

Hálózat kiegyenlítés

dr. Siki Zoltán
siki.zoltan@epito.bme.hu



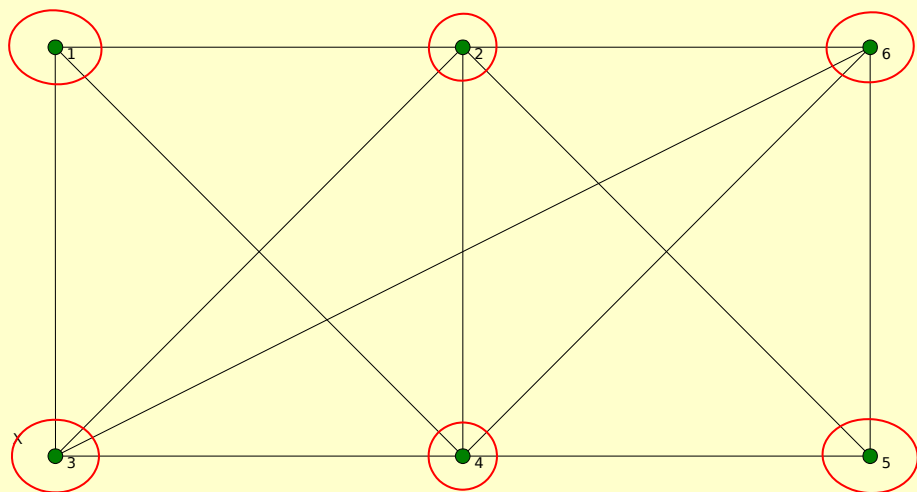
Legkisebb négyzetek módszere

- Közvetítő egyenletek, kapcsolat az ismeretlenek és a mérési eredmények között pl.

$$t = \sqrt{(y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2}; l = \arctan \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \right) - Z_a$$

- Linearizálás, előzetes koordináták
- Fölösmérések $f = m - n + d$

Beillesztett Szabad
1,3 rögzített



Ismeretlenek n:

Mérések m:

Defektus d:

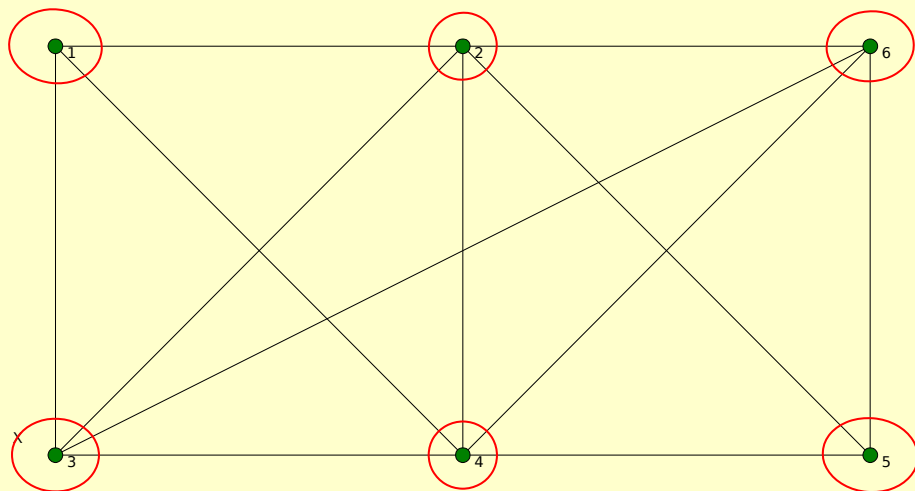
Fölösmérés f:

Legkisebb négyzetek módszere

- Közvetítő egyenletek, kapcsolat az ismeretlenek és a mérési eredmények között pl.

$$t = \sqrt{(y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2}; l = \arctan \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \right) - Z_a$$

- Linearizálás, előzetes koordináták
- Fölösmérések $f = m - n + d$



Beillesztett Szabad
1,3 rögzített

Ismeretlenek n:	14	18
Mérések m:	48	48
Defektus d:	0	3
Fölösmérés f:	34	33

Matematikai és sztochasztikus modell

Matematikai modell

Túlhatározott lineáris egyenletrendszer megoldása a javításokra vonatkozó minimumfeltétellel

Koordináta változások és javítások

$$v = A x - l \quad v^t P v = \min! \quad x = (A^t P A)^{-1} l$$

Sztochasztikus modell (hibaterjedés)

Koordináta középhibák és mérési középhibák levezetése a kiegyenlítésből

$$m_0^2 = v^t P v / f \quad Q_{xx} = (A^t P A)^{-1} \quad Q_{LL} = A^t (A^t P A)^{-1} A$$

Előfeltételek

Csak véletlen hibák (nincs durva vagy szabályos hiba)

Független mérések (súly mátrix diagonális)

Előzetes koordináták

Fölösmérések

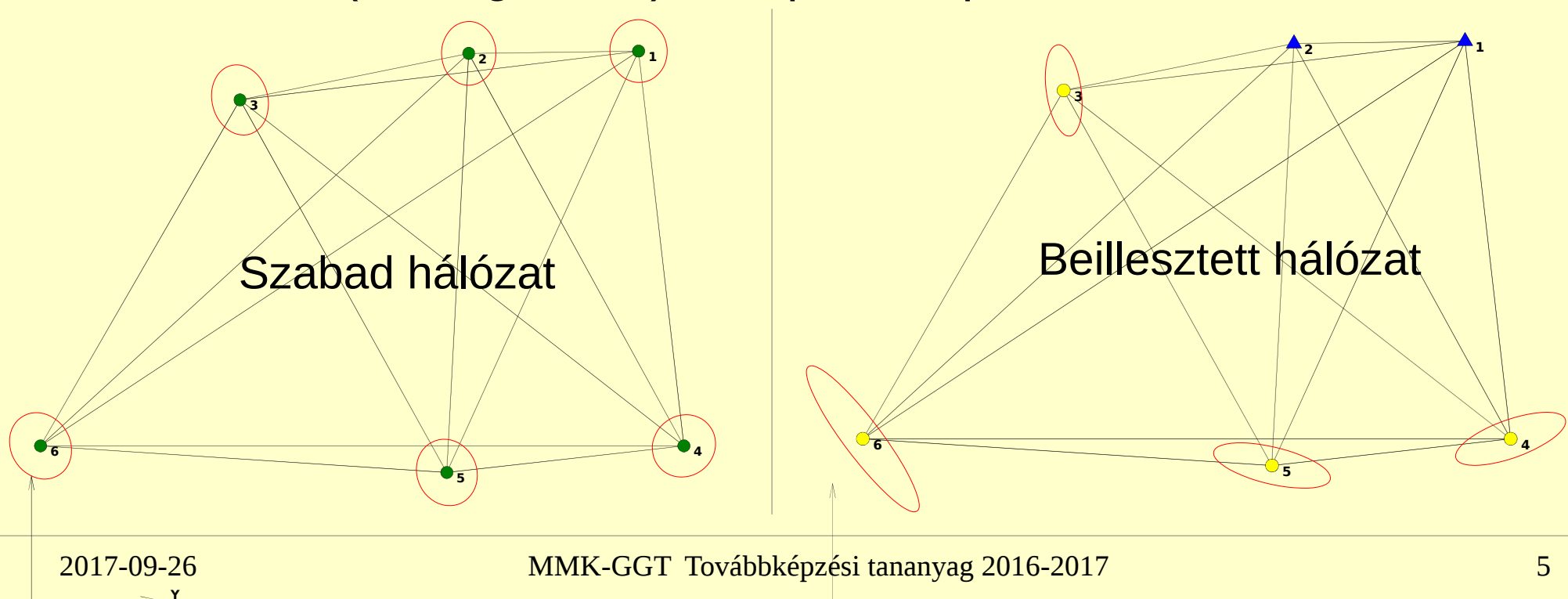
A priori középhibák (súlyozás/súlyarányok)

