773	2	-176988.863	1	34.000
15.000											
20991199.442		20991185.291					15474064.809	9	12069828.480	5	51.000
42.000											
20419716.838		20419702.356					1488160.266	9	1188689.813	5	51.000
42.000											
23871166.433		23871151.071					41257175.391	7	32166819.344	1	45.000
26.000											

A BME permanens állomás antenna fáziscentrumának koordinátái (lásd 1. feladat):

$$\varphi = 47^\circ 28' 51,39721''$$

$$\lambda = 19^\circ 03' 23,50588''$$

$$h = 180,924 \text{ m}$$

<sup>3</sup> letölthető pl. az <ftp://igs.ifag.de/EUREF/obs> anonymous ftp szerverről

A mérésekhez tartozó navigációs üzenetek (RINEX formátumban):

26	5	8	21	0	0	0.0	0.143102370202E-04	-0.272848410532E-11	0.000000000000E+00
							0.189000000000E+03	0.111875000000E+03	0.408409883690E-08
							0.587292015552E-05	0.165401680861E-01	0.574998557568E-05
							0.000000000000E+00	-0.186264514923E-06	0.115125329229E+01
							0.987102439385E+00	0.283625000000E+03	0.728416728863E+00
							0.373229835926E-09	0.000000000000E+00	0.133700000000E+04
							0.000000000000E+00	0.000000000000E+00	-0.651925802231E-08
							0.270000000000E+02	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
19	5	8	21	0	0	0.0	-0.254516489804E-04	-0.341060513165E-12	0.000000000000E+00
							0.400000000000E+01	0.640625000000E+02	0.496306387439E-08
							0.353530049324E-05	0.341176136863E-02	0.740215182304E-05
							0.000000000000E+00	0.162050127983E-06	-0.195244214808E+01
							0.958550427313E+00	0.230625000000E+03	-0.155018490386E+01
							0.507521140293E-09	0.000000000000E+00	0.133700000000E+04
							0.280000000000E+01	0.000000000000E+00	-0.144354999065E-07
							-0.600000000000E+02	0.400000000000E+01	0.000000000000E+00
18	5	8	21	0	0	0.0	-0.181222800165E-03	-0.295585778076E-11	0.000000000000E+00
							0.750000000000E+02	0.306250000000E+02	0.391266297812E-08
							0.148266553879E-05	0.645915919449E-02	0.146627426148E-04
							0.000000000000E+00	-0.242143869400E-07	0.129535645188E+00
							0.961217619555E+00	0.971250000000E+02	-0.277486111535E+01
							-0.159649507186E-09	0.000000000000E+00	0.133700000000E+04
							0.280000000000E+01	0.000000000000E+00	-0.102445483208E-07
							-0.600000000000E+02	0.400000000000E+01	0.000000000000E+00
22	5	8	21	0	0	0.0	0.353939831257E-04	0.193267624127E-11	0.000000000000E+00
							0.236000000000E+03	0.334375000000E+02	0.401659587877E-08
							0.173598527908E-05	0.481674622279E-02	0.146180391312E-04
							0.000000000000E+00	0.119209289551E-06	0.138287542357E+00
							0.958685457577E+00	0.960625000000E+02	-0.158172092210E+01
							-0.213580325049E-09	0.000000000000E+00	0.133700000000E+04
							0.200000000000E+01	0.000000000000E+00	-0.181607902050E-07
							-0.600000000000E+02	0.400000000000E+01	0.000000000000E+00
14	5	8	21	0	0	0.0	-0.274591147900E-04	0.227373675443E-12	0.000000000000E+00
							0.920000000000E+02	0.127750000000E+03	0.415731602604E-08
							0.672042369843E-05	0.180248403922E-02	0.595301389694E-05
							0.000000000000E+00	-0.298023223877E-07	0.113808105648E+01
							0.983167296544E+00	0.271687500000E+03	-0.203988448481E+01
							0.653598653579E-09	0.100000000000E+01	0.133700000000E+04
							0.000000000000E+00	0.000000000000E+00	-0.931322574615E-08
							-0.630000000000E+03	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
15	5	8	21	0	0	0.0	0.477412715554E-03	0.557065504836E-11	0.000000000000E+00
							0.120000000000E+03	-0.530625000000E+02	0.489377527396E-08
							-0.291690230370E-05	0.912650628015E-02	0.594928860664E-05
							0.000000000000E+00	-0.132247805595E-06	-0.886471748421E+00
							0.960218737627E+00	0.265187500000E+03	0.248227321753E+01
							-0.523593238331E-09	0.000000000000E+00	0.133700000000E+04
							0.200000000000E+01	0.000000000000E+00	-0.279396772385E-08
							-0.600000000000E+02	0.400000000000E+01	0.000000000000E+00
3	5	8	21	0	0	0.0	0.275704078376E-04	0.306954461848E-11	0.000000000000E+00
							0.163000000000E+03	0.668437500000E+02	0.560487632274E-08
							0.374205410480E-05	0.707931595389E-02	0.910274684429E-05
							0.000000000000E+00	0.316649675369E-07	-0.209515802246E+01
							0.926583685027E+00	0.185375000000E+03	0.598806136919E+00
							0.542522598244E-09	0.000000000000E+00	0.133700000000E+04
							0.200000000000E+01	0.000000000000E+00	-0.419095158577E-08
							-0.600000000000E+02	0.400000000000E+01	0.000000000000E+00
21	5	8	21	0	0	0.0	0.122862868011E-03	0.295585778076E-11	0.000000000000E+00
							0.700000000000E+02	-0.520312500000E+02	0.520950271098E-08
							-0.286288559437E-05	0.103259127354E-01	0.539794564247E-05
							0.000000000000E+00	0.143423676491E-06	-0.919992059968E+00
							0.946710013106E+00	0.267875000000E+03	-0.306533147143E+01
							-0.543236913712E-09	0.000000000000E+00	0.133700000000E+04
							0.280000000000E+01	0.000000000000E+00	-0.116415321827E-07
							-0.600000000000E+02	0.400000000000E+01	0.000000000000E+00

A megadott időpontra kiszámított műhold-koordinátákat az alábbi táblázat tartalmazza:

műhold	X [m]	Y [m]	Z [m]
03	18342628,89	1557621,38	19104825,07
14	16364764,64	19550744,98	-7468275,04
15	7368041,02	14612917,54	20664481,21
18	4898741,72	15221855,57	21324541,70
19	12600207,80	-8963576,17	21705846,44
21	-2687176,94	22245549,38	13891413,71
22	17276164,86	12484145,42	16005378,82
26	-13249567,26	5900762,60	21909334,65

A vevőantenna ismert koordinátái és az előbb kiszámított műhold-koordináták alapján a számított műhold-vevő távolságokat, a pszeudótávolságokat, valamint ezek eltérését (*observed minus computed, omc*) a következő táblázat tartalmazza:

műhold	számított távolság [m]	pszeudótávolság [m]	omc [m]
03	20285911,46	20419716,84	133805,38
14	25049795,65	25200147,15	150351,50
15	20992302,86	20991199,44	-1103,42
18	21645669,66	21842016,70	196347,04
19	21682111,10	21831847,36	149736,26
21	23766007,98	23871166,43	105158,45
22	20616268,58	20747714,52	131445,94
26	24848702,54	24986454,34	137751,80

### 7. feladat

A 6. feladathoz képest most vegyük figyelembe a műholdak óraigazítatlanságának hatását!

A műholdak óraigazítatlanságának hatása a következő összefüggéssel írható le:

$$\delta t^s(t) = a_0 + a_1(t - t_{0c}) + a_2(t - t_{0c})^2$$

ahol az  $a_0, a_1, a_2$  óraparaméterek a  $t_{0c}$  időpontra vonatkoznak.

A mért távolságok korrigálása érdekében a pszeudótávolságokhoz hozzá kell adni az előző képlettel meghatározott óraigazítatlanságok értékét.

A 6. példa adataival a műholdak óraigazítatlansága (távolságegységben) a következőképpen alakul:

műhold	$\delta t^s$ [m]
03	8266,26
14	-8231,97
15	143126,28
18	-54330,05
19	-7630,31
21	36834,19
22	10611,39
26	4289,34

A műholdak óraigazítatlanságának hatásával a mért és számított műhold-vevő távolságok eltérése a következő lesz:

műhold	omc [m]
03	142071,64
14	142119,53
15	142022,86
18	142016,99
19	142105,95
21	141992,64
22	142057,33
26	142041,14

### **8. feladat**

A 7. feladathoz képest most vegyük figyelembe az ionoszféra jelkésleltető hatását is! Az ionoszféra hatásának modellezésére számos módszer ismert. Didaktikai okokból egy olyan módszert javasolunk, amely a berni ionoszféra központ<sup>4</sup> adataiból egy viszonylag egyszerű algoritmus segítségével számítja ki a korrekciókat. Megjegyezzük, hogy az EGNOS rendszerben is hasonló elven alapuló modelleket és algoritmusokat alkalmaznak. Illetve, hogy a klasszikus alkalmazások egy másik, itt nem részletezett módszert, a Klobuchar- módszert alkalmazták.

Alkalmazott módszerünkhöz a berni ionoszféra központ termékei közül azokra a globális ionoszféra modellekre van szükségünk, amelyek diszkrét helyekre és időpontokra tartalmazzák a konkrét TEC értékeket („codg” karakterekkel kezdődő állományok). A feladat megoldásának lépései:

- ionoszférikus pont koordinátáinak meghatározása
- időben és térben legközelebbi rácspont megkeresése. Első közelítésben ebben a pontban megadott érték tekinthető a keresett értéknek.
- térbeli és időbeli interpoláció.
- szorzás a ferdeségi szorzótényezővel.

A korábbi feladatok adataihoz a CODG2330.05I.Z állományra van szükségünk. Válasszuk mondjuk a 26. műholdat és csak erre számoljuk ki az ionoszférikus késés értékét!

Az ionoszférikus pont koordinátái a 26-os műhold esetében:

$$\varphi = 61,2^\circ$$

$$\lambda = 32,2^\circ$$

Az időben és térben legközelebbi rácspontban a TEC érték 34 TECU. Ha elvégezzük a térbeli és időbeli interpolációt, akkor 33.3 TECU-t kapunk, ha ezt megszorozzuk a ferdeségi szorzótényezővel, illetve átváltjuk méterre, akkor 3.36 m-t kapunk.

### **9. feladat**

A 8. feladathoz képest most vegyük figyelembe a troposzféra jelkésleltető hatását is! A troposzféra jelkésleltető hatása a Hopfield-model szerint a következő összefüggéssel írható le:

$$R_{trop} = F(E) \cdot (T_d + T_w)$$

ahol a száraz és nedves levegő zenit irányú hatása a következő

$$T_d = \frac{10^{-6}}{5} 77,64 \frac{p}{T} [40136 + 148,72(T - 273,16)]$$

<sup>4</sup> <http://www.cx.unibe.ch/aiub/ionosphere.html>

$$T_w = \frac{10^{-6}}{5} \left( -12,96 \frac{e}{T} + 3,718 \cdot 10^5 \frac{e}{T^2} \right) \cdot 11000$$

A képletekben  $p$  a légnyomás hektopaszskálban,  $T$  a hőmérséklet kelvinben és  $e$  a parciális párányomás hektopaszskálban.

A fenti képletekben az  $e$  parciális párányomás szerepel, a gyakorlatban általában a relatív páratartalom (jelölése  $H$ ) mérése egyszerűbb. A két mennyiség között az összefüggés a következő:

$$e = 0,0611 \cdot H \cdot 10^{\frac{7,5(T-273,15)}{T}},$$

ahol  $T$  továbbra is a hőmérséklet kelvinben.