Megfelelő geometria (jól kondicionált egyenletrendszer)

Vízszintes mérnökgéodéziai hálózatok

nagy relatív pontosságú hálózatok (1/100 000, 1/1000000),
pontok távolsága néhány tíz, száz méter,
a magas fölösmérés szám könnyen biztosítható,
mm-es vagy kisebb elvárt középhibák
vetület nélküli rendszer

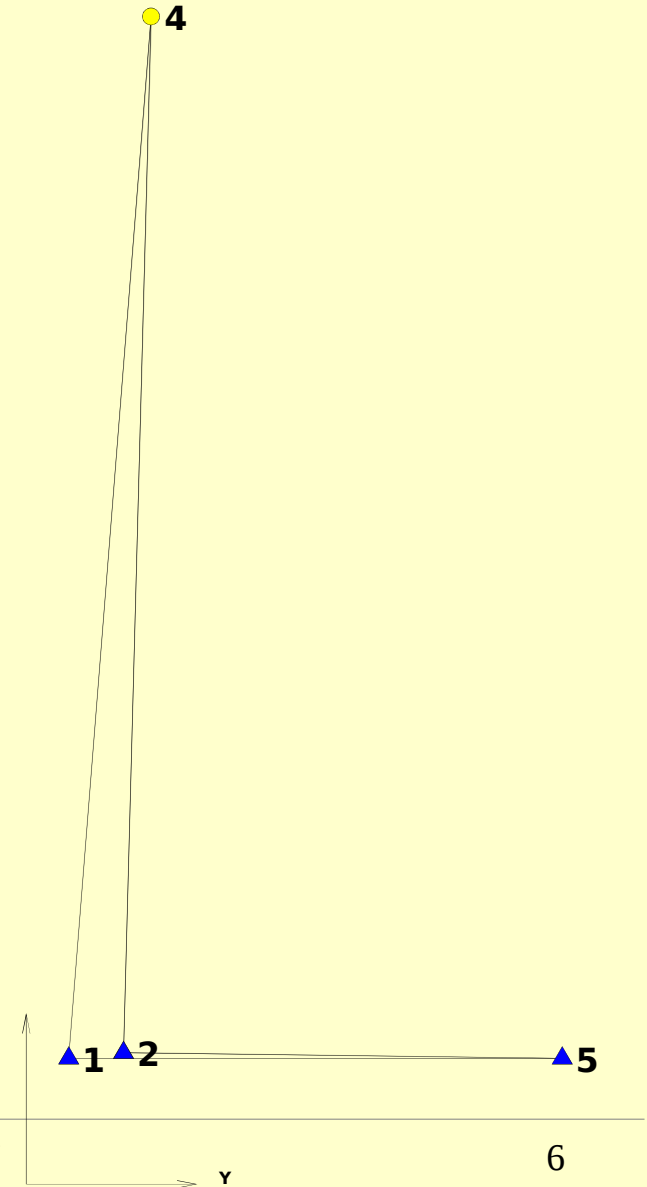
Pontosság fokozására hálózat kiegyenlítés, durvahiba szűrés,
kedvezőbb (homogénebb) középhibakép érdekében szabad hálózat



Egyszerű példa

Előmetszés (beillesztett hálózat)

1. variáció Fölösmérések száma?
Használható ilyenkor a kiegyenlítés?



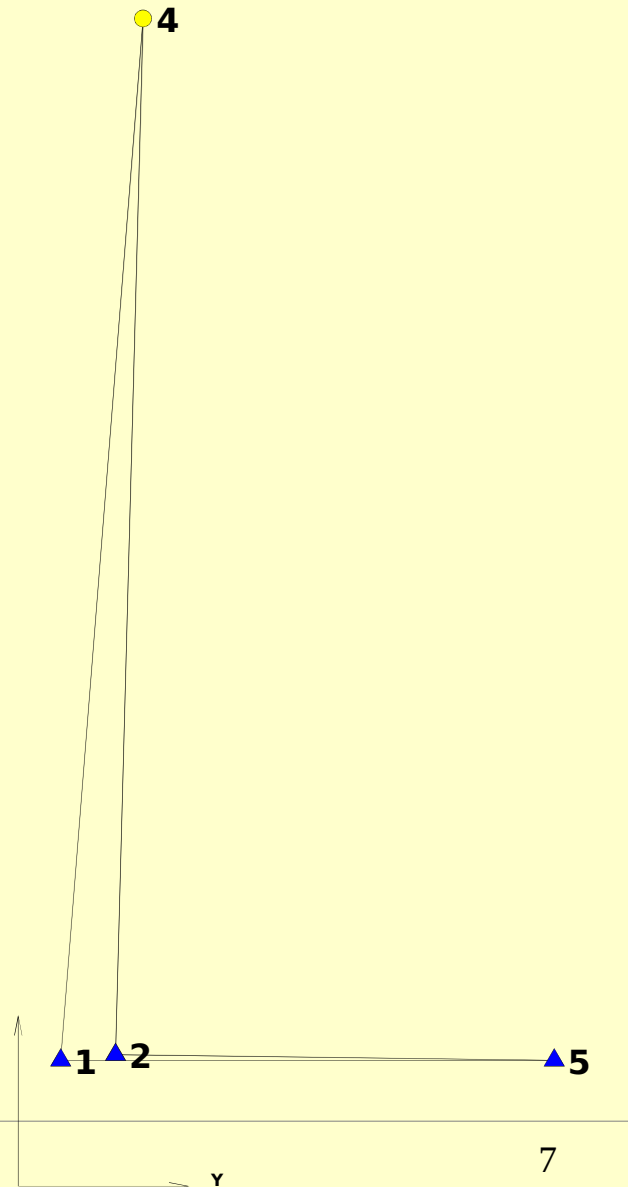
Egyszerű példa

Előmetszés (beillesztett hálózat)

1. variáció, Fölösmérések száma?
Használható ilyenkor a kiegyenlítés?

A matematikai modell használható,
minden javítás 0 lesz.
Az előmetszés számítással azonos eredményt ad.