Nem zenitirányban a ferdeségi szorzótényező értéke:  $F(E) = \frac{1}{\sin \sqrt{E^2 + 6,25}}$ , ahol  $E$  a magassági

szög fokban. (Megjegyezzük, hogy az eredeti modell szerint a száraz és nedves hatásra külön ferdeségi szorzótényezőt kell használni, de a gyakorlatban ez nem szükséges.)

Láttuk, hogy a troposzféra okozta késés modellezéséhez az állásponton meteorológiai mennyiségek mérése szükséges. Ez a gyakorlatban nem mindig valósítható meg, ezért az állomásra vonatkozó meteorológiai adatokat gyakran az ún. standard atmoszféra összefüggéseivel állítják elő:

$$\begin{aligned} T &= T_0 - 0,0065h, \\ p &= p_0 (1 - 2,26 \cdot 10^{-5} h)^{5,225}, \\ H &= H_0 \exp(-6,396 \cdot 10^{-4} h), \end{aligned}$$

ahol  $h$  az álláspont tengerszint feletti magassága méterben,  $H$  a relatív páratartalom. A tengerszintre ( $h = 0$ ) vonatkozó referencia-értékek:

$$T_0 = 291,16\text{K} (t = +18^\circ\text{C}), \quad p_0 = 1013,25 \text{ hPa}, \quad H_0 = 50\%.$$

A standard atmoszféra összefüggései alapján 137 m tengerszint feletti magasságban (ez megfelel a BME permanens állomás tengerszint feletti magasságának)  $T=17,1^\circ\text{C}$ ,  $p=997,\text{mbar}$ ,  $H=45,8\%$ ,  $e=7,7\text{mbar}$ , a zenitirányú késés Hopfield modellje alapján 2,313 m (száraz összetevő: 2,276m, nedves: 0,074m).

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a troposzférikus késés értéke a meteorológiai mennyiségek függvényében!

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a troposzférikus késés értéke a magasság függvényében! Számoljuk ki, hogyan változik a troposzférikus késés értéke a magassági szög szerint!

A 6. példa adataival a magassági szögek és a troposzféra hatása a következőképpen alakul:

műhold	$E$ [°]	$T$ [m]
03	77,1	2,41
14	6,6	19,13
15	53,1	2,94
18	47,0	3,21
19	46,4	3,24
21	17,3	7,83
22	68,8	2,52
26	6,1	20,48

## 4 Abszolút helymeghatározás egyenletrendszerének megoldása

Az előző fejezetben lényegében áttekintettük, hogy a nyers mérési eredményeket milyen korrekciókkal kell ellátnunk ahhoz, hogy az abszolút helymeghatározás egyenletrendszerét felírhassuk. Ebben a fejezetben írjuk fel azt a bizonyos egyenletrendszert és oldjuk meg a klasszikus, legkisebb négyzetek módszerén alapuló összefüggések használatával! Mindenekelőtt nézzük meg, hogy a műholdgeometria jellemzésére szolgáló DOP értékek hogyan számíthatók!

### 10. feladat

Első esetben feltételezzük azt a valóságban elő nem forduló helyzetet, hogy nincs vevőórahiba. Ekkor az összefüggések matematikai háttérének tisztázása nélkül a súlykoefficiens mátrix főátlóbeli elemei:

$$q_{xx} = \frac{(yy)(zz) - (yz)^2}{\det}$$

$$q_{yy} = \frac{(xx)(zz) - (xz)^2}{\det}$$

$$q_{zz} = \frac{(xx)(yy) - (xy)^2}{\det}$$

ahol

$$xx = \sum \cos^2 \alpha_i \cdot \cos^2 \delta_i$$

$$yy = \sum \cos^2 \alpha_i \cdot \sin^2 \delta_i$$

$$zz = \sum \sin^2 \alpha_i$$

$$xy = \sum \cos^2 \alpha_i \cdot \sin \delta_i \cdot \cos \delta_i$$

$$xz = \sum \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \delta_i$$

$$yz = \sum \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \sin \delta_i$$

$$\det = (xx)(yy)(zz) + 2(xy)(yz)(xz) - (xx)(yz)^2 - (yy)(xz)^2 - (zz)(xy)^2$$

A DOP értékek:

$$PDOP = \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}}$$

$$HDOP = \sqrt{q_{xx} + q_{yy}}$$

$$VDOP = \sqrt{q_{zz}}$$

Az alábbi táblázat tartalmazza az előző feladat mérései alapján a műholdak magassági szögeit ( $\alpha$ ) és azimutjait ( $\delta$ ). Mostantól a számításokba csak a  $10^\circ$  felett látszó műholdakat vegyük be!

műhold	$\alpha$ [°]	$\delta$ [°]
19	46,4	302,8
18	47,0	59,9
22	68,8	123,9
16	27,2	202,6
15	53,1	64,7
03	77,1	268,0
21	17,3	74,8

A táblázat adataiból levezethető DOP értékek a következőképpen alakulnak:

$$PDOP = 1,4$$

$$HDOP = 1,3$$

$$VDOP = 0,5$$

Vegyük észre, hogy a DOP értékek tényleges mérések nélkül is számíthatók, mindössze a műholdak és a vevő közelítő koordinátáinak ismerete szükséges!

### 11. feladat

Ezután ismételjük meg a számítást a vevőórahiba hatásának figyelembevételével! A most felírt összefüggések ugyanazon a levezetésen alapulnak, mint az előző feladatban, de a képleteket most más formában írjuk fel.

Legyen a helymeghatározás alakmátrixának  $i$ . műholdra vonatkozó sora a következő:

$$\mathbf{A}_i = [\cos(\alpha)\cos(\delta) \quad \cos(\alpha)\sin(\delta) \quad \sin(\alpha) \quad 1]$$

A súlykoefficiens mátrix a következő összefüggéssel kapható:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1}$$

A megfelelő főátlóbeli elemek összege adja a különböző DOP értékeket:

$$PDOP = \sqrt{\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{Q}_{22} + \mathbf{Q}_{33}}$$

$$HDOP = \sqrt{\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{Q}_{22}}$$

$$VDOP = \sqrt{\mathbf{Q}_{33}}$$

$$TDOP = \sqrt{\mathbf{Q}_{44}}$$

$$GDOP = \sqrt{\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{Q}_{22} + \mathbf{Q}_{33} + \mathbf{Q}_{44}}$$

Eredmények:

$$PDOP = 2,3$$

$$HDOP = 1,4$$

$$VDOP = 1,8$$

$$TDOP = 1,4$$

$$GDOP = 2,6$$

Összehasonlítva a kapott DOP értékeket az előző feladat eredményeivel megállapítható az a jól ismert összefüggés, hogy a GPS-szel elérhető szerényebb magassági pontosságért egyrészt az órahiba felelős!

### 12. feladat

Megjegyezzük, hogy a tényleges alkalmazások esetében az eddig bemutatott számításokat több hatás figyelembevételével kell még finomítani. Ezek a hatások, problémák a következők:

- A műholdak koordinátáit a mérőjelek kibocsátásának időpontjára kell kiszámítani
- A Föld forgás hatása
- Relativisztikus korrekció
- Vevő órahiba

A fenti hatások számításaival most nem foglalkozunk. Ebben a feladatban a pszeudótávolságok korrigált értékei, a műhold-koordináták és a vevő előzetes koordinátáinak ismeretében határozzuk meg a vevőantenna pozícióját!

Az abszolút helymeghatározás egyenletrendszerének megoldására számos módszer ismert, mi most a legkisebb négyzetek módszerén alapuló módszert alkalmazzuk. Legyen az egyenletrendszerünk alakmátrixa és tisztatagvektora a következő:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\frac{X^i - x_0}{\rho_0^i} & -\frac{Y^i - y_0}{\rho_0^i} & -\frac{Z^i - z_0}{\rho_0^i} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_i = \text{Pr}^i - \rho_0^i$$

ahol

$X^i, Y^i, Z^i$  az  $i$ . műhold  $x, y, z$  koordinátái

$x_0, y_0, z_0$  a vevő előzetes koordinátái

$\rho_0^i$  az  $i$ . műhold és a vevő előzetes koordinátáiból számított távolság

$\text{Pr}^i$  az  $i$ . műholdra mért pszeudótávolság korrigált értéke

Így a vevő előzetes koordinátáinak és órahibájának változásait tartalmazó vektor ( $\mathbf{x}$ ) a következőképpen alakul:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{l})$$

A vevő koordináták és órahiba végleges értéke az előzetes értékek és a változások összegeként adódik.

Minta:

A pszeudótávolságok korrigált értékei:

műhold	pszeudótávolság [m]
03	20427974.37
15	21134324.60
16	23207616.02
18	21787685.20
19	21824211.57
21	23907994.34
22	20758319.60

A vevő előzetes koordinátái:

$$x_0 = 4081882,42 \text{ m}$$

$$y_0 = 1410011,13 \text{ m}$$

$$z_0 = 4678199,42 \text{ m}$$

A műhold-koordináták:

műhold	X [m]	Y [m]	Z [m]
03	18342552.10	1557385.63	19104915.45
15	7368229.58	14612731.50	20664547.36
16	26581676.73	849293.05	-368084.44

18	4899017.82	15221838.24	21324492.54
19	12600072.11	-8963821.08	21705823.94
21	-2686951.01	22245458.93	13891606.51
22	17276366.96	12484054.86	16005229.88

A változások vektora:

$$dx = +1,91m$$

$$dy = +0,12m$$

$$dz = +0,23m$$

$$c \cdot \delta t = 142055,59m$$

Ismételjük meg a számítást úgy, hogy a tisztatagvektor elemeinek számtani középértékét (azaz a vevő órahiba első közelítését) kivonjuk a pszeudótávolságok értékeiből!

## 5 Az Egységes Országos Vetület összefüggései

### 13. feladat

Adott egy pont EOVS síkkoordinátaival. Számítsuk ki a pont ellipszoidi földrajzi koordinátáit az IUGG67 ellipszoidon!

1. lépés: A vetületi koordinátákról áttérés a segédgömbi koordináta-rendszerbe:

$$\varphi' = 2 \arctan \left[ e \frac{X - 200000m}{Rm_0} \right] - 90^\circ$$

$$\lambda' = \frac{Y - 650000m}{Rm_0}$$

ahol  $e$  a természetes logaritmus alapja

2. lépés: A segédgömbi koordinátákról áttérés gömbi koordinátákra:

$$\varphi = \arcsin(\sin \varphi' \cos \varphi_0 + \cos \varphi' \sin \varphi_0 \cos \lambda')$$

$$\lambda = \arcsin \frac{\cos \varphi' \sin \lambda'}{\cos \varphi}$$

3. lépés: Áttérés az ellipszoidi rendszerre fokozatos közelítéssel

$$(\Phi) = 2 \arctan \sqrt[2]{\frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{k \left( \frac{1 - \varepsilon \sin \Phi}{1 + \varepsilon \sin \Phi} \right)^{\frac{n\varepsilon}{2}}} - 90^\circ$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{\lambda}{n}$$

ahol  $\varepsilon$  az IUGG67 ellipszoid első numerikus excentricitása.

A képletekben használt vetületi és egyéb állandók:

$$R = 6379743,001m$$

$$m_0 = 0,99993$$

$$\varphi_0 = 47^\circ 06' 0,00000''$$

$$n = 1,000719704936$$

$$k = 1,003110007693$$

$$\Lambda_0 = 19^\circ 02' 54,8584''$$

$$a = 6378160,000m$$

$$b = 6356774,516m$$

$$\varepsilon = 0,0818205679407$$

Minta:

A pont EOY koordinátái: (BME permanens állomás)

$$Y = 650684,464\text{m}$$

$$X = 237444,185\text{m}$$

A segédgömbi koordináták:

$$\varphi' = 0^\circ 20' 10,69358''$$

$$\lambda' = 0^\circ 00' 22,13110''$$

A gömbi koordináták:

$$\varphi = 47^\circ 26' 10,69229''$$

$$\lambda = 0^\circ 0' 32,71793''$$

Az ellipszoidi földrajzi koordináták:

$$\Phi = 47^\circ 28' 52,36292''$$

$$\Lambda = 19^\circ 03' 27,55280''$$

#### 14. feladat

A számításokat végezzük el ellentett irányba! Adott egy pont ellipszoidi földrajzi koordinátaival az IUGG67 ellipszoidon. Számítsuk ki EOY koordinátáit!