A sztochasztikus modell nem ad eredményt $f=0!$
 $m_0 = 0 / 0!$



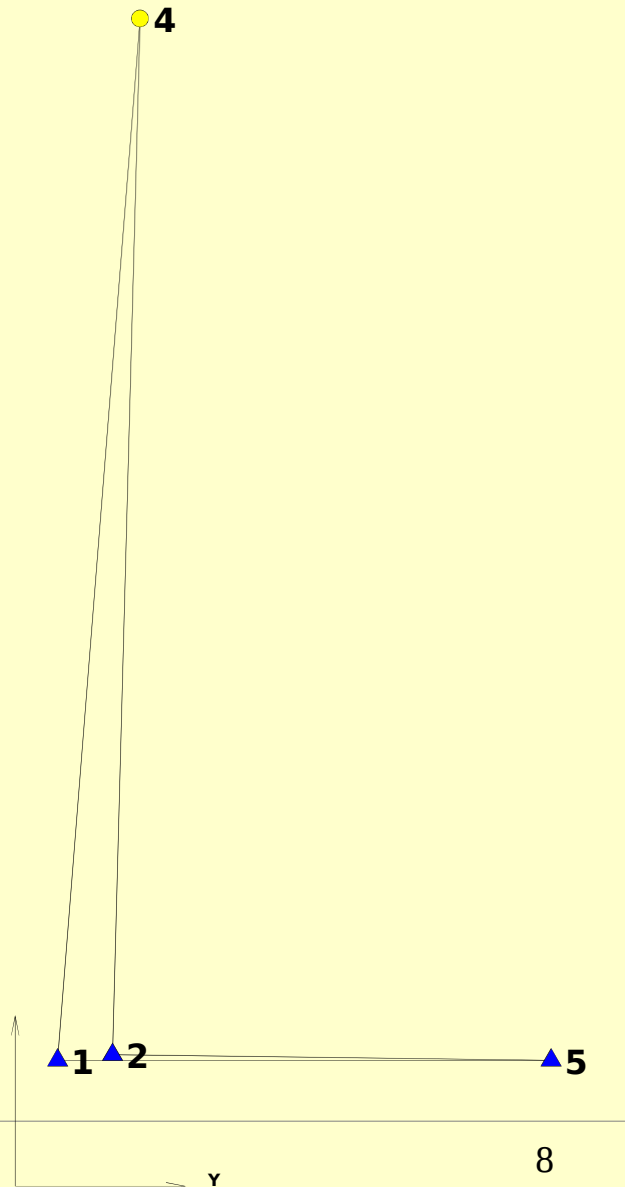
Egyszerű példa

Előmetszés (beillesztett hálózat)

1. variáció, Fölösmérések száma?
Használható ilyenkor a kiegyenlítés?

A matematikai modell használható,
minden javítás 0 lesz.
Az előmetszés számítással azonos eredményt ad.

A sztochasztikus modell nem ad eredményt $f=0$!
 $m_0 = 0 / 0$!
Mi lenne, ha több tájékozó irányt használnánk az
álláspontokon?

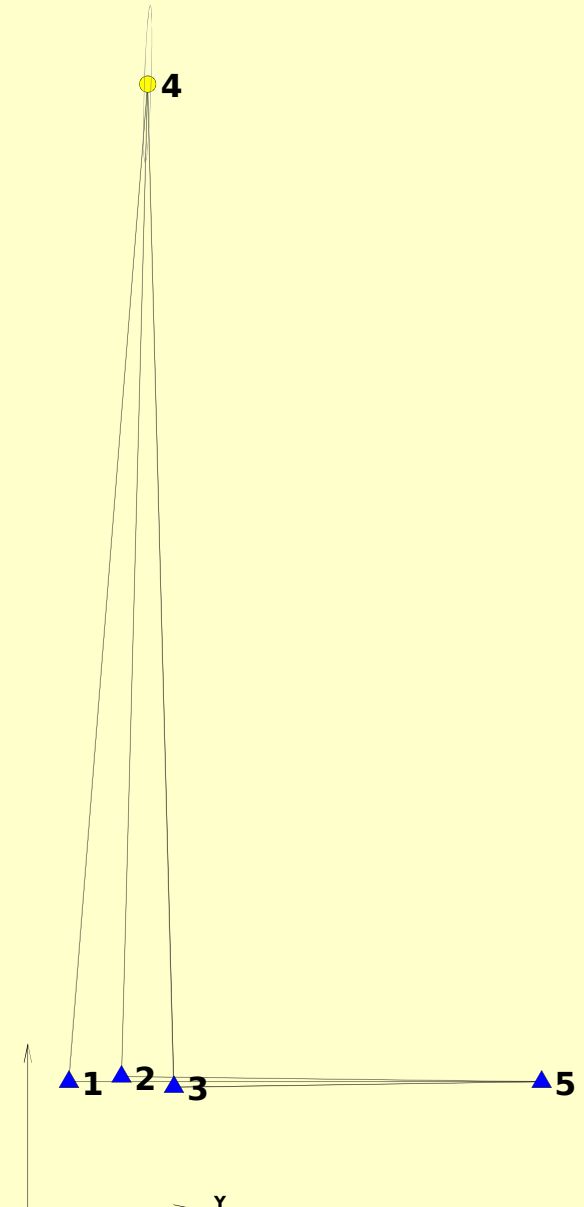


Egyszerű példa

Előmetszés (beillesztett hálózat)

2. variáció, fölösméréssel

Milyen koordináta középhibák várhatók?



Egyszerű példa

Előmetszés (beillesztett hálózat)

2. variáció, fölösméréssel

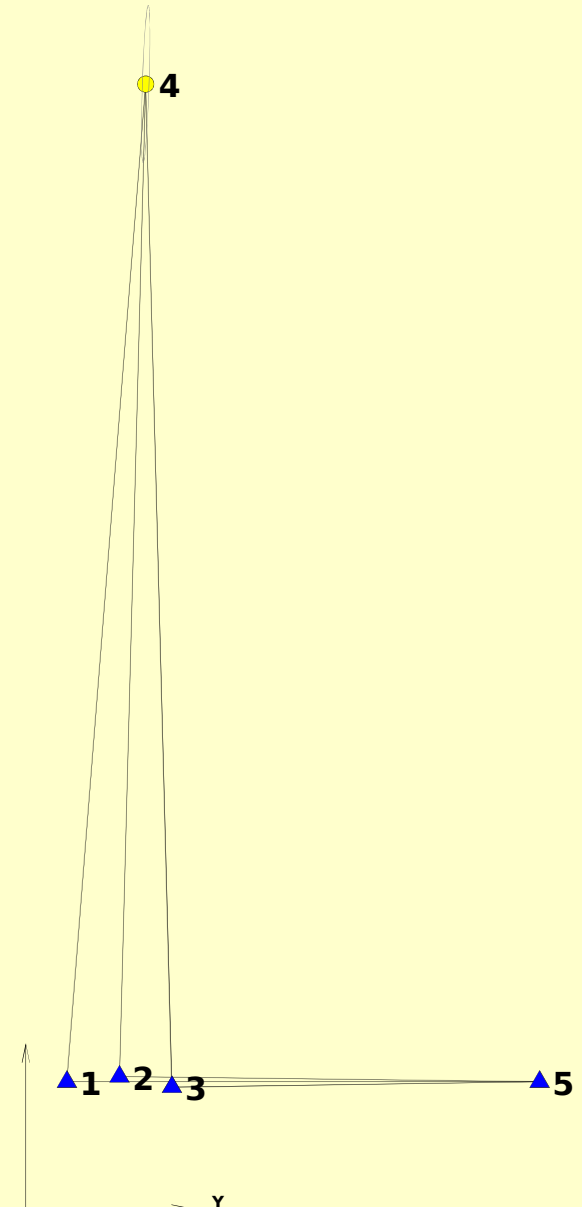
Milyen koordináta középhibák várhatók?

apriori iránymérési középhiba 3"

apriori $m_0 = 1$

apozteriori $m_0 = 0.04$

Koordináta középhibák: 0.2 illetve 3.8 mm



Egyszerű példa

Előmetszés (beillesztett hálózat)

2. variáció, fölösméréssel

Milyen koordináta középhibák várhatók?