1. lépés: Áttérés ellipszoid koordinátákról gömbi koordinátákra

$$\varphi = 2 \arctan \left[ k \tan^n \left( 45^\circ + \frac{\Phi}{2} \right) \left( \frac{1 - \varepsilon \sin \Phi}{1 + \varepsilon \sin \Phi} \right)^{\frac{n\varepsilon}{2}} \right] - 90^\circ$$

$$\lambda = n(\Lambda - \Lambda_0)$$

2. lépés: Áttérés segédgömbi koordinátákra

$$\varphi' = \arcsin(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda)$$

$$\lambda' = \arcsin \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi'}$$

3. lépés: Áttérés vetületi koordinátákra

$$X = Rm_0 \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) + 200000$$

$$Y = Rm_0 \lambda' + 650000$$

## 6 Átszámítás WGS84 és EOVS között

### 15. feladat

Adott egy pont ellipszoidi földrajzi koordinátaival a WGS84 ellipszoidon. Adottak egy a WGS84 és az IUGG67 ellipszoidok közötti háromparaméteres térbeli transzformáció paraméterei (eltolás-értékek). Számítsuk ki a pont koordinátáit az EOVS vetületen!

1. lépés: az ellipszoidi földrajzi koordináták átszámítása térbeli derékszögű koordinátákra (lásd 1. feladat)
2. lépés: áttérés a WGS84 ellipszoidról az IUGG67 ellipszoidra, azaz a térbeli derékszögű koordináták transzformációja (eltolása).

$$\begin{bmatrix} X_{IUGG67}' \\ Y_{IUGG67}' \\ Z_{IUGG67}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{WGS84} \\ Y_{WGS84} \\ Z_{WGS84} \end{bmatrix}$$

3. lépés: áttérés térbeli derékszögű koordinátákról ellipszoidi földrajzi rendszerbe (lásd 2. feladat)
4. lépés: ellipszoidi földrajzi koordinátákból EOVS vetületi síkkoordináták számítása (lásd 14. feladat)

Minta:

A pont ellipszoidi földrajzi koordinátái a WGS84 rendszerben: (BME permanens állomás):

$$\varphi_{WGS84} = 47^\circ 28' 51,39721''$$

$$\lambda_{WGS84} = 19^\circ 03' 23,50588''$$

$$h_{WGS84} = 180,924 \text{ m}$$

A háromparaméteres térbeli transzformáció paraméterei (Timár és társai, 2002a alapján):

$$dX = -61,26 \text{ m}$$

$$dY = +68,66 \text{ m}$$

$$dZ = +4,39 \text{ m}$$

A pont WGS84 rendszerbeli térbeli derékszögű koordinátái (lásd 1. feladat):

$$X_{WGS84} = 4081882,46 \text{ m}$$

$$Y_{WGS84} = 1410011,14 \text{ m}$$

$$Z_{WGS84} = 4678199,47 \text{ m}$$

A pont transzformált (IUGG67 ellipszoid rendszerében értelmezett) térbeli derékszögű koordinátái:

$$X_{IUGG67}' = 4081821,20 \text{ m}$$

$$Y_{IUGG67}' = 1410079,80 \text{ m}$$

$$Z_{IUGG67}' = 4678203,86 \text{ m}$$

A pont transzformált (IUGG67 ellipszoid rendszerében értelmezett) ellipszoidi földrajzi koordinátái:

$$\varphi'_{IUGG67} = 47^\circ 28' 52,366''$$

$$\lambda'_{IUGG67} = 19^\circ 03' 27,561''$$

$$h'_{IUGG67} = 137,61 \text{ m}$$

A pont transzformált EOVS síkkoordinátái és transzformált geoidmagassága:

$$Y' = 650684,64 \text{ m}$$

$$X' = 237444,28 \text{ m}$$

$$H' = 137,61 \text{ m}$$

A BME pontot transzformáljuk a FÖMI EHT transzformációs szoftverével is, az így kapott transzformált koordinátákat tekinthetjük a BME pont hibátlan koordinátáinak:

$$Y = 650684,46 \text{ m}$$

$$X = 237444,18 \text{ m}$$

$$H = 137,28 \text{ m}$$

Így a háromparaméteres transzformációval számított transzformált koordináták eltérése a hibátlanak tekintett koordinátáktól, azaz a transzformáció hibája a BME pontban:

$$\Delta Y = +0,18 \text{ m}$$

$$\Delta X = +0,10 \text{ m}$$

$$\Delta H = +0,33 \text{ m}$$

### 16. feladat

Adott egy pont ellipszoidi földrajzi koordinátaival a WGS84 ellipszoidon. Adottak egy a WGS84 és az IUGG67 ellipszoidok közötti hétparaméteres térbeli transzformáció paraméterei. Számítsuk ki a pont koordinátáit az EOVS vetületen!

A számítás lépései megegyeznek az előző feladat számításának lépéseivel, csak a 2. pont alatti eltolásos transzformáció kiegészül a három forgatással és méretarány-változással:

$$\begin{bmatrix} X'_{IUGG67} \\ Y'_{IUGG67} \\ Z'_{IUGG67} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} + k \mathbf{R}_x(eX) \mathbf{R}_y(eY) \mathbf{R}_z(eZ) \begin{bmatrix} X_{WGS84} \\ Y_{WGS84} \\ Z_{WGS84} \end{bmatrix}$$

ahol a forgatási mátrixok:

$$\mathbf{R}_x(eX) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(eX) & \sin(eX) \\ 0 & -\sin(eX) & \cos(eX) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(eY) = \begin{bmatrix} \cos(eY) & 0 & -\sin(eY) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(eY) & 0 & \cos(eY) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_Z(eZ) = \begin{bmatrix} \cos(eZ) & \sin(eZ) & 0 \\ -\sin(eZ) & \cos(eZ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Minta:

A pont ellipszoidi földrajzi koordinátái a WGS84 rendszerben: (BME permanens állomás):

$$\varphi_{WGS84} = 47^\circ 28' 51,39721''$$

$$\lambda_{WGS84} = 19^\circ 03' 23,50588''$$

$$h_{WGS84} = 180,924 \text{ m}$$

A hétparaméteres térbeli transzformáció paraméterei (*Timár és társai, 2002b* alapján, ezek a cikk szóhasználatával a szabványba javasolt paraméterek):

$$dX = -52,684 \text{ m}$$

$$dY = +71,194 \text{ m}$$

$$dZ = +13,975 \text{ m}$$

$$k = -1,0191 \text{ ppm}$$

$$eX = -0,3120''$$

$$eY = -0,1063''$$

$$eZ = -0,3729''$$

A pont WGS84 rendszerbeli térbeli derékszögű koordinátái (lásd 1. feladat):

$$X_{WGS84} = 4081882,46 \text{ m}$$

$$Y_{WGS84} = 1410011,14 \text{ m}$$

$$Z_{WGS84} = 4678199,47 \text{ m}$$

A pont transzformált (IUGG67 ellipszoid rendszerében értelmezett) térbeli derékszögű koordinátái:

$$X'_{IUGG67} = 4081825,48 \text{ m}$$

$$Y'_{IUGG67} = 1410081,20 \text{ m}$$

$$Z'_{IUGG67} = 4678208,71 \text{ m}$$

A pont transzformált EOVS síkkoordinátái és transzformált geoidmagassága:

$$Y' = 650684,56 \text{ m}$$

$$X' = 237444,23 \text{ m}$$

$$H' = 144,22 \text{ m}$$

A transzformált koordináták eltérése a hibátlannak tekintett koordinátáktól, azaz a transzformáció hibája a BME pontban:

$$\Delta Y = +0,10 \text{ m}$$

$$\Delta X = +0,05 \text{ m}$$

$$\Delta H = +6,94 \text{ m}$$

Vizsgáljuk meg, hogy a transzformáció hibái hogyan alakulnak az ország különböző területein!

A  $\Delta H$ -ra kapott kiugróan nagy érték magyarázatra szorul. A korábban hivatkozott cikkben javasolt paraméterkészlettel a WGS84 ellipszoid feletti magasságokból IUGG67 ellipszoid feletti magasságok számíthatók, ebből tengerszint feletti magasságok számításához geoidmodellre van szükség.

Véleményünk szerint a számítás geoidmodell alkalmazása nélkül is elvégezhető, ha a WGS84 ellipszoid feletti magasságokból közvetlenül tengerszint feletti magasságokat számítunk az alábbi paraméterkészlettel (meghatározta a szerző):

$$dX = -53,613m$$

$$dY = +64,632m$$

$$dZ = +16,691m$$

$$k = -2,0404ppm$$

$$eX = -0,1359''$$

$$eY = -0,1855''$$

$$eZ = -0,5024''$$

Ismételjük meg a számítást ezzel a paraméterkészlettel!

Így a transzformáció hibája a BME pontban:

$$\Delta Y = +0,10m$$

$$\Delta X = +0,05m$$

$$\Delta H = +0,40m$$

Vizsgáljuk meg most is, hogy a transzformáció hibái hogyan alakulnak az ország különböző területein!

Vizsgálataink egyértelműen bizonyították, hogy a két paraméterkészlettel végezhető transzformáció vízszintes értelemben teljesen azonos, csak magassági értelemben van, a fent említett geoidmodell alkalmazásából eredő eltérés.

### 17. feladat

Az 5 EUREF pont WGS84 rendszerben értelmezett térbeli derékszögű koordinátái, EOVS síkkoordinátái és geoidmagasságai ismeretében határozzuk meg a legkisebb négyzetek módszerével a két rendszer közötti transzformációs együtthatók legvalószínűbb értékeit! Ezekkel is számítsuk át a BME pontot!

A számítás lépései:

1. Azonos pontok térbeli derékszögű koordinátáinak kiszámítása mindkét rendszerben
2. Transzformációs paraméterek meghatározása a legkisebb négyzetek módszerével. A kiegyenlítő számítások formanyelvét felhasználva fel kell venni az ún. alakmárixot ( $\mathbf{A}$ ) és tisztatagvektort ( $\mathbf{I}$ ). Az i. pontra vonatkozóan az alakmárix és a tisztatagvektor a következőképpen alakul:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -X_{WGS} & 0 & -Z_{WGS} & Y_{WGS} \\ 0 & -1 & 0 & -Y_{WGS} & Z_{WGS} & 0 & -X_{WGS} \\ 0 & 0 & -1 & -Z_{WGS} & -Y_{WGS} & X_{WGS} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -X_{IUGG} \\ -Y_{IUGG} \\ -Z_{IUGG} \end{bmatrix}$$

A fentiek alapján az alakmátrixnak hét oszlopa és azonos pontonként 3 sora, azaz esetünkben 15 sora van. A tisztatag vektornak azonos pontonként 3 eleme, azaz esetünkben 15 eleme van.

Az alakmátrix és a tisztatagvektor ismeretében felírható a normál-egyenletrendszer, amelynek megoldását a következő összefüggés adja:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{I})$$

A fentiek alapján az  $\mathbf{x}$  vektornak 7 eleme lesz, amelyek a transzformáció paraméterei:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ k \\ eX \\ eY \\ eZ \end{bmatrix}$$

Az eltolás értékek méterben, a méretaránytényező dimenzió nélkül, az elforgatási szögek radiánban adódnak.