A priori iránymérési középhiba 3"

A priori $m_0 = 1$

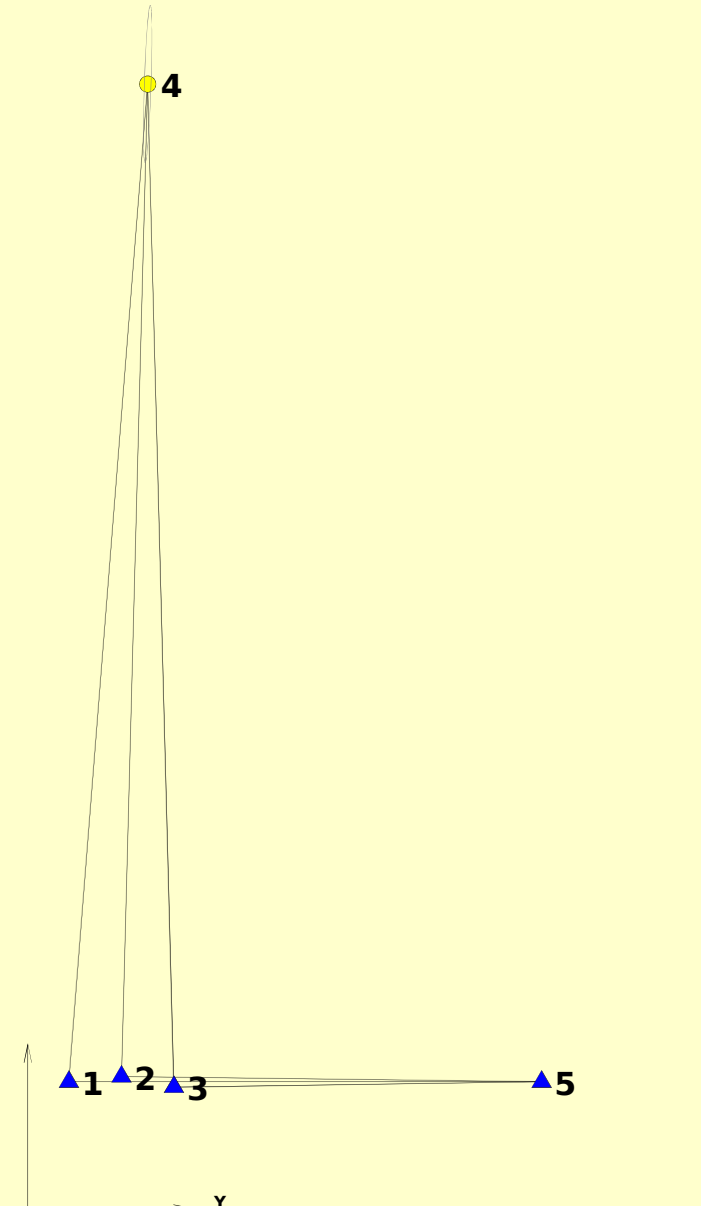
A poszteriori $m_0 = 0.04$

Koordináta középhibák: 0.2 illetve 3.8 mm

Változtassuk meg az egyik előmetsző irány irányértékét 10 másodperccel.

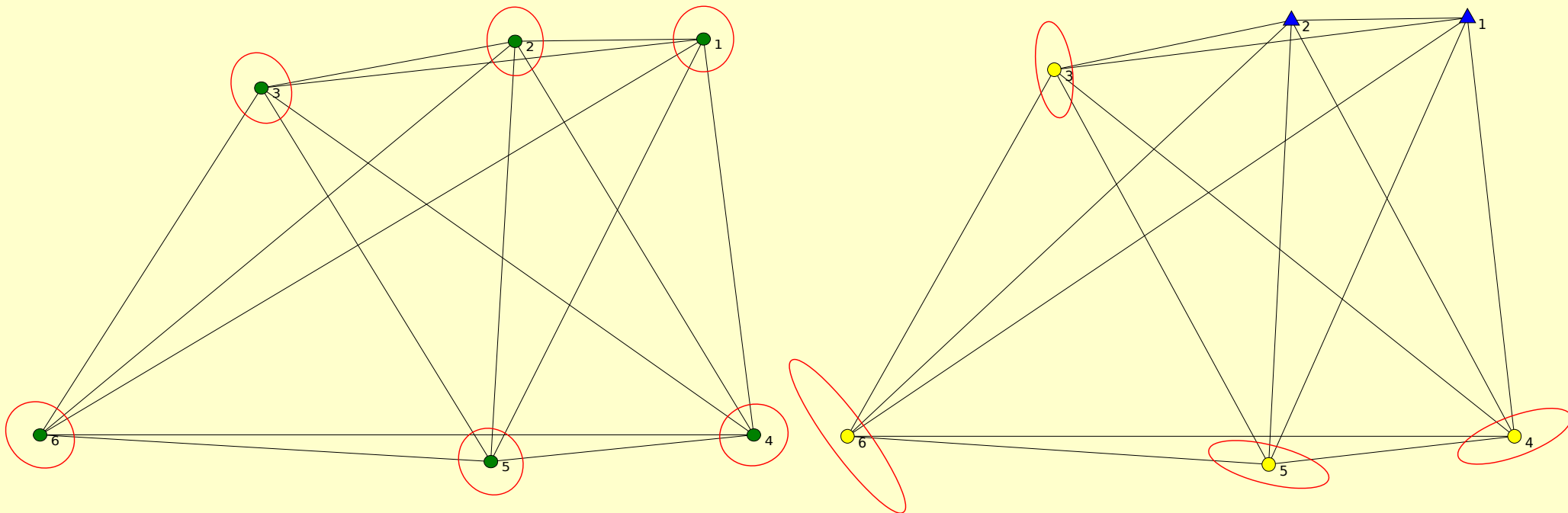
Hogyan jelentkezik ennek hatása?

Mennyit javítana, ha 5 további tájékozó iránnyal növelnénk a fölösmérések számát?



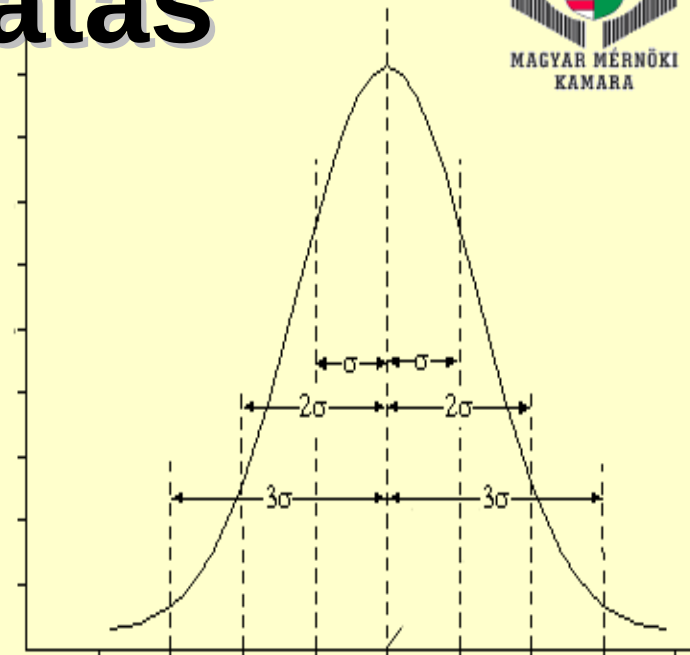
Szabad hálózat kiegyenlítés

- Előny – nincsenek kényszerek, jobb középhiba kép
- Hátrány – a normál egyenletrendszer együttható mátrix determinánsa nulla, nem létezik reguláris inverz.
A mai informatikai eszközökkel nem okoz gondot a szinguláris egyenletrendszer megoldása.