3. A kapott transzformációs paraméterekkel számítsuk át az azonos pontok WGS84 rendszerben ismert koordinátáit EOVS-be, az így kapott transzformált koordináták eltérését az ismert EOVS koordinátáktól nevezzük a transzformáció maradék ellentmondásainak. A maradék ellentmondásokkal jellemezzük a transzformáció pontosságát.
4. Végül a kapott transzformációs paraméterekkel is számítsuk át a BME pontot!

Minta:

Az 5 EUREF pont WGS84 ellipszoidi földrajzi és EOVS síkkoordinátái, valamint geoidmagasságai:

Pontszám	WGS84			EOVS		Geoidmagasság
	Földrajzi szélesség	Földrajzi hosszúság	Ellipszoid feletti magasság	Y	X	
Csanádalberti	46°19'10,4356"	20°40'14,7881"	142,509	775016,42	109637,02	99,91
Csarnóta	45°53'01,0160"	18°13'01,8015"	314,432	585536,60	60221,29	269,70
Penc	47°47'22,5605"	19°16'53,4868"	291,792	667539,25	271786,72	248,21
Sopron	47°38'44,1689"	16°36'14,9436"	320,550	466457,99	258621,35	275,07
Tarpa	48°07'46,3792"	22°32'56,9367"	193,622	910597,72	315396,39	154,73

Az 5 EUREF pont WGS84 és IUGG67 ellipszoidi térbeli derékszögű koordinátái:

pontszám	WGS84			IUGG67		
	X	Y	Z	X	Y	Z
Csanádalberti	4128720,729	1557707,336	4589954,261	4128658,989	1557775,649	4589958,729
Csarnóta	4224902,836	1390480,228	4556477,629	4224841,460	1390549,061	4556482,455
Penc	4052449,856	1417680,892	4701406,931	4052388,386	1417749,120	4701410,814
Sopron	4125619,105	1230225,938	4690656,162	4125558,508	1230295,278	4690660,069
Tarpa	3939065,908	1635574,656	4726647,124	3939004,925	1635642,975	4726652,176

A meghatározott transzformációs paraméterek:

$$dX = -55,41m$$

$$dY = +72,35m$$

$$dZ = +15,58m$$

$$k = -2,0044 ppm$$

$$eX = -0,2891''$$

$$eY = -0,1943''$$

$$eZ = -0,2859''$$

Maradék ellentmondások:

pontszám	$v_y$	$v_x$	$v_z$
Csanádalberti	+0,11	-0,06	+0,35
Csarnóta	+0,23	-0,24	-0,33
Penc	+0,15	-0,06	+0,71
Sopron	-0,18	+0,40	-0,18
Tarpa	-0,32	-0,05	-0,46

A BME pont transzformált koordinátái:

$$Y' = 650684,56m$$

$$X' = 237444,16m$$

$$H' = 137,65m$$

A transzformáció hibája:

$$\Delta Y = +0,10m$$

$$\Delta X = -0,02m$$

$$\Delta H = +0,38m$$

### **18. feladat**

Határozzuk meg Budapest területére érvényes lokális transzformáció paraméterkészletét! Számoljuk át vele a BME pont koordinátáit! Nézzük meg, hogy ezen lokális transzformáció használata mekkora ellentmondásokkal járna az ország különböző területein!

Azonos pontok koordinátái legyenek a következők:

pontszám	WGS84			EOV		geoidmagasság
	X	Y	Z	Y	X	
65-40112	4081734,28	1409117,21	4678720,76	649887,92	238114,71	229,63
65-3200	4086075,99	1405819,38	4675800,23	645354,03	233909,66	125,84
65-40651	4079435,61	1416071,44	4678513,31	657211,04	237903,15	146,36
65-4015	4088294,78	1411654,84	4672104,14	650145,46	228462,64	110,00
65-1058	4077786,58	1403949,54	4684040,11	646292,09	245702,15	494,80
65-3056	4087678,38	1400230,60	4676112,47	639548,72	234348,58	153,49
65-2421	4073471,34	1419357,09	4682709,82	662262,87	244103,67	165,15
65-2187	4071493,68	1411768,47	4686622,46	655735,78	249951,00	111,27

Azonos pontok térbeli derékszögű koordinátái az IUGG67 ellipszoid rendszerében:

pontszám	IUGG67		
	X	Y	Z
65-40112	4081672,90	1409185,67	4678724,82
65-3200	4086014,61	1405887,86	4675804,27
65-40651	4079374,29	1416139,94	4678517,49
65-4015	4088233,46	1411723,35	4672108,34
65-1058	4077725,10	1404017,98	4684044,06
65-3056	4087617,03	1400299,02	4676116,44
65-2421	4073410,05	1419425,47	4682713,96
65-2187	4071432,33	1411836,82	4686626,51

A meghatározott transzformációs paraméterek:

$$dX = -27,796m$$

$$dY = +173,261m$$

$$dZ = -40,689m$$

$$k = -1,8569 ppm$$

$$eX = -3,3765''$$

$$eY = +1,5353''$$

$$eZ = +1,2940''$$

Maradék ellentmondások:

pontszám	$v_y$	$v_x$	$v_z$
65-40112	-0,02	-0,01	+0,01
65-3200	-0,01	0,00	+0,02
65-40651	-0,05	0,00	-0,01
65-4015	-0,01	-0,03	-0,01
65-1058	-0,06	-0,03	+0,02
65-3056	+0,06	+0,04	-0,02
65-2421	+0,04	+0,03	+0,01
65-2187	+0,03	0,00	-0,04

A BME pont transzformált koordinátái:

$$Y' = 650684,47m$$

$$X' = 237444,18m$$

$$H' = 137,28m$$

A transzformáció hibája:

$$\Delta Y = +0,01m$$

$$\Delta X = 0,00m$$

$$\Delta H = 0,00m$$

## 7 UTM koordináták számítása

### 19. feladat

Adott egy pont ellipszoidi földrajzi koordinátaival a WGS84 ellipszoidon. Számítsuk ki a pont koordinátáit UTM vetületi rendszerben!