Durvahiba kimutatás

- Hiba típusok (véletlen, szabályos, durva)
- Véletlen hibák → Normális eloszlás
- 1/2/3 σ (szigma) szabály (68%/95%/99.7%)
- II. kiegyenlítési csoport (közvetett mérések)
 - Csak véletlen hibák esetén alkalmazható
 - Egy durva hiba valamennyi eredményt torzítja
 - A különböző súlyok miatt a javítások közvetlenül nem hasonlíthatók össze
- Robusztus becslések, kiugróértékekre nem érzékeny, pl. medián **mérések**



126.227

126.230

126.231

átlag: 126.238

medián: 126.231

126.231

szórás: 0.018

szórás: ?

126.270

Statisztikai módszerek

- a priori és a posteriori súlyegység középhibák (μ_0, m_0) vizsgálata

$\chi^2_{f, \alpha/2}$ próba, globális vizsgálat

$$\chi^2 = \frac{\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v}}{\mu_0^2}$$

$$\chi^2 > \chi^2_{f, \alpha/2}$$

$$\chi^2 < \chi^2_{f, 1-\alpha/2}$$

- Mérések egyenkénti vizsgálata, standardizált javítások alapján

$|w_i| < t_{p,f}$ Student -féle t eloszlás

(Baarda-féle data snooping)

- Kolgomorov-Szmirnov próba

normalitás vizsgálat, az elméleti és tapasztalati eloszlás függvény maximális eltérése alapján

$$Q_{XX} = N^{-1} N = A^t P A$$

$$Q_{UU} = A Q_{XX} A^t$$

$$Q_{VV} = P^{-1} - Q_{UU}$$

$$w_i = \frac{v_i}{m_{vi}}$$

Durva hiba szűrés végrehajtása



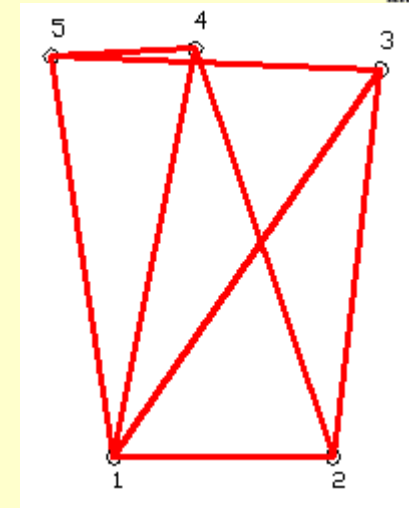
- Súlyegység középhibára vonatkozó statisztikai próba
- Iterációs megoldás (Baarda-féle data snooping)
 1. Kiegyenlítés II. kiegyenlítési csoporttal (közvetett mérések)
 2. Statisztikák számítása (standardizált javítások)
 3. Legnagyobb statisztikával bíró mérés kihagyása, mely az adott szignifikancia szinten nem elfogadható
 4. Ismétlés az 1. ponttól amíg van kihagyandó mérés

Durva hiba szűrés eredménye

Két mérés kiszűrése után a koordináta középhibák a felére csökkentek! $36 - 2 = 34$

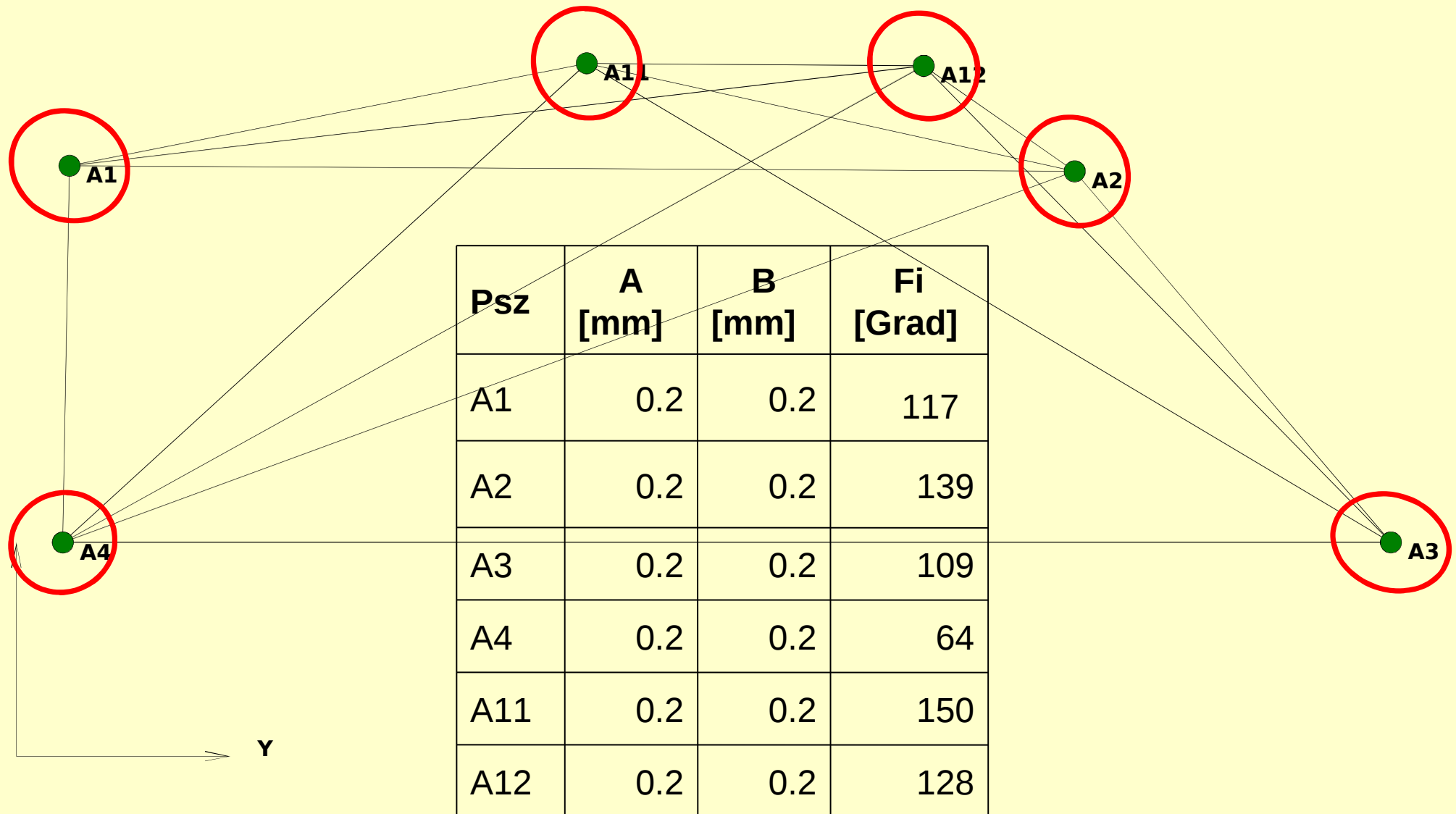
m_0 a posteriori 1.58 max. statisztika $3.07 > 1.94$

m_0 a posteriori 1.05 max. statisztika $1.93 < 1.94$



Pont	Y [m]	X [m]	mY [mm]	mX [mm]	Y	X	mY [mm]	mX [mm]
1	-0.0104	0.0001	0.6	0.5	-0.0111	0.0003	0.3	0.2
2	-0.0089	211.7022	0.6	0.5	-0.0081	211.7017	0.3	0.3
3	375.6426	257.9512	0.6	0.7	375.6432	257.9505	0.3	0.4
4	395.4922	78.1333	0.5	0.7	395.4919	78.1325	0.3	0.4
5	387.9833	-60.3665	0.5	0.6	387.9841	-60.3670	0.3	0.3