Első lépésben a kettős vetítés összefüggéseivel az ellipszoidi koordinátákból gömbi koordinátákat számolunk (lásd 13. példa) úgy, hogy  $k = n = 1$ . A  $\Lambda_0$  helyébe a sáv középmeridiánjának földrajzi hosszúságát helyettesítjük (pl. 34-es sáv esetében  $21^\circ$ -ot). Ezután a következő segédmenyiségre lesz szükségünk:

$$\xi = \arctan\left(\frac{\tan \varphi}{\cos \lambda}\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \cos \varphi \sin \lambda}$$

$$m = \frac{a - b}{a + b}$$

$$R = \frac{a}{1 + m} \left(1 + \frac{m^2}{4} + \frac{m^4}{64} + \frac{m^6}{256} + \dots\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} m - \frac{2}{3} m^2 + \frac{5}{16} m^3 + \frac{41}{180} m^4 + \dots$$

$$\alpha_4 = \frac{13}{48} m^2 - \frac{3}{5} m^3 + \frac{557}{1440} m^4 + \dots$$

$$\alpha_6 = \frac{61}{240} m^3 - \frac{103}{140} m^4 + \dots$$

$$\alpha_8 = \frac{49561}{161280} m^4 + \dots$$

Ezután:

$$x = Rm_0 (\xi + \alpha_2 \sin 2\xi \cosh 2\eta + \alpha_4 \sin 4\xi \cosh 4\eta + \alpha_6 \sin 6\xi \cosh 6\eta + \alpha_8 \sin 8\xi \cosh 8\eta + \dots)$$

$$y = Rm_0 (\eta + \alpha_2 \cos 2\xi \sinh 2\eta + \alpha_4 \cos 4\xi \sinh 4\eta + \alpha_6 \cos 6\xi \sinh 6\eta + \alpha_8 \cos 8\xi \sinh 8\eta + \dots)$$

ahol UTM esetén  $m_0 = 0,9996$ .

A vetületi koordináták:

$$X = x$$

$$Y = y + 500000m$$

Minta:

A pont ellipszoidi földrajzi koordinátái a WGS84 rendszerben: (BME permanens állomás):

$$\varphi_{WGS84} = 47^\circ 28' 51,39721''$$

$$\lambda_{WGS84} = 19^\circ 03' 23,50588''$$

A földrajzi hosszúság értékéből látszik, hogy a pont a 34. sávba esik.

$$\varphi = 47^{\circ}17'21,48744''$$

$$\lambda = -2^{\circ}03'23,50588''$$

$$\xi = 0,825640793445$$

$$\eta = -0,023007450418$$

$$m = 0,00167922$$

$$R = 6367449,146$$

$$\alpha_2 = 0,000837731830$$

$$\alpha_4 = 0,000000760853$$

$$\alpha_6 = 0,000000001198$$

$$\alpha_8 = 0,000000000002$$

A pont UTM vetületi koordinátái:

$$Y = 353580,002\text{m}$$

$$X = 5260442,536\text{m}$$

### 20. feladat

A számítást végezzük el az ellentétes irányba is! Adott egy pont UTM vetületi koordinátaival, számítsuk ki ellipszoidi földrajzi koordinátáit a WGS84 ellipszoidon!

A következő összefüggésekre, illetve segédmenyiségre van szükség:

$$x = X$$

$$y = Y - 500000\text{m}$$

$$u = \frac{x}{Rm_0}$$

$$v = \frac{y}{Rm_0}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}m - \frac{2}{3}m^2 + \frac{37}{96}m^3 - \frac{1}{360}m^4 + \dots$$

$$\beta_4 = \frac{1}{48}m^2 + \frac{1}{15}m^3 - \frac{437}{1440}m^4 + \dots$$

$$\beta_6 = \frac{17}{480}m^3 - \frac{37}{840}m^4 + \dots$$

$$\beta_8 = \frac{4397}{161280}m^4 + \dots$$

$$\xi = u - \beta_2 \sin 2u \cosh 2v - \beta_4 \sin 4u \cosh 4v - \beta_6 \sin 6u \cosh 6v - \beta_8 \sin 8u \cosh 8v + \dots$$

$$\eta = \eta - \beta_2 \cos 2u \sinh 2v - \beta_4 \cos 4u \sinh 4v - \beta_6 \cos 6u \sinh 6v - \beta_8 \cos 8u \sinh 8v + \dots$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\sin \xi}{\cosh \eta}$$

$$\lambda = \arctan \frac{\sinh \eta}{\cos \xi}$$

Az így kapott gömbi koordinátákból a kettős vetítés összefüggései alapján kapjuk az ellipszoidi koordinátákat úgy, hogy  $k = n = 1$ . A  $\Lambda_0$  helyébe a sáv középmeridiánjának földrajzi hosszúságát helyettesítjük (pl. 34-es sáv esetében  $21^\circ$ -ot).

Minta:

$$Y = 353580,002\text{m}$$

$$X = 5260442,536\text{m}$$

$$u = 0,826476573919$$

$$v = -0,023004280942$$

$$\beta_2 = 0,000837732174$$

$$\beta_4 = 0,000000059059$$

$$\beta_6 = 0,000000000167$$

$$\beta_8 = 0,000000000000$$

## 8 Hivatkozások

Timár G., Molnár G., Pásztor Sz. (2002a): A WGS84 és HD72 alapfelületek közötti transzformáció Molodensky-Badekas-féle (3-paraméteres) meghatározása a gyakorlat számára, Geodézia és Kartográfia, 54/01:11-16

Timár G., Molnár G. (2002b): A HD72→ETRS89 transzformáció szabványosítási problémái, Geodézia és Kartográfia, 54/12:28-30

Varga J.: A vetületnélküli rendszerektől az UTM-ig<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> [http://www.geod.bme.hu/staff\\_h/varga/Osszes/Dok3uj.htm](http://www.geod.bme.hu/staff_h/varga/Osszes/Dok3uj.htm)