Mozgásvizsgálati hálózat



Kérdések, problémák

- Fölösmérés nélküli pontok bevonása a kiegyenlítésbe
- Több forduló vagy oda-vissza szintezés külön-külön bevonása a kiegyenlítésbe
- Hibátlan műszermagasság és jelmagasság feltételezése
- 2D + 1D vagy 3D kiegyenlítés?
- Pontatlan előzetes koordináták, túl nagy tisztatagok
- Kvázi EOVS koordináták, kvázi balti magasságok

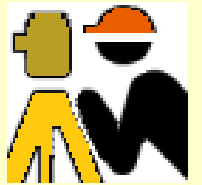
Nyílt forráskódú programok



GNU GaMa – GaMa Local <http://www.gnu.org/software/gama/>
1D, 2D, 3D geodéziai hálózatok kiegyenlítése
Statisztikai próbák alkalmazása



Surveying Calculation , QGIS modul (GNU GaMa)
<http://digikom.hu/SurveyingCalculation>



Octave, QtOctave <http://www.gnu.org/software/octave/>
Általános célú matematikai programcsomag
Mátrix műveletek, eloszlás függvények



Euler <http://www.euler-math-toolbox.de/>
Általános célú matematikai programcsomag
Mátrix műveletek



R <http://www.r-project.org/>
Matematikai statisztikai programcsomag



Kereskedelmi szoftverek

Magyar fejlesztések

GeoCalc

GeoEasy (GNU GaMa)

GeoZseni (GNU GaMa)

AutoGeo

Külföldi fejlesztések

Carlson SurvCE

Columbus

MicroSurvey starnet

...

GNU GaMa input

XML input

Parancssori használat

Nincs grafikus felhasználói felület

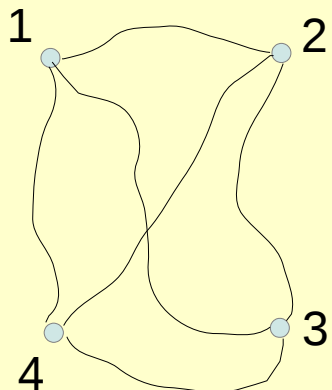
```
<?xml version="1.0" ?>
<!DOCTYPE gama-xml SYSTEM "gama-xml.dtd">
<gama-local version="2.0">
<network axes-xy="ne" angles="right-handed">
<description>
2D network
</description>
<parameters sigma-apr = "1" conf-pr = "0.95" tol-abs = "1000" sigma-act = "aposteriori" update-
constrained-coordinates="yes" />
<points-observations distance-stdev="1.0 1.5" direction-stdev="3" angle-stdev="4">
<point id="5" y="-60.365" x="387.976" adj="XY" />
...
<point id="1" y="0.000" x="0.000" adj="XY" />
<obs from="5">
<distance to="4" val="138.703" stdev="1.208" />
<direction to="4" val="0.0000" stdev="19" />
...
```



xy - ismeretlen pont
XY- ismeretlen + minimum felt.
FIX - rögzített pont

Példamegoldás - szintezés

- Hálózati defektus szabad hálózatban 1
- Középhibák a szintezés km-es középhibájából rövid távolságokra nem lineáris!
- Octave programmal
https://github.com/OSGeoLabBp/tutorials/blob/master/english/data_processing/level_net.rst



Szabad

$n =$

$m =$

$d =$

$f =$

Beillesztett

$n =$

$m =$

$d =$

$f =$

Közvetítő egyenlet

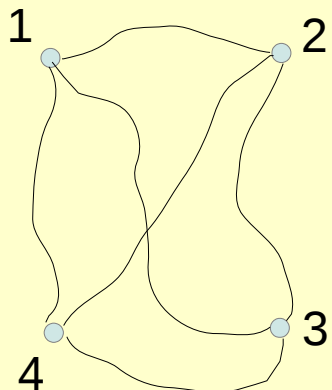
$$\Delta m_{AB} = M_B - M_A$$

Javítási egyenlet

$$v_{AB} = M_B - M_A - \Delta m_{AB}$$

Példamegoldás - szintezés

- Hálózati defektus szabad hálózatban 1
- Középhibák a szintezés km-es középhibájából rövid távolságokra nem lineáris!
- Octave programmal
https://github.com/OSGeoLabBp/tutorials/blob/master/english/data_processing/level_net.rst



Szabad
 $n = 4$
 $m = 6$
 $d = 1$
 $f = 3$

Beillesztett
 $n = 3$
 $m = 6$
 $d = 0$
 $f = 3$

Közvetítő egyenlet

$$\Delta m_{AB} = M_B - M_A$$

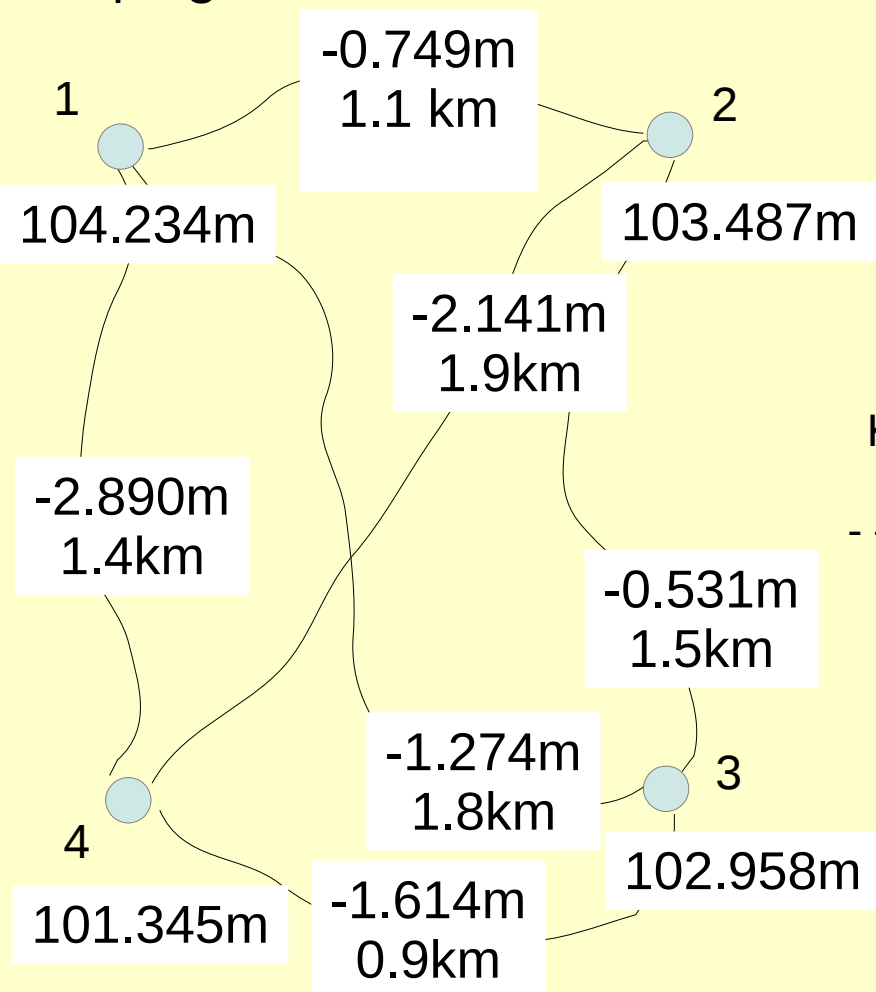
Javítási egyenlet

$$v_{AB} = M_B - M_A - \Delta m_{AB}$$

Megoldás Octave programmal

$$m_{km} = 0.7 \text{ mm/km}$$

$$f = 3$$



Pont	Előzetes magasság [m]	Magasság változás [mm]	Kiegy. magasság [m]	Középh. [mm]
1	104.2340	0.5907	104.2346	0.69
2	103.4870	-0.5982	103.4864	0.72
3	102.9580	0.4137	102.9584	0.66
4	101.3450	-0.4062	101.3446	0.65

Kp	Vp	Mérés [m]	Jav. [mm]	Kiegy. [m]	Középh. [mm]	Stat. t	Stat. U	r
1	2	-0.7490	0.81	-0.7482	1.06	1.1	1.9	0.3
1	3	-1.2740	-2.18	-1.2762	1.17	1.3	2.1	0.7
1	4	-2.8900	0.00	-2.8900	1.13	0.0	0.0	0.5
2	3	-0.5300	2.01	-0.5280	1.17	1.6	2.6	0.5
2	4	-2.1410	-0.81	-2.1418	1.19	0.4	0.7	0.7
3	4	-1.6140	0.18	-1.6138	0.91	0.4	0.6	0.2

$$m_0 = 1.65$$

$$\text{Check: } 8.217 = 8.217$$

Példamegoldás – vízszintes hálózat

Íránymérés 3"
Táv mérés 3 mm + 3 mm/km

Szabad hálózat

Ismeretlenek n: 18
Mérések m: 44
Defektus d: 3
Fölösmérés f: 29

$p = 95\%$

$m_0 = 1.4$ (0.8, 1.2)

Statisztika

3-6 irány **4.4** > 1.9

3-2 irány **3.8** > 1.9

Átl. koord. hiba 2.1mm

$m_0 = 0.9$ (0.7, 1.3)

Statisztika

3-4 irány **2.6** > 1.9

3-2 irány **2.4** > 1.9

Átl. koord. hiba 1.4mm

$m_0 = 0.8$ (0.7, 1.3)

Statisztika

2-1 táv **2.0** > 1.9

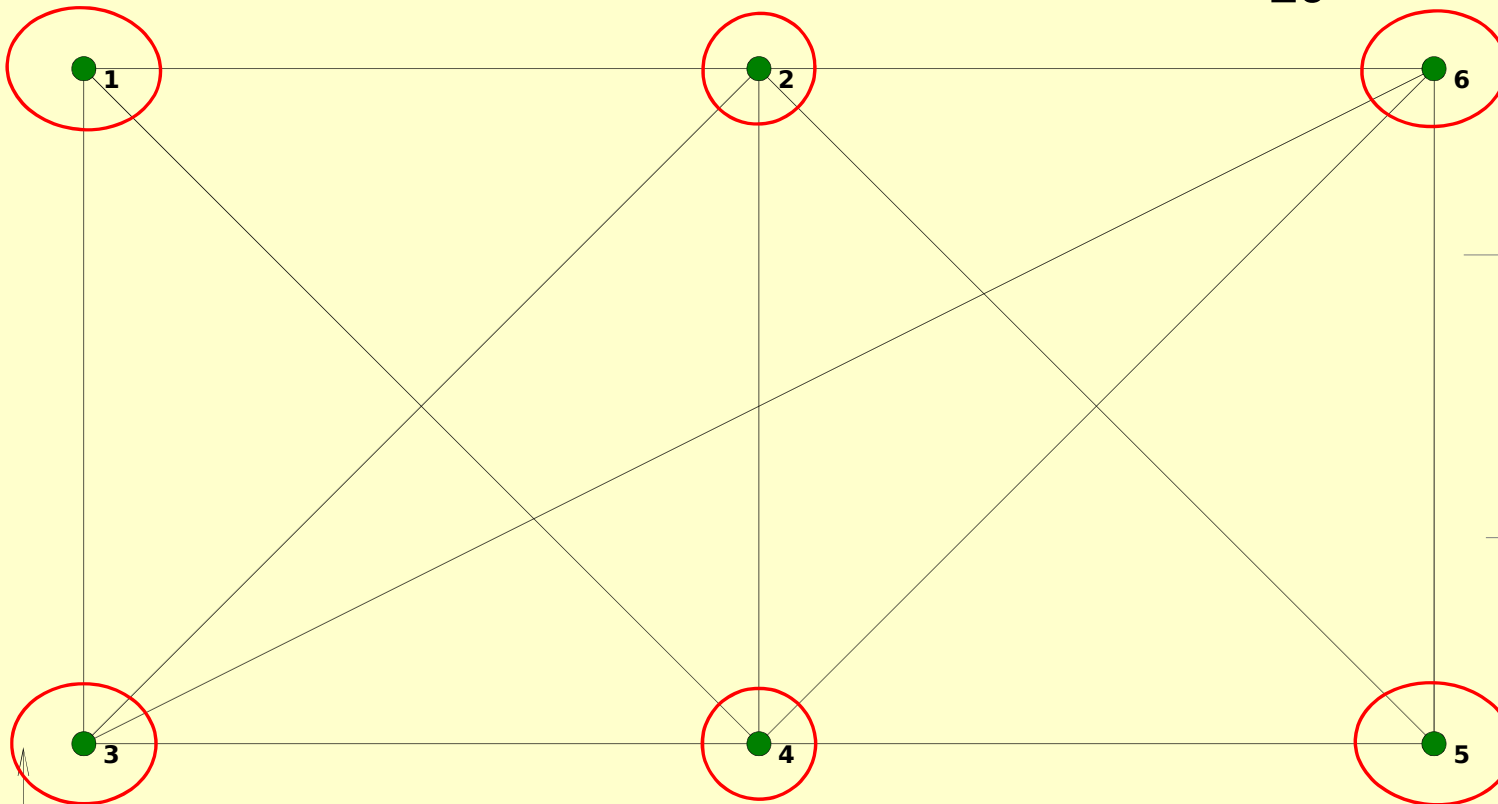
Átl. koord. hiba 1.2mm

$m_0 = 0.8$ (0.7, 1.3)

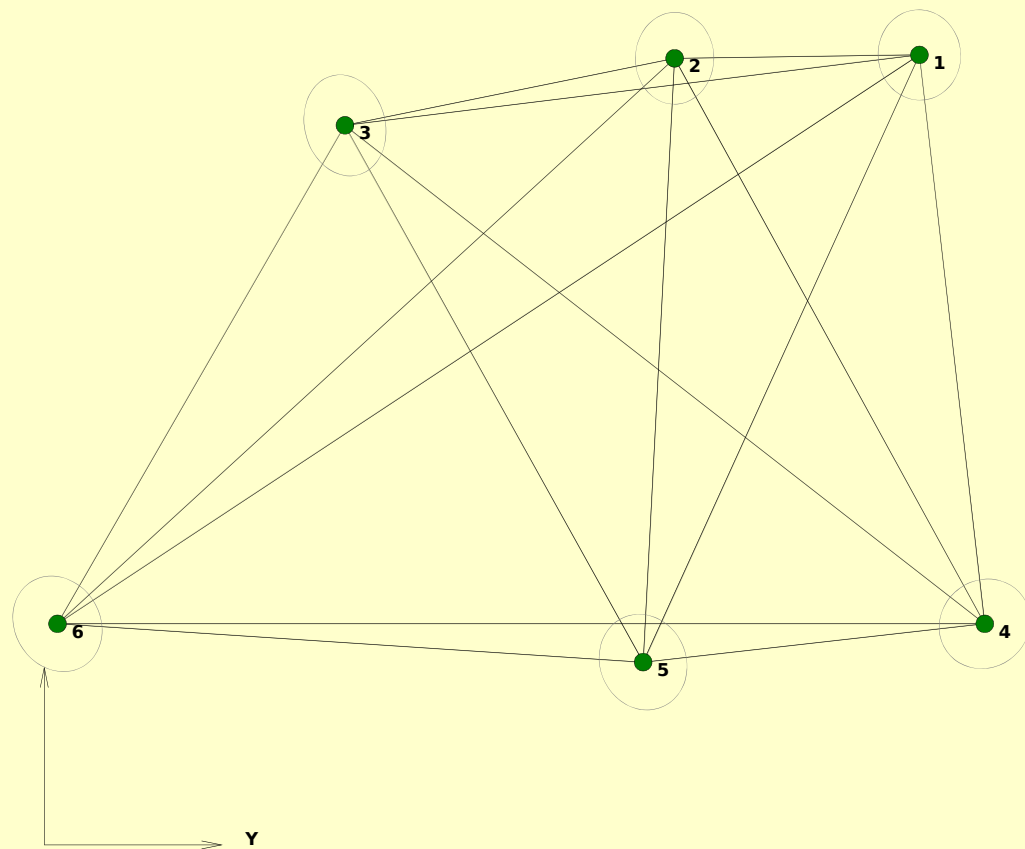
Statisztika

4-2 táv **2.0** > 1.9

Átl. koord. hiba 1.1mm



Példamegoldás - vízszintes hálózat, szélső pontosság

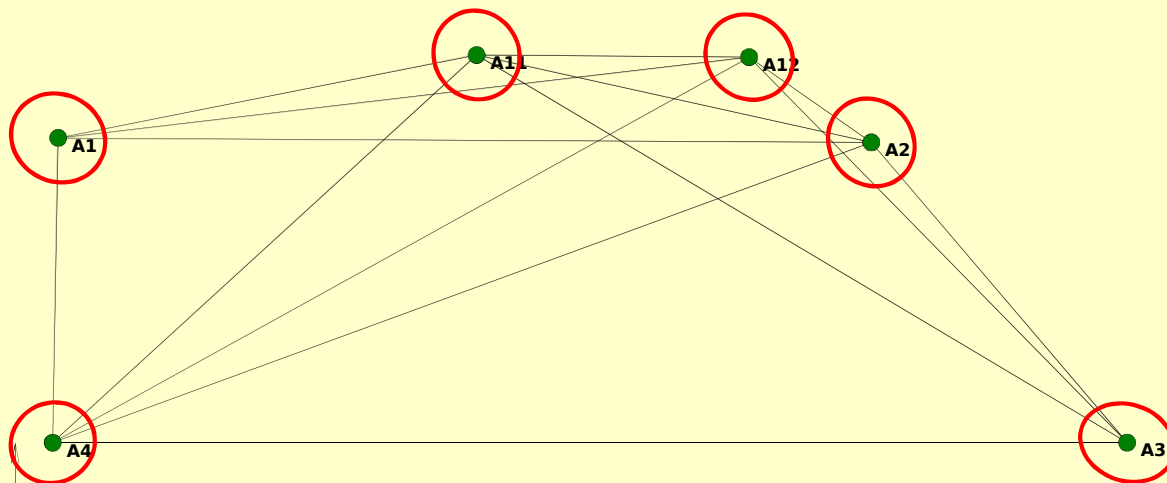


irány 2" távolság 0.6mm + 1 mm/km
 $n = 18$
 $m = 60$
 $d = 3$
 $f = 45$
 $m_0 = 1.0$
koord. középhibák 0.3-0.4 mm
4-3 irány durvahibás, középhiba 0.9"
 $f = 44$
 $m_0 = 0.8$
koord. középhibák 0.2-0.3 mm
> 25%-os javulás

3D kiegyenlítés

	3D	2D	1D
mérés	84	56	28
ismeretlen	24	18	6
defektus	4	3	1
fölösmérés	64	41	23
durvahiba	16	7	5
kr. középhiba	0.4	0.2	0.4

Valamennyi pont pillérrel
állandósított. Irányzás ATR-rel.
A műszer magasságokat mm
élességgel mértük és a kiegyenlítés
szempontjából hibátlanak
tekintettük.
A távmérésközéphibája 0.6 mm



Koordináta transzformációk

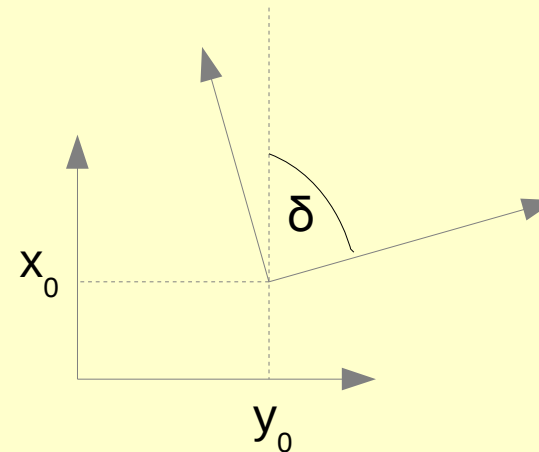
- 1D transzformáció, súlypontok alapján

$$\Delta z = \frac{\sum z_i}{n} - \frac{\sum z_i}{n}$$

- 2D transzformáció
Helmert 4 paraméteres

$$y_p + v_{yp} = y_0 + a_p \cdot r - b_p \cdot m$$

$$x_p + v_{xp} = x_0 + a_p \cdot m + b_p \cdot r$$



Ismeretlenek:

y_0, x_0, r, m

$$r = k \cdot \sin \delta$$

$$m = k \cdot \cos \delta$$

Helmert 3 paraméteres

$$y_p = y_0 + a \cdot \sin \delta - b \cdot \cos \delta$$

$$x_p = x_0 + a \cdot \cos \delta + b \cdot \sin \delta$$

Ismeretlenek:

y_0, x_0, δ

megoldás legkisebb négyzetek módszerével,
fiktív mérések a koordináták (közvetítő egyenletek)

Helyi – EOVSz transformáció

Négy paraméteres transformáció

$$Y = 640122.996 + y * 0.865963189 - x * -0.500045075$$

$$X = 245576.001 + y * -0.500045075 + x * 0.865963189$$

Méretarány = 0.99996866 Forgatás = - 30-00-14

Pont	y	x	Y	X	dy	dx	táv.
1	0.000	100.000	640173.000	245662.600	-0.001	0.002	0.003
3	0.001	-0.001	640123.000	245576.000	0.003	-0.000	0.003
5	199.999	0.001	640296.190	245475.990	0.001	-0.004	0.004
6	200.000	100.000	640346.190	245562.590	-0.003	0.002	0.004

31 mm/km

RMS= **0.003**

Pont	y	x	Y	X
2	100.000	100.001	640259.597	245612.594
4	99.999	-0.001	640209.592	245525.997

Transzformáció két helyi rendszer között

3 paraméteres Helmert transzformáció

$$Y = 0.000 + y * 1.0000000000 - x * -0.000024671$$

$$X = 0.015 + y * -0.000024671 + x * 1.0000000000$$

Méretarány = 1.0000000000 Elfordulás = - 0-00-05

Pontszám	y	x	Y	X	dY	dX	dt
1	0.001	-0.011	-0.002	0.001	-0.003	-0.003	0.004
2	211.701	-0.009	211.703	0.001	0.001	0.001	0.001
3	257.950	375.643	257.960	375.653	0.000	0.001	0.001
4	78.133	395.493	78.144	395.507	0.001	0.001	0.002

RMS= 0.003

Pontszám	y	x	Y	X
5	-60.366	387.984	-60.357	388.000



Ezen a fejlesztésén még dolgozunk...

